УДК 517.51

©2008 р. Лінчук Ю.С.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УМОВИ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ОПЕРАТОРІВ КОМПОЗИЦІЇ, ПОРОДЖЕНИХ АВТОМОРФІЗМАМИ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

У просторі цілих функцій, що наділений топологією компактної збіжності, одержані необхідні і достатні умови еквівалетності операторів композиції, породжених автоморфізмами комплексної площини. Описані також комутанти таких операторів.

Necessary and sufficient conditions for the equivalence of composition operators which induced by automorphisms of the complex plane are received in the space of entire functions endowed with the topology of compact convergence. The commutants of these operators are also described.

Нехай $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ – простір цілих функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Кожна ціла функція $\varphi(z)$ породжує оператор композиції K_φ, який лінійно та неперевно діє в просторі $\mathcal{H}$ за правилом: $(K_\varphi f)(z) = f(\varphi(z))$, $z \in \mathbb{C}$. Різні властивості операторів композиції у просторах аналітичних в одиничному крузі $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій з обмеженнями на ріст їхнього модуля (просторах Харді, Бергмана, Діріхле) досліджувалися в працях Е. Нордгріна [1] та Б. Клода [2]; монографіях Д. Шапіро [3], Р. Сайнга та Д Менхеса [4], К. Коуена та Б. Макклуер [5]. Комутаційні властивості операторів композиції, що діють у просторі $\mathcal{H}(D)$ і породжені дробово-лінійними автоморфізмами одиничного круга D вивчені в працях [6]-[8]. В цій статті досліджені задачі, аналогічні до розглянутих у [8], для операторів композиції у просторі цілих функцій.

Добре відомо, що загальний вигляд конформних автоморфізмів комплексної площини на себе дається формулою: $\varphi(z) = az + b$, де $a, b \in \mathbb{C}$, причому $a \neq 0$ [9]. Кожне таке відображення породжує у просторі $\mathcal{H}$ оператор композиції $T_{a,b}$, що діє за правилом: $(T_{a,b}f)(z) = f(az + b)$. Вивчимо деякі властивості цих операторів.

Якщо $a = 1$, то відповідний оператор $T_{1,b} = E_b$, де E_b – оператор зсуву, що діє у просторі $\mathcal{H}$. Комутант оператора E_b описано в [10].

Якщо $b = 0$, то відповідний оператор $T_{a,0} = L_a$, де L_a – оператор гомотетії, що діє в $\mathcal{H}$. Комутант оператора L_a описаний в [10] і [11].

Для дослідження умов еквівалентності двох операторів виду $T_{a,b}$ у просторі $\mathcal{H}$ нам будуть потрібними наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $a \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ і $b \in \mathbb{C}$. Тоді оператор $T_{a,b}$ еквівалентний у просторі $\mathcal{H}$ до оператора L_a.*

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що

$$T_{a,b}T_{a-1,b} = T_{a-1,b}L_a. \quad (1)$$

Оскільки при $a \neq 1$ оператор $T_{a-1,b}$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}$, то з (1) випливає правильність твердження леми 1.

Лема 2. *Нехай $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$. Для того, щоб оператори E_{h_1} і E_{h_2} були еквівалентними у просторі $\mathcal{H}$ необхідно і достатньо, щоб $h_1h_2 \neq 0$ або $h_1 = h_2 = 0$.*

Доведення. Оскільки необхідність умов леми є очевидною, то зупинимося на доведенні їхньої достатності. Випадок $h_1 = h_2 = 0$ є тривіальним. Нехай $h_1h_2 \neq 0$. Тоді при

$a = \frac{h_1}{h_2}$ виконується рівність $L_a E_{h_1} = E_{h_2} L_a$. Оскільки оператор L_a є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}$, то лема 2 є доведеною.

Якщо два оператори A та B є еквівалетними в просторі $\mathcal{H}$, то їхні точкові спектри (множини власних значень) $\sigma_p(A)$ та $\sigma_p(B)$ збігаються. Для подальшого викладу нам будуть потрібні описи точкових спектрів простіших операторів композиції.

Лема 3. *Для кожного* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*:* $\sigma_p(L_a) = \{a^n : n = 0, 1, \ldots\}$.

Доведення. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ рівняння $(L_a f)(z) = \lambda f(z)$, де $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathcal{H}$, рівносильне тому, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n (a^n - \lambda) z^n = 0. \qquad (2)$$

при $z \in \mathbb{C}$. Рівняння (2) має ненульовий розв'язок $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли існує ціле невід'ємне n, для якого $a^n = \lambda$.

Лема 4. *Для кожного* $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*:* $\sigma_p(E_h) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Виберемо $k \in \mathbb{C}$ таким, щоб $e^{kh} = \lambda$ і покладемо $\varphi_\lambda(z) = exp(kz)$. Тоді $(E_h \varphi_\lambda)(z) = \lambda \varphi_\lambda(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Лема 5. *У просторі цілих функцій оператор гомотетії* L_a *є еквівалнтним до оператора зсуву* E_h *тоді і тільки тоді, коли* $a = 1$ *і* $h = 0$.

Правильність твердження леми 5 випливає з лем 3 і 4.

Лема 6. *Нехай* L_{a_1} *еквівалентний до* L_{a_2} *в* $\mathcal{H}$ *для деяких* $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Тоді* $a_1 = a_2$ *або* $|a_1| = |a_2| = 1$.

Доведення. Нехай L_{a_1} еквівалентний до L_{a_2} в $\mathcal{H}$. Тоді за лемою 2

$$\{a_1^n : n = 0, 1, \ldots\} = \{a_2^n : n = 0, 1, \ldots\}.$$

З цієї рівності випливає, що існують цілі невід'ємні числа n_1 і n_2 такі, що $a_1^{n_1} = a_2$, $a_2^{n_2} = a_1$. Якщо одне з чисел n_1 або n_2 дорівнює нулеві, то $a_1 = a_2 = 1$. Якщо $n_1 = n_2 = 1$, то $a_1 = a_2$. Нехай $n_1 n_2 \geq 2$. Тоді $|a_j|^{n_1 n_2} = |a_j|$, $j = 1, 2$. Значить $|a_j| = 1$, $j = 1, 2$.

Лема 7. *Нехай* $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$*, причому* $|a_1| = |a_2| = 1$*. Для того, щоб оператори* L_{a_1} *та* L_{a_2} *були еквівалентними в* $\mathcal{H}$*, необхідно і достатньо, щоб* $a_1 = a_2$ *або числа* a_1 *та* a_2 *були первісними коренями з одиниці одного і того ж степеня.*

Ця лема доводиться за тією ж схемою, що і лема 4 з роботи [6]. При цьому потрібно врахувати, що для чисел $a_j = e^{i\alpha_j}$, $j = 1, 2$, умова 1°) з леми 4 [6] рівносильна тому, що $a_1 = a_2$, а умова 2°) – тому, що числа a_1 та a_2 є первісними коренями q-го степеня з одиниці.

Теорема. *Нехай* $a_j, b_j \in \mathbb{C}$*, причому* $a_j \neq 0$*,* $j = 1, 2$*. Для того, щоб оператори* T_{a_1, b_1} *та* T_{a_2, b_2} *були еквівалентними в просторі* $\mathcal{H}$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з умов:*
1) $a_1 = a_2 = 1$ *і* $b_1 = b_2 = 0$*;*
2) $a_1 = a_2 = 1$ *і* $b_1 b_2 \neq 0$*;*
3) $a_1 = a_2 \neq 1$*,* $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$*;*
4) числа a_1 *та* a_2 *були первісними коренями з одиниці одного і того ж степеня* n*,* $n \geq 2$*,* $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$*.*

Доведення. Необхідність. Нехай оператор T_{a_1, b_1} є еквівалентним до T_{a_2, b_2} в просторі $\mathcal{H}$. Розглянемо можливі випадки.

а) $a_j \neq 1$, $j = 1, 2$. За лемою 1, внаслідок транзитивності відношення еквівалентності операторів, одержуємо, що оператор L_{a_1} є еквівалентним до L_{a_2}. Тоді за лемами 6 і 7 виконується одна з умов 3) або 4).

б) $a_j = 1$, $j = 1, 2$. В цьому випадку за лемою 2 виконується умова 1) або 2).

в) $a_1 = 1$, $a_2 \neq 1$. Тоді $T_{a_1, b_1} = E_{b_1}$, а за лемою 1 оператор T_{a_2, b_2} є еквівалентним до оператора L_{a_2}. Використовуючи властивість транзитивності для еквівалентних операторів, одержуємо, що E_{b_1} еквівалентний до L_{a_2} в $\mathcal{H}$. Оскільки $a_2 \neq 1$, то за лемою 5 випадок в) є неможливим.

г) $a_2 = 1$, $a_1 \neq 1$.Цей випадок розглядається аналогічно до попереднього.

Достатність умов теореми випливає з лем 1, 2, 7.

Зауваження 1. *Для довільної цілої функції* $\varphi(z)$ *оператор* K_φ *буде ізоморфізмом простору* $\mathcal{H}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\varphi(z)$

є лінійною функцією, бо в протилежному випадку $\varphi(z)$ не є однолистою в $\mathbb{C}$. Тому, якщо для деякої функції $\varphi \in \mathcal{H}$ оператор K_φ є еквівалентним в $\mathcal{H}$ до певного оператора виду $T_{a,b}$, то $\varphi(z)$ є лінійною функцією, тобто $K_\varphi = T_{a_1,b_1}$ для деяких чисел $a_1, b_1 \in \mathbb{C}$.

Зауваження 2. *За лемою 1 кожен з операторів виду $T_{a,b}$ ($a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) зводиться до оператора зсуву E_b у випадку $a = 1$ або є еквівалентним до оператора гомотетії L_a, якщо $a \neq 1$. Використовуючи описи комутантів операторів зсуву та гомотетії в просторі $\mathcal{H}$, що одержані в [10], [11] та лему 1 з [6], легко одержати опис комутанта довільного оператора композиції $T_{a,b}$ у просторі $\mathcal{H}$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Nordgren E. A.* Composition Operators in Hilbert Spaces // Hilbert Space Operators, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. – 1978. – Vol.693. – P. 37 – 63.

2. *Cload B.* Toepliz operators in the commutant of composition operators // Studia Mathematica. – 1999. – 133(2). – P. 187 – 196.

3. *Shapiro Joel H.* Composition operators and classical function theory. – Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993. – 223 p.

4. *Singh R. K., Manhas J.S.* Composition operators on function spaces. – North-Holland Mathematics Studies, vol. 179, North-Holland, Amsterdam, 1993. – 315 p.

5. *Cowen C. C. , MacCluer B. D.* Composition Operators on spaces of analytic functions. – CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. – 400p.

6. *Лінчук Ю.С.* Комутант оператора композиції, породженого еліптичним дробово-лінійним перетворенням, та його застосування // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 228. Математика. Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 48 – 50.

7. *Лінчук Ю.С.* Комутант одного класу операторів композиції в просторах аналітичних функцій // Доповіді НАН України. – 2005, № 11. – С. 14 – 17.

8. *Лінчук Ю.С.* Деякі класи операторів, що діють в просторах аналітичних функцій і пов'язані з комутаційними співвідношеннями. – Дис. канд. фіз.-матем. наук. – Київ, 2006. – 122 с.

9. *John Milnor* Dynamics in one complex variable, Introductory lectures.– Vieweg Verlag, Weisbaden, 2000.– 257 p.

10. *Подпорин В.П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1977. – 18, №6. – С.1422-1425.

11. *Нагнибида Н.И.* О корнях из одного оператора в пространстве аналитических в круге функций. – Деп. в ВИНИТИ, 1981.– № 3323-81. – 12 с.