УДК 517.51

©2008 р. Лінчук С.С.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАСТОСОВНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ДО ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Досліджені критерії застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку зі змінними коефіцієнтами до простору $[\rho,\sigma]$.

Criteria of pointwise applicability for integral operators of infinite order with variable factors to the space $[\rho,\sigma]$ are investigated.

В роботі [1] досліджені критерії поточкової застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами до простору $[\rho,\sigma]$. У цій статті вивчаються умови застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку зі змінними коефіцієнтами до простору $[\rho,\sigma]$ за топологією цього простору. Історичний огляд таких задач наведений в [1] та [2]. Оскільки ця стаття є продовженням [1], то надалі ми будемо використовувати поняття та допоміжні твердження з [1].

Нехай послідовність комплексних чисел $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ така, що відповідний оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ лінійно і неперервно діє в просторі $[\rho,\sigma]$, а $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність функцій з простору $[\rho,0]$. Тоді інтегральний оператор нескінченного порядку

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z) \qquad (1)$$

називається застосовним до простору $[\rho,\sigma]$ в простір $[\rho,\sigma]$, якщо для будь-якої функції $f\in[\rho,\sigma]$ ряд (1) збігається за топологією простору $[\rho,\sigma]$.

Для доведення основної теореми нам буде потрібне допоміжне твердження.

Лема 1. *Для довільної функції $g(z)$ з простору $[\rho,\sigma]$ і довільного цілого невід'ємного p при $0<\varepsilon<\varepsilon'$ виконується нерівність*

$$||g(z)z^p||_{\varepsilon'}\le A(\varepsilon,\varepsilon')\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{p}{\rho}}||g(z)z^p||_{\varepsilon},$$

де $A(\varepsilon,\varepsilon')=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{k}{\rho}}$.

Доведення. Нехай $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g_kz^k\in[\rho,\sigma]$. Тоді, використовуючи лему 3 з [1], одержимо, що для довільного цілого невід'ємного p

$$||g(z)z^p||_{\varepsilon'}=||\sum_{k=0}^{\infty}g_kz^{p+k}||_{\varepsilon'}\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}|g_k|||z^{p+k}||_{\varepsilon'}\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}||g(z)z^p||_{\varepsilon}\frac{||z^{p+k}||_{\varepsilon'}}{||z^{p+k}||_{\varepsilon}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}||g(z)z^p||_{\varepsilon}\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{p+k}{\rho}}=$$

$$=A(\varepsilon,\varepsilon')\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{p}{\rho}}||g(z)z^p||_{\varepsilon}.$$

Лему 1 доведено.

Теорема 1. *Для застосовності інтегрального оператора нескінченного порядку (1) до простору $[\rho,\sigma]$ в простір $[\rho,\sigma]$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\varepsilon_1>0\ \exists C>0\ \forall n,k\ge0$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k}\right| ||\psi_n(z)z^{k+n}||_\varepsilon \le C||z^k||_{\varepsilon_1}. \qquad (2)$$

Доведення. Необхідність. Допустимо, що інтегральний оператор нескінченного порядку (1) застосовний до простору $[\rho,\sigma]$ у простір $[\rho,\sigma]$. Тоді для кожної функції $f \in [\rho,\sigma]$ ряд (1) збігається за топологією простору $[\rho,\sigma]$. Тоді, тим більше, послідовність $(\psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z))_{n=0}^\infty$ є обмеженою в $[\rho,\sigma]$ для кожної фіксованої функції $f \in [\rho,\sigma]$. Розглянемо послідовність лінійних неперервних операторів $(T_n)_{n=0}^\infty$, $T_n : [\rho,\sigma] \to [\rho,\sigma]$,

$$(T_n f)(z) = \psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z),\ n = 0,1,\ldots.$$

Із доведеного раніше випливає, що послідовність операторів $(T_n)_{n=0}^\infty$ є поточково обмеженою. Оскільки $[\rho,\sigma]$ є простором Фреше, то за теоремою Банаха-Штейнгауза ця послідовність операторів є одностайно неперервною, тобто

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\varepsilon_1 > 0\ \exists C > 0\ \forall f \in [\rho,\sigma]\ \forall n = 0,1,\ldots$$

$$||\psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)||_\varepsilon \le C||f||_{\varepsilon_1}.$$

З цієї умови при $f(z) = z^k$, $k = 0,1,\ldots$, одержуємо (2).

Достатність. Нехай умова (2) виконується. Візьмемо довільну функцію $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ з простору $[\rho,\sigma]$ і покажемо, що ряд (1) збігається за топологією простору $[\rho,\sigma]$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon' > 0$ і візьмемо ε таким, щоб $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Нехай $\varepsilon_1 > 0$ і $C > 0$ вибрані для $\varepsilon > 0$ згідно умови (2). Оцінимо норму загального члена ряду (1).

Використовуючи лему 3 з [1] і лему 1 матимемо, що при $n = 0,1,\ldots$

$$||\psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)||_{\varepsilon'} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \left|\frac{\alpha_{k+n}}{\alpha_k}\right| ||\psi_n(z)z^{k+n}||_{\varepsilon'} \le$$

$$\le A\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{f_k\alpha_{k+n}}{\alpha_k}\right| ||\psi_n(z)z^{k+n}||_\varepsilon \left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{k+n}{\rho}} \le$$

$$\le CA\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{n}{\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|||z^k||_{\varepsilon_1} \left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{k}{\rho}} \le$$

$$\le CA\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{n}{\rho}} ||f||_{\varepsilon_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{k}{\rho}} =$$

$$= CA^2||f||_{\varepsilon_1} \left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{n}{\rho}},$$

де $A = A(\varepsilon,\varepsilon')$ (див. лему 1).

Таким чином, при $n = 0,1,\ldots$

$$||\psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)||_{\varepsilon'} \le C_1 \left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon'}\right)^{\frac{n}{\rho}},$$

де $C_1 = C[A(\varepsilon,\varepsilon')]^2||f||_{\varepsilon_1}$. Тому числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||\psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)||_{\varepsilon'} \qquad (3)$$

збігається. В силу довільності ε' і повноти простору $[\rho,\sigma]$ із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (1) за топологією простору $[\rho,\sigma]$. Теорема 1 доведена.

Подальше вивчення умов застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку (1) до простору $[\rho,\sigma]$ пов'язане з конкретизацією умови (2). Розглянемо випадок інтегрального оператора нескінченного порядку відносно звичайного інтегрування зі сталими коефіцієнтами.

Теорема 2. *Для застосовності інтегрального оператора нескінченного порядку*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mathcal{J}^n f)(z) \qquad (4)$$

до простору $[1,\sigma]$ в простір $[1,\sigma]$ необхідно і достатньо, щоб послідовність $(c_n)_{n=0}^\infty$ задовольняла умову

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \le \sigma. \qquad (5)$$

Доведення. Необхідність. Нехай інтегральний оператор нескінченного порядку (4) застосовний до простору $[1,\sigma]$ в простір $[1,\sigma]$. Тоді за теоремою 1 виконується умова (2), яка з врахуванням того, що $\alpha_n = \frac{1}{n!}$, $\psi_n(z) \equiv c_n$, $n = 0,1,\ldots$, набуває вигляду

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\varepsilon_1 > 0\ \exists C > 0\ \forall n,k = 0,1,\ldots$$

$$|c_n|\frac{k!}{(n+k)!}||z^{k+n}||_\varepsilon \le C||z^k||_{\varepsilon_1}. \qquad (6)$$

Покладаючи в (6) $k=0$, одержимо, що

$$\forall\varepsilon>0\ \exists C>0\ \forall n=0,1,\dots$$

$$|c_n|\le C\frac{n!}{||z^n||_\varepsilon}.$$

З останньої умови випливає, що

$$\forall\varepsilon>0\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\le\sigma+\varepsilon,$$

і умова (5) виконується.

Достатність. Нехай (5) виконується. Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$ і виберемо ε_1 таким, щоб $0<\varepsilon_1<\varepsilon$. Нехай η – настільки мале додатне число, що $\eta<e$ і $\frac{e+\eta}{e-\eta}\cdot\frac{\varepsilon_1+\sigma}{\varepsilon+\sigma}<1$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$, то для вибраного η існують сталі C_1 і C_2 такі, що

$$C_1(e-\eta)^n\le\frac{n^n}{n!}\le C_2(e+\eta)^n \text{ при } n=0,1,\dots.$$

З (5) випливає, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}<\sigma+\varepsilon_1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{||z^n||_{\varepsilon_1}}}.$$

Тому існує стала $C_3>0$ така, що

$$|c_n|\le C_3\frac{n!}{||z^n||_{\varepsilon_1}},\ n=0,1,\dots.$$

Використовуючи ці нерівності, одержимо, що при $n,k=0,1,\dots$

$$|c_n|\frac{k!}{(n+k)!}||z^{k+n}||_\varepsilon\le$$

$$\le C_3\frac{k!n!}{(k+n)!}\frac{||z^{k+n}||_\varepsilon}{||z^{k+n}||_{\varepsilon_1}}\frac{||z^{k+n}||_{\varepsilon_1}}{||z^n||_{\varepsilon_1}}\le$$

$$\le C_3\frac{k!n!}{(k+n)!}\left(\frac{\sigma+\varepsilon_1}{\sigma+\varepsilon}\right)^{n+k}\frac{||z^{k+n}||_{\varepsilon_1}||z^k||_{\varepsilon_1}}{||z^n||_{\varepsilon_1}||z^k||_{\varepsilon_1}}\le$$

$$\le C_3\frac{k!n!}{(k+n)!}\left(\frac{\sigma+\varepsilon_1}{\sigma+\varepsilon}\right)^{n+k}\frac{(k+n)^{k+n}}{n^nk^k}||z^k||_{\varepsilon_1}\le$$

$$\le\frac{C_3C_2}{C_1^2}\left(\frac{e+\eta}{e-\eta}\right)^{n+k}\left(\frac{\sigma+\varepsilon_1}{\sigma+\varepsilon}\right)^{n+k}||z^k||_{\varepsilon_1}\le$$

$$\le\frac{C_3C_2}{C_1^2}||z^k||_{\varepsilon_1}.$$

Таким чином, умова (6) виконується і за теоремою 1 інтегральний оператор нескінченного порядку (4) застосовний до простору $[1,\sigma]$ в простір $[1,\sigma]$. Теорема 2 доведена.

Через A_R позначимо простір усіх аналітичних у крузі $|z|<R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Топологія на просторі A_R задається системою норм $\{||\cdot||_r : 0<r<R\}$, де $||f||_r=\underset{|z|\le r}{max}|f(z)|$. Нехай, як і раніше, оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ лінійно і неперервно діє у просторі $[\rho,\sigma]$, а $(\psi_n(z))_{n=0}^\infty$ – послідовність функцій з простору A_R. Інтегральний оператор нескінченного порядку (1) є застосовним до простору $[\rho,\sigma]$ у простір A_R, якщо для будь-якої функції $f\in[\rho,\sigma]$ ряд (1) збігається за топологією простору A_R.

Теорема 3. *Для застосовності інтегрального оператора нескінченного порядку (1) до простору $[\rho,\sigma]$ у простір A_R необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\forall r<R\ \exists\varepsilon>0\ \exists C>0\ \forall n,k\ge0$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k}\right|||\psi_n||_r r^{k+n}\le C||z^k||_\varepsilon. \qquad (7)$$

Ця теорема доводиться за тією ж схемою, що і теорема 1.

Наслідок. *Нехай (c_n) – послідовність комплексних чисел. Для застосовності інтегрального оператора нескінченного порядку (4) до простору $[\rho,\sigma]$ в простір A_R необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!}}\le\frac{1}{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність інтегральних операторів нескінченного порядку до деяких класів цілих функцій // Вісник Чернівецького ун-ту.–2007, вип.349.– С. 70-73.

2. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1983.— 154 с.