УДК 517.51

©2008 р. В.М. Косован, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Доведено, що для довільних підмножин $X_1, \ldots, X_n$ деякого поля K для того, щоб кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to K$ була поліноміальною за сукупністю змінних, необхідно і досить, щоб серед множин $X_1, \ldots, X_n$ була щонайбільше одна зліченна множина.

We prove that for some sets $X_1, \ldots, X_n$ of a field K every separately polynomial function $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to K$ is jointly polynomial if and only if among the sets $X_1, \ldots, X_n$ there exist at most one countable set.

1. В теорії функцій є добре відомий чудовий результат, який має назву теорема Гартоґса [1; 2, с. 41]: кожна нарізно аналітична функція $w = f(z_1, \ldots, z_n)$, що задана в деякій області простору $\mathbb{C}^n$, є аналітичною за сукупністю змінних. Теорема Гартоґса розвивалася у працях багатьох математиків XX століття (див. огляд [3]), а її попередні слабші версії подав В.Осґуд [4, 5]. Цікаво зазначити, що для дійсних скалярів аналогічне твердження неправильне: приклад – класична функція Шварца $sp(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ і $sp(0, 0) = 0$.

У теореми Гартоґса є алгебраїчний аналог [6, задача 3.80]: кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є поліномом за сукупністю змінних. Такий самий результат справедливий і для комплексних скалярів. Цю теорему, певно що, слід віднести до області математичного фольклору, принаймні нам невідомо, де опубліковано її доведення. Те розв'язання задачі 3.80, що його знайшов другий з співавторів у далекому 1979 році, спиралося на теорему Бера про категорію. Думається, що саме такий підхід мали на увазі автори збірника [6], бо задача 3.80 йде якраз серед тих задач, які розв'язуються катетегорним методом.

У зв'язку з наведеним алгебраїчним аналогом теореми Гартоґса природно виникли і загальніші питання. Нехай $\mathbb{K}$ – це поле $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел або поле $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел і X та Y – довільні підмножини $\mathbb{K}$. Питається, при яких умовах на множини X і Y кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ буде поліноміальною за сукупністю змінних? Більше того, що можна сказати про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{K}$ від n числових змінних?

Дослідженню цих питань і присвячена дана праця. У процесі їх дослідження з'ясувалося, що вони мають чисто алгебраїчну та теоретико-множинну природу і не потребують для свого вирішення топологічних понять. Їх ми ставимо для довільного поля K і замість теореми Бера про категорію використовуємо наступний елементарний результат з теорії множин: об'єднання послідовності не більш, ніж зліченних, множин є не більш, ніж зліченною, множиною. Ми встановлюємо, що для довільного поля K і будь-яких множин $X, Y \subseteq K$ кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X \times Y \to K$ буде поліноміальною тоді і тільки тоді, коли хоча б одна з множин X чи Y є скінченною або незліченною. Інакше кажучи: для того щоб існувала нарізно поліноміальна функція $f\colon X \times Y \to K$, яка не є поліноміальною за сукупністю змінних, необхідно і достатньо, щоб обидві множини X і Y були зліченними. Ми узагальнюємо цей результат, довівши, що необхідною і достатньою умовою існування нарізно поліноміальної функції $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to K$, яка не є поліноміальною за сукупністю змінних, є наявність серед множин $X_1, \ldots, X_n$ хоча б двох зліченних X_k та X_j. Основними алгебраїчними засобами при цьому виступають визначники Вандермонда і многочлени Лаґранжа. Далі, у тому випадку, коли $K = \mathbb{K}$, ми будуємо приклади нарізно поліноміальних і розривних функцій, зокрема, приклад нарізно поліноміальної і скрізь розривної функції f: $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$.

Попередні версії результатів цієї статті були анонсовані в тезах [7 – 9].

2. Нехай K – довільне поле [10, с. 276; 11, с. 7]. *Поліном* або *многочлен на* K – це функція p: $K \to K$, яка задається формулою $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, де коефіцієнти a_k при $k = 0, 1, \ldots, n$ належать до поля K.

В алгебрі під многочленом від однієї змінної над полем K розуміють формальну суму $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ з коефіцієнтами a_k з K, яка породжує функцію $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ на K. Якщо поле K нескінченне, то відповідність між формальними многочленами і породжуваними ними функціями є бієктивною (див. далі лему 2), для скінченного ж поля це вже не так.

Якщо ж $a_n \neq 0$, то число n називається *степенем формального многочлена* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ і позначається через $\deg p(x)$.

Для полінома p: $K \to K$ (як функції) ми будемо писати $\deg p = n$ чи $\deg p \leq n$, якщо цей поліном породжується формальним многочленом, степінь якого $= n$ чи $\leq n$. Те саме стосується і многочленів від багатьох змінних, які вводяться нижче.

Розглянемо довільну підмножину X поля K . Функцію f: $X \to K$ ми називаємо *поліноміальною*, якщо існує такий поліном p: $K \to K$, що $f(x) = p(x)$ на X, тобто $f = p|_X$.

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – різні елементи з K, а $c_1, \ldots, c_n$ – довільні елементи з K. Для кожного $k = 1, \ldots, n$ розглянемо поліном

$$\varphi_k(x) =$$
$$= \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Зрозуміло, що $\varphi_k(x_k) = 1$ і $\varphi_k(x_j) = 0$ при $j \neq k$, при цьому $\deg \varphi_k = n - 1$. Покладемо

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

для кожного $x \in K$. Ясно, що p є поліномом на K, причому $p(x_k) = c_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$ і $\deg p \leq n - 1$. Функція p – це класичний *інтерполяційний многочлен Лаґранжа* [10, с. 158], побудований за вузлами $(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)$.

Якщо $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – скінченна множина, де $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$, і f: $X \to K$ – довільна функція, то для інтерполяційного многочлена Лаґранжа

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \varphi_k(x)$$

будемо мати, що $p|_X = f$. Таким чином, ми бачимо, що для скінченної множини X в K кожна функція f: $X \to \mathbb{K}$ є поліноміальною.

Для подальшого нам потрібно буде одне уточнення цього результату.

Лема 1. *Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – різні точки з поля K, $c_1, \ldots, c_n$ – довільні елементи з K. Тоді існує поліном p: $K \to K$, такий, що $p(x_k) = c_k$ при $k = 1, \ldots, n$ і $\deg p = n$.*

Доведення. Досить покласти $p(x) = q(x) + r(x)$, де $q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ – відповідний многочлен Лаґранжа, а $r(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

3. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – довільні елементи з поля K. Нам потрібна буде формула для *визначника Вандермонда* [11, с. 114] (див. також [10, с. 50], де розглянутий визначник транспонованої матриці):

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k).$$

З цієї формули негайно випливає, що для різних елементів x_1, …, x_n обов'язково $\Delta(x_1, \dots, x_n) \ne 0$.

Лема 2. *Нехай* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *– поліном на K і x_0, x_1, …, x_n – різні елементи з K. Тоді існують такі елементи $\lambda_{k,j}$ з K, які залежать тільки від x_0, x_1, …, x_n, що*

$$a_k = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{k,j} p(x_j)$$

при $k = 0, 1, \dots, n$.

Доведення. Подивимося на рівності

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k = p(x_j)$$

при $j = 0, 1, \dots, n$, як на систему $n+1$ лінійних рівнянь з невідомими a_0, a_1, …, a_n. Визначник цієї системи – це визначник Вандермонда

$$\Delta = \Delta(x_0, x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

який відмінний від нуля, бо елементи x_j різні. Тому за правилом Крамера [11, с. 121] знаходимо

$$a_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

де

$$\Delta_k =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{k-1} & p(x_0) & x_0^{k+1} & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{k-1} & p(x_n) & x_n^{k+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи визначник Δ_k за елементами k-го стовпчика [11, с. 106] і ділячи відповідні алгебраїчні доповнення на Δ, ми отримаємо потрібні елементи $\lambda_{k,j}$. Підкреслимо, що вони залежать тільки від елементів x_0, x_1, …, x_n.

Лема 3. *Нехай X – нескінченна підмножина поля K і $f\colon X \to K$ – поліноміальна функція. Тоді існує єдиний поліном $p\colon K \to K$ такий, що $p|_X = f$.*

Доведення. Оскільки функція f поліноміальна, то існує такий поліном p на K, що $p|_X = f$. Нехай $\deg p = n$. З нескінченної множини X можна вибрати $n+1$ елемент x_0, x_1, …, x_n. Ясно, що $p(x_j) = f(x_j)$ при $j = 0, 1, \dots, n$. З леми 2 випливає, що коефіцієнти a_k полінома p однозначно виражаються через числа $f(x_j)$ за формулами

$$a_k = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{k,j} f(x_j).$$

Таким чином, многочлен p однозначно відновлюється за функцією f.

Лема 4. *Нехай $f_i\colon X \to K$ при $i = 1, 2$ – дві поліноміальні функції на множині X у полі K, такі, що $f_1|_A = f_2|_A$ для деякої нескінченної підмножини A множини X. Тоді $f_1 = f_2$.*

Доведення. Нехай $f = f_1|_A = f_2|_A$. Функція f, зрозуміло, є поліноміальною. Тому з леми 3 випливає, що існує єдиний поліном $p\colon K \to K$, такий, що $p|_A = f$. Оскільки функції f_i поліноміальні, то існують такі поліноми p_i на K, що $f_i = p_i|_X$ при $i = 1, 2$. Тоді

$$p_1|_A = f_1|_A = f = f_2|_A = p_2|_A.$$

З єдиності p негайно отримуємо, що $p_1 = p = p_2$. А тоді і $f_1 = p|_X = f_2$.

4. Розглянемо декартів квадрат

$$K^2 = \{(x, y) : \ x \in K, y \in Y\}$$

основного поля K. *Поліном* або *многочлен на* K^2 – це функція $p\colon K^2 \to K$, яка задається формулою $p(x, y) = \sum_{k,j=0}^{n} a_{k,j} x^k y^j$, де коефіцієнти $a_{k,j}$ належать до K.

Нехай $E \subseteq K^2$. Функція $f\colon E \to K$ називається *поліноміальною*, якщо існує такий поліном $p\colon K^2 \to K$, що $p|_E = f$. Для точки $(x, y) \in E$ ми покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Крім того, розглянемо *вертикальні* і *горизонтальні розрізи* множини E, тобто множини

$$E^x = \{y \in K : \ (x, y) \in E\}$$

і

$$E_y = \{x \in K : \ (x, y) \in E\},$$

які визначені для довільних $x \in K$ і $y \in K$. Позначимо також $X = \mathrm{pr}_1(E)$ і $Y = \mathrm{pr}_2(E)$, де $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$ і $\mathrm{pr}_2(x, y) = y$. Функцію f: $E \to K$ ми називаємо *нарізно поліноміальною*, якщо для кожного $x \in X$ функція f^x: $E^x \to K$ і для кожного $y \in Y$ функція f_y: $E_y \to K$ є поліноміальними, як функції однієї змінної, що пробігає відповідну підмножину поля K. Щоб підкреслити різницю між введеними поняттями, поліноміальні функції називають ще *сукупно поліноміальними* або *поліноміальними за сукупністю змінних*.

Зрозуміло, що кожна сукупно поліноміальна функція f: $E \to K$ є і нарізно поліноміальною. Ми будемо досліджувати питання, коли справедлива обернена імплікація. У цій статті розглядатиметься лише той випадок, коли $E = X \times Y$, де $X, Y \subseteq K$.

Одразу ж зауважимо, що коли множина X скінченна, то кожна функція f: $X \times Y \to K$, у якої всі вертикальні розрізи f^x: $Y \to K$ є поліноміальними (а це те саме, що й довільна нарізно поліноміальна функція f: $X \times Y \to K$) є поліноміальною за сукупністю змінних. Справді, якщо $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, де $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$, то для кожного $y \in K$ ми можемо розглянути многочлен Лаґранжа

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$$

побудований за вузлами $(x_1, \psi_1(y))$, $\ldots$, $(x_n, \psi_n(y))$, де ψ_k: $K \to k$ – такі поліноми, що $\psi_k|_Y = f^{x_k}$ при $k = 1, \ldots, n$. Зрозуміло, що p – це поліном на K^2, причому $p|_{X\times Y} = f$. Те ж саме буде спостерігатися і у випадку, коли множина Y скінченна. Таким чином, ми отримали перший простий результат.

Теорема 1. *Нехай X і Y – підмножини поля K, причому хоча б одна з них скінченна. Тоді кожна нарізно поліноміальна функція f: $X \times Y \to K$ є поліноміальною за сукупністю змінних.*

5. Розглянемо тепер складніший випадок.

Теорема 2. Нехай X – незліченна, а Y – нескінченна підмножини поля K і f: $X \times Y \to K$ – нарізно поліноміальна функція. Тоді f є поліноміальною за сукупністю змінних.

Доведення. Оскільки для кожного $x \in X$ вертикальний розріз f^x: $Y \to K$ є поліноміальною функцією, то згідно з лемою 3 для кожного $x \in X$ існує єдиний поліном p^x: $K \to K$, для якого $p^x|_Y = f^x$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in X : \ \deg p^x \leq n\}.$$

Зрозуміло, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Оскільки множина X незліченна, то існує таке n, що множина $A = A_n$ теж буде незліченною.

Виберемо в нескінченній множині Y різні елементи $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Оскільки $\deg p^x \leq n$ при $x \in A$, то існують такі функції b_j: $A \to K$, що

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{n} b_j(x) y^j$$

для довільної пари $(x, y) \in A \times Y$. З леми 2 тоді випливає, що існують такі елементи $\lambda_{k,j}$ з K, які залежать тільки від елементів $y_0, \ldots, y_n$, що

$$b_j(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,j} f(x, y_k)$$

для кожного $x \in A$. Функції f_{y_k} за умовою є поліноміальними на X, а значить, і на A. Тому і функції b_j є поліноміальними на A, як лінійні комбінації таких функцій. Оскільки $f(x, y) = \sum_{j=0}^{n} b_j(x) y^j$ на $A \times Y$, то існує такий поліном

$$p(x, y) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{k,j} x^k y^j$$

на K^2, що $f(x,y) = p(x,y)$ на $A \times Y$. Покажемо, що $f = p|_{X\times Y}$. Нехай $y \in Y$. Поліноміальні функції f_y і $p_y|_X$ збігаються на нескінченній множині A. Тому за лемою 4 вони рівні, звідки і випливає рівність $f = p|_{X\times Y}$. Таким чином, f – це сукупно поліноміальна функція.

Зрозуміло, що твердження теореми залишається справедливим, коли ми вимагатимемо, щоб множина X була нескінченною, а множина Y незліченною.

Таким чином, з теорем 1 і 2 отримуємо загальний результат.

Теорема 3. *Нехай X і Y – підмножини поля K, причому хоча б одна з них є скінченною або незліченною. Тоді кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X\times Y \to K$ є поліноміальною за сукупністю змінних.*

6. Займемося тепер дослідженням необхідності отриманих в теоремі 3 умов. Для цього досить розглянути той випадок, коли обидві множники X і Y зліченні.

Теорема 4. *Нехай X і Y – зліченні підмножини поля K. Тоді існує нарізно поліноміальна функція $f\colon X\times Y \to K$, яка не є поліноміальною за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, причому $x_n \neq x_m$ і $y_n \neq y_m$ при $n \neq m$. Зараз ми індуктивно побудуємо такі послідовності многочленів p_n і q_n на K, що $\deg p_n = \deg q_n = n$, $p_n(x_n) = q_n(y_n) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $p_n(x_m) = q_m(y_n)$ для довільних m і n.

За лемою 1 існують такі многочлени p_1 і q_1, що $\deg p_1 = \deg q_1 = 1$ і $p_1(x_1) = q_1(y_1) = 0$. Нехай $n > 1$. Припустимо, що вже побудовані многочлени p_k і q_k при $k = 1,\dots,n-1$, такі, що $\deg p_k = \deg q_k = k$, $p_k(x_k) = q_k(x_k) = 0$ при $k = 1,\dots,n-1$ і $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ для довільних $k,\ j < n$. Користуючись знову лемою 1, побудуємо многочлени p_n і q_n, такі, що $\deg p_n = \deg q_n = n$, $p_n(x_n) = q_n(y_n) = 0$, $p_n(x_j) = q_j(y_n)$ і $q_n(y_j) = p_j(x_n)$ при $1 \le j < n$. Для цих многочленів рівність $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ виконується для довільних $k,\ j \le n$ і до того ж $\deg p_k = \deg q_k = k$ і $p_k(x_k) = q_k(x_k) = 0$ для довільних $k \le n$. Таким чином, побудову завжди можна продовжити на один крок, отже, шукані послідовності існують.

Визначимо функцію g: $(X\times K)\bigcup(K\times Y) \to K$, покладаючи $g(x,y) = p_k(x)$, якщо $y = y_k$ і $x \in K$, і $g(x,y) = q_j(y)$, якщо $x = x_j$ і $y \in K$. Оскільки $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ для довільних k і j, то означення функції g коректне. Покладемо $f = g|_{X\times Y}$ і покажемо, що f – шукана функція. Оскільки $f_{y_k} = p_k|_X$ і $f^{x_k} = q_k|_Y$ для кожного k, то f – нарізно поліноміальна функція на $X \times Y$. Легко зрозуміти, що функція f не може бути поліноміальною на $X\times Y$ за сукупністю змінних. Нехай це не так. Тоді існує поліном $r(x,y) = \sum\limits_{k,j=0}^{N} a_{k,j}x^k y^j$ на K^2 такий, що $r|_{X\times Y} = f$. Оскільки $r^{x_n}|_Y = f^{x_n} = q_n|_Y$ і $r_{y_n}|_X = f_{y_n} = p_n|_X$, то $r^{x_n} = q_n$ і $q_{y_n} = p_n$ для кожного n. Але зрозуміло, що $\deg r^x \le N$ і $\deg r_y \le N$ для довільних x і y з K. Отже, виходить, що $\deg p_n \le N$ і $\deg q_n \le N$ для кожного n, але це не так, бо вже $\deg p_{N+1} = \deg q_{N+1} = N+1 > N$. Отримана суперечність завершує доведення.

З теорем 3 і 4 отримуємо остаточний результат для функцій двох змінних.

Теорема 5. *Нехай X і Y – підмножини поля K. Для того, щоб кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X\times Y \to K$ була поліноміальною за сукупністю змінних, необхідно і достатньо, щоб хоча б одна з множин X чи Y була скінченною або незліченною.*

7. Нехай $K = \mathbb{K}$ і поле $\mathbb{K}$ наділено своєю природною топологічною структурою, породженою модулем $x \mapsto |x|$. Тому ми можемо говорити про неперервність функцій f: $X\times Y \to \mathbb{K}$, під якою розуміємо, як це прийнято, їх сукупну неперервність. У цьому пункті ми займемося побудовою розривних нарізно поліноміальних функцій дійсних або комплексних змінних.

Теорема 6. *Нехай X і Y – зліченні підмножини поля $\mathbb{K}$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, x_0 – гранична точка множини X, а y_0 – гранична точка множини Y. Тоді існує нарізно полі-*

номіальна функція $f\colon X\times Y\to\mathbb{K}$, яка розривна в точці (x_0,y_0).

Доведення. Множини $X_0 = X\backslash\{x_0\}$ і $Y_0 = Y\backslash\{y_0\}$ можна подати у вигляді $X_0 = \{x_n : n\in\mathbb{N}\}, Y_0 = \{y_n : n\in\mathbb{N}\}$, де $x_n\neq x_m$ і $y_n\neq y_m$ при $n\neq m$, причому $x_{2k}\to x_0$ і $y_{2k}\to y_0$ в $\mathbb{K}$ при $k\to\infty$. Справді, оскільки x_0 і y_0 – граничні точки множин X і Y відповідно, то існують послідовності різних точок $a_n\in X_0$ і $b_n\in Y_0$, такі, що $a_n\to x_0$ і $b_n\to y_0$ в $\mathbb{K}$ при $n\to\infty$. Покладемо $x_{2k} = a_{2k}$ і $y_{2k} = b_{2k}$ при $k\in\mathbb{N}$. Множини $A = X_0\backslash\{x_{2k} : k\in\mathbb{N}\}$ і $B = Y_0\backslash\{y_{2k} : k\in\mathbb{N}\}$ зліченні, як і множина L всіх непарних натуральних чисел. Тому існують біекції $\varphi : L\to A$ і ψ: $L\to B$. Покладаючи $\varphi(2k-1) = x_{2k-1}$ і $\psi(2k-1) = y_{2k-1}$ при $k\in\mathbb{N}$, ми одержимо потрібну нумерацію множин X_0 і Y_0.

Як і в доведенні теореми 4, легко, використовуючи відповідні многочлени Лаґранжа, за індукцією побудувати дві послідовності поліномів p_n і q_n, де $n\in\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, такі, що $p_n(x_m) = q_m(y_n)$ для довільних n і m з $\mathbb{N}_0$, причому $p_n(x_n) = q_n(y_n) = n$ для кожного $n\in\mathbb{N}_0$. Покладемо $f(x,y) = p_n(x_m) = q_m(y_n)$, якщо $x = x_m$ і $y = y_n$. Функція $f : X\times Y\to\mathbb{K}$, очевидно, нарізно поліноміальна, причому $(x_{2k},y_{2k})\to(x_0,y_0)$ і $f(x_{2k},y_{2k}) = 2k\to\infty$ при $k\to\infty$. Таким чином, f розривна в точці (x_0,y_0).

Зауважимо, що побудована в теоремі 6 функція f не може бути поліноміальною за сукупністю змінних, адже такі функції обов'язково неперервні.

8. Тепер ми збираємося побудувати скрізь розривну нарізно поліноміальну функцію $f : \mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}$, де $\mathbb{Q}$ – раціональна пряма. Для цього для кожного номера $k\in\mathbb{N}$ розглянемо множину

$$B_k = \{\frac{2m+1}{2^k} : m\in\mathbb{Z}, |m|\leq k\cdot 2^k\}.$$

Зрозуміло, що $B_k\cap B_j = \varnothing$ при $k\neq j$, множини B_k скінченні і $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} B_k$ – це множина всіх двійково-раціональних чисел $\frac{2m+1}{2^k}$.

Лема 6. Нехай $I = (a,b)$ – довільний непорожній скінченний інтервал на числовій прямій $\mathbb{R}$. Тоді існує такий номер k_0, що $I\bigcap B_k\neq\varnothing$ для кожного $k\geq k_0$.

Доведення. Покладемо $l = b-a$ і $c = \frac{1}{2}\max\{|a-1|, |b|\}$. Візьмемо номер k_0 настільки великим, щоб $\dfrac{1}{2^{k_0-1}} < l$ і $k_0\geq c$. Нехай $k\geq k_0$. Тоді $\dfrac{1}{2^{k-1}} < l$ і існує таке ціле число m, що $\dfrac{2m-1}{2^k}\leq a < \dfrac{2m+1}{2^k}$. В такому разі

$$\frac{2m+1}{2^k} = \frac{2m-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < a+l = b,$$

отже, $\dfrac{2m+1}{2^k}\in I$.

Далі, з нерівності $a < \frac{2m+1}{2^k} < b$ випливає, що

$$(a-1)2^k < a\cdot 2^k - 1 < 2m < b\cdot 2^k - 1 < b\cdot 2^k.$$

Тому $|m| < c\cdot 2^k\leq k_0\cdot 2^k\leq k\cdot 2^k$, отже, $\dfrac{2m+1}{2^k}\in B_k$. Таким чином, $\dfrac{2m+1}{2^k}\in I\cap B_k$, отже, $I\cap B_k\neq\emptyset$.

Теорема 7. *Існує нарізно поліноміальна функція $f\colon \mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}$, яка не є локально обмеженою в жодній точці з $\mathbb{R}^2$, а значить, є скрізь розривною на $\mathbb{Q}^2$.*

Доведення. Легко побудувати біекцію $n\mapsto r_n$: $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ і послідовність номерів $1 = n_1 < n_2 < n_2 < \cdots < n_j < n_{j+1} < \ldots$, такі, що $B_k = \{r_{n_{2k}}, r_{n_{2k}+1},\ldots, r_{n_{2k+1}-1}\}$ для кожного $k\in\mathbb{N}$. Як і раніше, використовуючи многочлени Лаґранжа, індуктивно можна визначити послідовність поліномів p_n: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для якої $p_n(r_m) = p_m(r_n)$ для довільних m і n і $p_m(r_n) = k$, якщо $n_{2k}\leq m$, $n < n_{2k+1}$. Покладемо $f(x,y) = p_n(r_m) = p_m(r_n)$, якщо $x = r_m$ і $y = r_n$. Зрозуміло, що f – це нарізно поліноміальна функція на $\mathbb{Q}^2$. З конструкції поліномів Лаґранжа випливає, що $p_n(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$ для кожного n, отже, функція f набуває лише раціональних значень.

Розглянемо довільну точку $z_0 = (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ і покажемо, що функція f не є локально обмеженою в точці z_0. Нехай $\varepsilon > 0$, $I = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ і $J = (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$. За лемою 6 існує такий номер k_0, що $I\cap B_k\neq\emptyset$ і $J\cap B_k\neq\emptyset$ для всіх $k\geq k_0$. Тоді для кожного $k\geq k_0$ існує точка $z_k\in B_k^2\cap(I\times J)$. Оскільки за побудовою $f(z_k) = k$, адже $z_k \in B_k^2$, то функція f необмежена на околі $I \times J$ точки z_0, що і доводить теорему.

Зрозуміло, що для побудованої в теоремі 7 функції і довільної відкритої непорожньої множини W в $\mathbb{R}^2$ звуження $f|_{W \cap \mathbb{Q}^2}$ не є поліноміальною функцією за сукупністю змінних.

9. Цікаво зауважити, що лема 4 не переноситься на функції двох змінних. Справді, візьмемо, наприклад, $K = \mathbb{R}$ і розглянемо два поліноми $f_1(x, y) = x$ і $f_2(x, y) = y$. Множина $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ нескінченна, $f_1|_E = f_2|_E$, але $f_1 \neq f_2$.

Втім, якщо X і Y – нескінченні підмножини поля K і f: $X \times Y \to K$ – поліноміальна функція, то існує єдиний поліном p: $K^2 \to K$, такий, що $f = p|_{X \times Y}$. Справді, нехай p і q – такі поліноми на K^2, що $p|_{X\times Y} = q|_{X\times Y} = f$. Тоді для кожного $y \in Y$ маємо $p_y|_X = q_y|_X$. З леми 3 випливає, що $p_y = q_y$ для кожного $y \in Y$, отже, для кожного $x \in K$ маємо рівність $p^x|_Y = q^x|_Y$. Застосувавши знову лему 3, отримуємо, що $p^x = q^x$ для кожного $x \in K$, отже, $p = q$.

Звідси легко вивести, так само, як в доведенні леми 4, що коли дві поліноміальні функції f_i: $Z \to K$ $(i = 1, 2)$, що визначені на множині $Z \subseteq K^2$, набувають однакових значень на деякій множині $E = A \times B$, де A і B – нескінченні множини, то $f_1 = f_2$.

10. Перейдемо до розгляду нарізно поліноміальних функцій багатьох змінних.

Нехай X_1, ..., X_n – довільні множини і $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in X_i$ при $i = 1, \ldots, n\}$ – їх декартів добуток. Для довільного індекса $i = 1, \ldots, n$ покладемо $\hat{X}_i = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Так само для точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ покладемо $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Для будь-якої функції $y = f(x_1, \ldots, x_n)$: $X \to Y$ і будь-якої групи з m різних змінних x_{i_1}, ..., x_{i_m}, де $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$, символом $f_{x_{i_1} \ldots x_{i_m}}$ позначається функція від решти $l = n - m$ змінних, яка одержується з функції f, коли x_{i_1}, ..., x_{i_m} фіксуються. Зокрема, $f_{\hat{x}_i}$ – це функція $f_{\hat{x}_i}$: $X_i \to Y$, яка задається формулою

$$f_{\hat{x}_i}(x_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

для кожного $\hat{x}_i \in \hat{X}_i$ і довільного $i = 1, \ldots, n$.

Нехай тепер X_1, ..., X_n – підмножини основного поля K і $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Функція f: $X \to K$ називається *нарізно поліноміальною*, якщо для кожного $i = 1, \ldots, n$ і довільного $\hat{x}_i \in \hat{X}_i$ функція $f_{\hat{x}_i}$: $X_i \to K$ є поліноміальною, як функція однієї змінної.

Набір $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ звичайно називають *мультиіндексом*, а число $|k| = k_1 + \cdots + k_n$ – його *висотою*. Для мультиіндекса $k = (k_1, \ldots, k_n)$ і набору $x = (x_1, \ldots, x_n)$ елементів x_1, ..., x_n з K покладемо $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$. *Поліномом* або *многочленом* на K^n називають функцію p: $K^n \to K$, яка задається формулою

$$p(x) = p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k x^k$$

для довільного $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, де всі коефіцієнти a_k належать до поля K. Якщо при цьому $a_k \neq 0$ хоча б для одного мультиіндекса k з висотою k з висотою $|k| = m$, то число m називається *степенем* многочлена p і позначається, як і раніше, символом $\deg p$.

Нехай $E \subseteq K^n$. Функція f: $E \to K$ називається *поліноміальною*, якщо існує такий поліном p: $K^n \to K$, що $f = p|_E$. Як і у випадку $n = 2$, такі функції називаються ще *сукупно поліноміальними* або *поліноміальними за сукупністю змінних*.

Теорема 8. *Нехай X_1, ..., X_n – нескінченні підмножини поля K, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ і f: $X \to K$ – поліноміальна функція. Тоді існує єдиний поліном ρ: $K^n \to K$, такий, що $f = p|_X$.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ наше твердження збігається з лемою 3. Нехай $n > 1$ і твердження теореми виконується, коли кількість множин дорівнює $n - 1$. Доведемо, що воно має місце і коли кількість множин дорівнює n, як у формулюванні теореми.

Припустимо, що p і q – такі поліноми на K^n, що $p|_X = f = q|_X$, і доведемо, що $p = q$. Для довільного фіксованого набору $\hat{x}_1 = (x_2, \dots, x_n) \in \hat{X}_1$ розглянемо поліноми $p_{\hat{x}_1}$ і $q_{\hat{x}_1}$ на K. Оскільки $p_{\hat{x}_1}|_{X_1} = q_{\hat{x}_1}|_{X_1}$, то $p_{\hat{x}_1} = q_{\hat{x}_1}$ за лемою 3. Зафіксуємо тепер довільне $x_1 \in X_1$. Для поліномів p_{x_1} і q_{x_1} на K^{n-1} будемо мати $p_{x_1}|_{\hat{X}_1} = q_{x_1}|_{\hat{X}_1}$. Тому за індуктивним припущенням $p_{x_1} = q_{x_1}$. Таким чином, $p(x) = q(x)$ для кожного $x \in K^n$, отже, $p = q$.

Як і раніше, з теореми 8 легко виводиться

Наслідок. Нехай $E \subseteq K^n$, $A = A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq E$, множини $A_1, \dots, A_n$ нескінченні і $f_i \colon E \to K$ при $i = 1, 2$ – дві поліноміальні функції, для яких $f_1|_A = f_2|_A$. Тоді $f_1 = f_2$.

11. Перенесемо тепер на функції від n змінних теорему 5.

Теорема 9. *Нехай $X_1, \dots, X_{n-1}$ – незліченні підмножини поля K, X_n – нескінченна підмножина K, і $f \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to K$ – нарізно поліноміальна функція. Тоді f є поліноміальною за сукупністю змінних.*

Доведення. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що $n > 1$, і будемо вважати, що твердження теореми вірне, коли кількість множин дорівнює $n - 1$. Доведемо, що воно вірне і, коли кількість множин дорівнює n, як у формулюванні теореми.

Для кожного $x_1 \in X_1$ розглянемо функцію $f_{x_1} \colon \hat{X}_1 \to K$. Ясно, що f_{x_1} – це нарізно поліноміальна функція від $n - 1$ змінних. За індуктивним припущенням вона буде поліноміальною функцією за сукупністю змінних. За теоремою 8 існує єдиний поліном $q_{x_1} \colon K^{n-1} \to K$, такий, що $f_{x_1} = q_{x_1}|_{\hat{X}_1}$.

Розглянемо множини

$$A_m = \{x_1 \in X_1 : \deg q_{x_1} \le m\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X_1$. Оскільки множина X_1 незліченна, то існує такий номер m, що множина $A = A_m$ теж незліченна.

Зафіксуємо точку $\hat{x}_n = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \tilde{A} = A \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$. Функція $f_{\hat{x}_n} \colon X_n \to K$ є поліноміальною, причому породжується поліномом $r = (q_{x_1})_{x_2 \dots x_{n-1}}$, адже

$$f_{\hat{x}_n}(x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) =$$
$$= f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = q_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = r(x_n)$$

для кожного $x_n \in X_n$. Оскільки $\deg r \le \deg q_{x_1} \le m$, адже $x_1 \in A$, то

$$f_{\hat{x}_n}(x_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k(\hat{x}_n) x_n^k$$

для деяких функцій $a_k \colon \tilde{A} \to K$ і кожного $x_n \in X_n$. Оскільки множина X_n нескінченна, то в ній можна вибрати $m + 1$ різних точок $x_{n,0}, \dots, x_{n,m}$. Згідно з лемою 2 існують такі елементи $\lambda_{k,j}$ з K, які залежать лише від $x_{n,0}, \dots, x_{n,m}$, що

$$a_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_{k,j} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n,j})$$

для кожного $k = 0, 1, \dots, m$. Звідси випливає, що $a_k \colon \tilde{A} \to K$ є нарізно поліноміальною функцією від $n - 1$ змінних для кожного $k = 0, 1, \dots, m$. При цьому множини A, $X_2, \dots, X_{n-2}$ незліченні, а множина X_{n-1} нескінченна, бо вона незліченна. Тому за індуктивним припущенням всі коефіцієнти a_k є сукупно поліноміальними функціями, тобто існують такі поліноми $p_k \colon K^{n-1} \to K$, що $a_k = p_k|_{\tilde{A}}$ для кожного $k = 0, 1, \dots, m$.

Розглянемо на K^n функцію

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^k,$$

яка, очевидно, є поліномам від n змінних.

За побудовою $f|_{A \times X_2 \times \cdots \times X_n} = p|_{A \times X_2 \times \cdots \times X_n}$. Тому для фіксованого $\hat{x}_1 = (x_2, \dots, x_n) \in \hat{X}_1$ матимемо $f_{\hat{x}_1}|_A = p_{\hat{x}_1}|_A$. Оскільки $f_{\hat{x}_1}$ і $p_{\hat{x}_1}$ – це поліноміальні функції від однієї змінної, а множина A нескінченна, то за лемою 4 матимемо, що $f_{\hat{x}_1} = p_{\hat{x}_1}|_{X_1}$. Таким чином, $f(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n)$ на $X_1 \times \cdots \times X_n$, тобто $f = p|_{X_1 \times \cdots \times X_n}$, отже, f – сукупно поліноміальна функція.

Зауважимо, що при цьому ми фактично ще раз довели теорему 2.

З теореми 9 негайно випливає такий наслідок.

Теорема 10. *Якщо поле K незліченне, то кожна нарізно поліноміальна функція f: $K^n \to K$ є поліномом на K^n.*

Остаточний результат виглядає так:

Теорема 11. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – підмножини поля K. Для того щоб кожна нарізно поліноміальна функція f: $X_1 \times \cdots \times X_n \to K$ була поліноміальною, необхідно і достатньо, щоб сред множин $X_1, \ldots, X_n$ була щонайбільше одна зліченна множина.*

Доведення. Достатність. Міркуючи за індукцією, здійснимо індуктивний перехід від $n-1$ до n для $n > 1$.

Припустимо, що серед множин $X_1, \ldots, X_n$ є хоча б одна скінченна. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що саме X_n – скінченна множина, тобто $X_n = \{x_{n,1}, \ldots, x_{n,m}\}$, де $x_{n,k} \neq x_{n,j}$ при $k \neq j$. За індуктивним припущенням для кожного $k = 1, \ldots, m$ існує такий поліном p_k: $K^{n-1} \to K$, що $f_{x_{n,k}} = p_k|_{\hat{X}_n}$ при $k = 1, \ldots, m$. Для кожного $\hat{x}_n \in \hat{X}_n$ побудуємо інтерполяційний многочлен Лаґранжа q: $K \to K$ з вузлами $(x_{n,1}, p_1(\hat{x}_n)), \ldots, (x_{n,m}, p_m(\hat{x}_n))$, який записується у вигляді

$$q(x_n) = \sum_{k=1}^{m} p_k(\hat{x}_n)\varphi_k(x_n),$$

де φ_k – відповідні многочлени. Тоді функція

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x_1, \ldots, x_{n-1})\varphi_k(x_n)$$

є многочленом на K^n, причому $p|_{X_1 \times \cdots \times X_n} = f$.

Нехай всі множини X_k нескінченні. Оскільки серед них щонайбільше одна зліченна, то принаймні $n-1$ множин з них незліченні. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $X_1, \ldots, X_{n-1}$ – незліченні множини, а X_n – зліченна або незліченна множина. У цьому випадку твердження теореми негайно випливає з теореми 9.

Необхідність. Припустимо, що серед наших множин є принаймні дві зліченні множини, скажімо, X_k та X_j, де $k \neq j$. За теоремою 4 існує нарізно поліноміальна функція g: $X_k \times X_j \to K$, яка не є поліноміальною за сукупністю змінних. Покладемо

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_k, x_j)$$

для довільного набору $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. Зрозуміло, що f є нарізно поліноміальною функцією на $X_1 \times \cdots \times X_n$., адже вона стала відносно змінних x_i при $i \neq k, j$ і поліноміальна відносно змінних x_k та x_j. При цьому f не може бути поліноміальною за сукупністю змінних, бо g не є такою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hartogs F.* Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Varänderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten // Math. Ann. – 1906. – **62**. – S. 1 - 88.
2. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч.II. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
3. *Shiffman B.* Separate analyticity and Hartogs theorem // Indiana Univ. Math. J. – 1989. – **38**. – P. 943 - 957.
4. *Osgood W.F.* Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen // Math. Ann. – 1899. – **52**. – S. 462 - 464.
5. *Osgood W.F.* Zweite Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen // Math. Ann. – 1900. – **53**. – S. 461 - 464.
6. *Березин Ф.А., Гвишиани А.Д., Горин Е.А., Кириллов А.А.* Сборник задач по функциональному анализу. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 100 с.
7. *Косован В.* Про нарізно поліноміальні функції // Мат. студ. наук. конф. ЧНУ (11 – 12 травня 2005 р.). Фіз.-мат. науки. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 67 - 68.
8. *Косован В.* Скрізь розривні нарізно поліноміальні функції на раціональній площині // Мат. студ. наук. конф. ЧНУ (10 – 11 травня 2006 р.). Фіз.-мат. науки. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 408 - 409.
9. *Косован В.* Нарізно поліноміальні функції та їх узагальнення // Мат. студ. наук. конф. ЧНУ (10 – 11 травня 2007 р.). Фіз.-мат. науки. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 401 - 402.
10. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
11. *Чарін В.С.* Лінійна алгебра. – К.: Техніка, 2004. – 416 с.