УДК 517.925

©2008 р. О.О. Козьма

Одеський державний економічний університет, м.Одеса

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Встановлено асимптотичні зображення для розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у праввій частині суму доданків із нелінійностями більш загального виду, ніж нелінійності типу Емдена-Фаулера.

We find asymptotic representations for solutions of second-order differential equations that have righthand sides containing nonlinearities of a more general form than the Emden-Fovler type nonlinearities.

1. Формулювання основних результатів.

Розглядається диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \qquad (1.1)$$

де $\alpha_i \in \{-1,1\}$,$(i = 1,...,m)$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(i = 1,...,m)$, $(-\infty < a < \omega \leq +\infty$[1]$)$ — неперервно-диференційовні функції, $r_i : [a,\omega[\to \mathbb{R}$ $(i = 1,...,m)$ — неперервні функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t) = 0(i = 1,...,m) \qquad (1.2)$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \to]0,+\infty[$ $(k = 0,1;\ i = 1,...,m)$— двічі неперервно-диференційовні функції,

$$\Delta_k = \left\{ \begin{array}{l} \text{або } [y_k^0, Y_k[, \\ \text{або }]Y_k, y_k^0], \end{array} \right. \quad y_k^0 \in \mathbb{R}, \qquad (1.3.1)$$

$$Y_k = \left\{ \begin{array}{l} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{array} \right. \quad y_k^0 \in \mathbb{R},\ k = 0,1^2, \qquad (1.3.2)$$

причому φ_{ik} такі, що при кожному $k \in \{0,1\}$

$$\lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0,\ 0 \leq \varphi_{ik}^0 \leq +\infty,\ i = 1,...,m \qquad (1.4)$$

і якщо $\varphi_{ik}(z)$ не є сталою на проміжку Δ_k, то

$$\varphi'_{ik}(z) \neq 0 \text{ при } z \in \Delta_k,$$

$$\lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \text{const}, \qquad (1.5.1)$$

$$\limsup_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_{Y_k}}} \left| \frac{z\varphi''_{ik}(z)}{\varphi'_{ik}(z)} \right| < +\infty. \qquad (1.5.2)$$

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{array} \right.$$

Означення 1.1. Розв'язок y рівняння (1.1), який визначено на проміжку $[t_0,\omega) \subset [a,\omega)$ будемо називати $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \mu_0 \leq +\infty$, якщо він задовольняє наступні умови:

$$y^{(k)} :\ [t_0,\omega) \to \Delta_k,\ \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = Y_k\ (k = 0,1) \qquad (1.6)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} \qquad (1.7.1)$$

і при

$$\mu_0 = \pm\infty\ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1. \qquad (1.7.2)$$

Означення 1.2. Будемо казати, що функція φ_{ik} $(i \in \{1,...,m\},\ k \in \{0,1\})$ має властивість L_k, якщо для довільної двічі неперервно диференційовної і повільно мінливої

[1] При $\omega = +\infty$ вважаємо, що $a > 0$.

[2] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$.

функції $L(t) : [a, \omega) \to \Delta_k$ виконується при $t \uparrow \omega$ рівність

$$\psi_{ik}\left(|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}L(t)\right) =$$

$$= \psi_{ik}\left(|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}\mathrm{sign}L(t)\right)[1+o(1)],$$

де $\psi_{ik}(y) = \varphi_{ik}(y)|y|^{-\sigma_{ik}}$.

Поділимо множину $M = \{1, 2, ..., m\}$ на чотири підмножини :

$$M_1 = \{i \in M : \ \varphi^0_{ik} = \mathrm{const} \neq 0, \ k = 0, 1\};$$

$$M_2 = \{i \in M \setminus M_1 : \ \varphi^0_{i1} = \mathrm{const} \neq 0\};$$

$$M_3 = \{i \in M \setminus M_1 : \ \varphi^0_{i0} = \mathrm{const} \neq 0\};$$

$$M_4 =\in M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3).$$

В [4] розглядалися ті $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-розв'язки, на яких права частина рівняння (1.1) асимптотично еквівалентна при $t \uparrow \omega$ i-му доданку, де $i \in M_1$ (якщо $M_1 \neq \emptyset$). Метою цієї роботи є отримання аналогічних результатів у випадку, коли $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0, 1\}$, $M_{2+k} \neq \emptyset$) і $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$.

Введемо допоміжні позначення

$$I_{i1}(t) = \int\limits_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\,ds,$$

$$I_{i2} = \int\limits_{A_{i2}}^{t} \pi_\omega(s)p_i(s)\,ds,$$

де

$$A_{i1} = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p_i(s)\,ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A_{i2} = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega \pi_\omega(s)p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega \pi_\omega(s)p_i(s)\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Окрім того, при $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0, 1\}$) введемо функцію

$$\Phi_{ik}(s) = \int\limits_{B_{ik}}^{s} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)},$$

де

$$B_{ik} = \begin{cases} y^0_k, & \text{якщо } \left|\int_{y^0_k}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}\right| = +\infty, \\ Y_k, & \text{якщо } \left|\int_{y^0_k}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}\right| < +\infty, \end{cases}$$

Для цієї функції існує обернена функція Φ^{-1}_{ik}, визначена при $B_{ik} = y^0_k$ на нескінченному проміжку

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} [0; +\infty), & \text{якщо } (1-\sigma_{ik})y^0_k < 0, \\ (-\infty; 0], & \text{якщо } (1-\sigma_{ik})y^0_k > 0, \end{cases} \tag{1.8.1}$$

і при $B_{ik} = Y_k$ на скінченному проміжку

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} [b_{ik}; 0), & \text{якщо } (1-\sigma_{ik})y^0_k < 0, \\ (0; b_{ik}], & \text{якщо } (1-\sigma_{ik})y^0_k > 0, \end{cases} \tag{1.8.2}$$

де $b_{ik} = \int_{Y_k}^{y^0_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}$, причому

$$\lim_{y^{(k)} \to Y_k} \Phi_{ik}(y^{(k)}) = \infty, \ \lim_{z \to \infty} \Phi^{-1}_{ik}(z) = Y_k \tag{1.9.1}$$

при $B_{ik} = y^0_k$,

$$\lim_{y^{(k)} \to Y_k} \Phi_{ik}(y^{(k)}) = 0, \ \lim_{z \to 0} \Phi^{-1}_{ik}(z) = Y_k \tag{1.9.2}$$

при $B_{ik} = Y_k$.

Використовуючи правило Лопіталя, з (1.5.1) отримаємо при $\sigma_{ik} < 1$ співвідношення

$$\lim_{\substack{s \to Y_k \\ s \in \Delta_k}} \frac{\Phi_{ik}(s)}{\frac{s}{\varphi_{ik}(s)}} = \frac{1}{1-\sigma_{ik}} \ (k = 0, 1). \tag{1.10}$$

Кажемо, що при фіксованому $\mu_0 \in \mathbb{R}$ виконується умова S_{ik} ($i \in \{1, ..., m\}$, $k \in \{0; 1\}$), якщо $M_{2+k} \neq \emptyset$, $i \in M_{2+k}$ і

$$\limsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)}\right] < \xi^0_{ij}$$

при $j \in M \setminus \{i\}$, де

$$\xi^0_{ij}\mathrm{sign}\pi_\omega(t) =$$

$$= \begin{cases} (1-k+\mu_0)\sigma_{ik}, & j \in M_1, \\ (1-k+\mu_0)(\sigma_{ik}-\sigma_{jk}), & j \in M_{2+k}, j \neq i, \\ (1-k+\mu_0)\sigma_{ik}- \\ -(k+\mu_0)\sigma_{j1-k}, & j \in M_{3-k}, \\ (1-k+\mu_0)(\sigma_{ik}- \\ -\sigma_{jk})-(k+\mu_0)\sigma_{j1-k}, & j \in M_4, \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Нехай $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ і для деякого $i \in M_2$ справджується умова S_{i0}, причому $\sigma_{i0} \neq 1$. Тоді для існування у рівняння (1.1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-розв'язків необхідно, а якщо виконується одна з наступних двох умов:*

$$\mu_0 \neq -\frac{1}{2}; \ \mu_0 = -\frac{1}{2} \text{ і } \sigma_{i0} < 1 \qquad (1.11)$$

то й достатньо, щоб

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}} = +\infty, \\ 0, & \text{якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}} = 0, \end{cases} \qquad (1.12.1)$$

$$Y_1 = \begin{cases} \infty, & \text{при } \mu_0\pi_\omega(t) > 0, \\ 0, & \text{при } \mu_0\pi_\omega(t) < 0, \end{cases} \qquad (1.12.2)$$

справджувались нерівності

$$\alpha_i\mu_0(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)y_0^0 > 0, \ t \in (a,\omega) \quad (1.13.1)$$

$$(1+\mu_0)\pi_\omega(t)y_0^0 y_1^0 > 0 \qquad (1.13.2)$$

і мале місце граничне співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)} = (1+\mu_0)(1-\sigma_{i0}). \quad (1.14)$$

Окрім того, кожний з цих розв'язків допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i(1-\sigma_{i0})}{\mu_0}\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1+o(1)], \qquad (1.15.1)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \qquad (1.15.2)$$

Теорема 1.2. *Нехай $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ і для деякого $i \in M_3$ справджується умова S_{i1}, причому $\sigma_{i1} \neq 1$. Тоді для існування у рівняння (1.1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-розв'язків необхідно і достатньо, щоб*

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_{i1}(t)|^{1-\sigma_{i1}} = +\infty, \\ 0, & \text{якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i1}} = 0, \end{cases} \qquad (1.16.1)$$

$$Y_0 = \begin{cases} \infty, & \text{при } \mu_0\pi_\omega(t) > 0, \\ 0, & \text{при } \mu_0\pi_\omega(t) < 0, \end{cases} \qquad (1.16.2)$$

виконувались нерівності

$$\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i1}(t)y_1^0 > 0, \ t \in (a,\omega) \quad (1.17.1)$$

$$(1+\mu_0)\pi_\omega(t)y_0^0 y_1^0 > 0 \qquad (1.17.2)$$

і мало місце граничне співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = (1+\mu_0)(1-\sigma_{i1}). \quad (1.18)$$

Окрім того, кожний з цих розв'язків допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1-\sigma_{i1})\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t)[1+o(1)], \qquad (1.19.1)$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{\pi_\omega(t)}{1+\mu_0}[1+o(1)]. \qquad (1.19.2)$$

Теорема 1.3. *Нехай виконуються умови теореми 1.1 і, окрім того, функція φ_{i0} має властивість L_0. Тоді кожен $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1) при $t \uparrow \omega$ може бути зображений у вигляді*

$$y(t) = \left| \frac{1-\sigma_{i0}}{\mu_0} \varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)\psi_{i0}\left(|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}\nu_0\right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}}} \times$$
$$\times \nu_0[1+o(1)], \qquad (1.20.1)$$

$$y'(t) = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)} \times$$
$$\times \left| \frac{1-\sigma_{i0}}{\mu_0} \varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)\psi_{i0}\left(|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}\nu_0\right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}}} \times$$
$$\times \nu_0[1+o(1)], \qquad (1.20.2)$$

де $\nu_0 = \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_i(1-\sigma_{i0})}{\mu_0} I_{i2}(t)\right)$.

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови теореми 1.2 і, окрім того, функція φ_{i1} має властивість L_1. Тоді кожен $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1) при $t\uparrow\omega$ може бути зображений у вигляді*

$$y'(t)=\left|1-\sigma_{i1}\varphi^0_{i0}I_{i1}(t)\psi_{i1}\left(|\pi_\omega(t)|^{\mu_0}\nu_1\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\times \times\nu_1[1+o(1)], \qquad (1.20.1)$$

$$y(t)=\frac{\pi_\omega(t)}{1+\mu_0}\times \times\left|1-\sigma_{i1}\varphi^0_{i0}I_{i1}(t)\psi_{i1}\left(|\pi_\omega(t)|^{\mu_0}\nu_1\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\times \times\nu_1[1+o(1)], \qquad (1.20.2)$$

де $\nu_1=\operatorname{sign}\left(\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i1}(t)\right).$

2. Допоміжні твердження.

Лема 2.1. *Нехай $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ — $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1). Тоді мають місце граничні співвідношення*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=1+\mu_0 \text{ при } |\mu_0|<+\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\pm\infty \text{ при } \mu_0=\pm\infty.$$

Доведення цього твердження при різних значеннях Y_0 і μ_0 міститься у [2,3].

Лема 2.1. *Нехай $|\mu_0|<+\infty$ і виконується умова S_{ik}, $k\in\{0,1\}$, $i\in\{1,...,m\}$. Тоді для кожного $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язка рівняння (1.1)*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=0 \text{ при } j\in M\backslash\{i\}. \qquad (2.1)$$

Доведення. Нехай $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ — довільний $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1). При $k\in\{0;1\}$ введемо функції

$$z_{j1}(t)=\frac{p_j(t)}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \text{ якщо } j\in M_1$$

$$z_{j2+k}(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))},$$

якщо $j\in M_{2+k},\ i\neq j$

$$z_{j3-k}(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))},$$

якщо $j\in M_{3-k}$

$$z_{j4}(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \text{ якщо } j\in M_4.$$

Тоді

$$z'_{j1}(t)=\frac{p_j(t)}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{p'_i(t)}{p_i(t)}-\frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right],$$

$$z'_{j2+k}(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{p'_i(t)}{p_i(t)}+\frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}-\frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right],$$

$$z'_{j3-k}(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{p'_i(t)}{p_i(t)}+\frac{y^{(2-k)}(t)\varphi'_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}-\frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right],$$

$$z'_{j4}(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{p'_i(t)}{p_i(t)}+\frac{y''(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}+\frac{y'(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}-\frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right].$$

Запишемо ці співвідношення у вигляді

$$z'_{j1}(t)=\frac{z_{j1}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\cdot\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right],$$

$$z'_{j2+k}(t)=\frac{z_{j2+k}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)}+\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\left(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}-\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right)\right],$$

$$z'_{j3-k}(t)=\frac{z_{j3-k}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)}+\right.$$

$$+\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(2-k)}(t)}{y^{(1-k)}(t)}\cdot\frac{y^{(1-k)}(t)\varphi'_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{\varphi_{j1-k}(y^{(k)}(t))}-$$

$$-\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\Bigg],$$

$$z'_{j4}(t)=\frac{z_{j4}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)}+\right.$$

$$+\frac{|\pi_\omega(t)|y''(t)}{y'(t)}\cdot\frac{y'(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}+$$

$$+\frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{(t)}\cdot\frac{y(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}-$$

$$\left.-\frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}\right],$$

В силу умов (1.6) і (1.5.2)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}=\sigma_{jk} \qquad (2.2)$$

$$k=0,1;\ j=1,...,m.$$

Окрім того, згідно з умовами (1.6), (1.7.1) і лемою 2.1

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}=1-k+\mu_0 \qquad (2.3)$$

$$k=0,1;\ |\mu_0|<+\infty.$$

Тому в силу S_{ik} існують сталі $z_{il}<0$ ($l=\overline{1,4}$) і $t_1\in[t_0;\omega)$ такі, що мають місце нерівності

$$z'_{jl}(t)\le\frac{z^0_{jl}\cdot z_{jl}(t)}{|\pi_\omega(t)|}\ l=\overline{1,4},\ t\in[t_1;\omega).$$

Звідси знаходимо

$$\ln\left|\frac{z_{jl}(t)}{z_{jl}(t_1)}\right|\le z^0_{jl}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|}\ l=\overline{1,4},\ t\in[t_1;\omega).$$

Оскільки вирази, що стоять праворуч прямують до $(-\infty)$ при $t\uparrow\omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}z_{jl}(t)=0\ l=\overline{1,4}.$$

З цих граничних співвідношень, враховуючи означення множин M_l ($l=\overline{1,4}$), випливають (2.1).

2. Доведення основних теорем.

Доведення теореми 1.1. *Необхідність.* Нехай $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ — довільний $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1). Оскільки $\mu_0\ne-1$, то з леми 2.1 випливають (1.12.2), (1.13.2) і (1.15.2). В силу виконання умови S_{i0} з леми 2.2 виходить, що

$$y''(t)=\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi^0_{i1}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega. \qquad (3.1)$$

Враховуючи (1.5.1), (3.1) і умову $\sigma_{i0}\ne1$ з використанням правила Лопіталя (у формі Штольца) знаходимо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)}{I_{i2}(t)\varphi_{i0}(y(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\right)'}{I'_{i2}(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}\left[1-\frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}\right]}{\pi_\omega(t)p_i(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{\alpha_i}{\mu_0}p_i(t)\pi_\omega(t)\varphi^0_{i1}[1-\sigma_{i0}]}{\pi_\omega(t)p_i(t)}=$$

$$=\frac{\alpha_i[1-\sigma_{i0}]\varphi^0_{i1}}{\mu_0}. \qquad (3.2)$$

З цього граничного співвідношення виходять (1.13.1) і (1.15.1). Окрім того, якщо скористатися (1.6), (1.5.1) і (3.2), то отримаємо при $t\uparrow\omega$

$$|y(t)|^{1-\sigma_{i0}}\mathrm{sign}y(t)\sim\frac{\alpha_i}{\mu_0}\varphi^0_{i1}(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t),$$

з чого випливає умова (1.12.1). В силу (3.1) і (3.2) при $t\uparrow\omega$

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}\sim$$

$$\sim\frac{\pi_\omega(t)\frac{\alpha_i}{\mu_0}p_i(t)\pi_\omega(t)\varphi^0_{i1}\varphi_{i0}(y(t))}{\frac{\alpha_i(1-\sigma_{i0})\varphi^0_{i1}}{\mu_0}I_{i2}(t)\varphi_{i0}(y(t))}=$$

$$=\frac{\pi^2_\omega(t)p_i(t)}{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}=\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{(1-\sigma_{i0})I_{i2}(t)}.$$

З урахуванням леми 2.1 з цього виразу виходить справедливість умови (1.14).

Достатність. Нехай справджуються умови (1.11)-(1.14). В силу (1.8.l), (1.9.l), (1.10), (1.12.l), (1.13.l), де l=1,2, і умови $\sigma_{i0} \neq 1$ однозначно визначаються значення Y_k і проміжки Δ_k, Δ_{ik} $(k = 0, 1)$. Встановивши Y_k і Δ_k $(k = 0, 1)$, доведемо існування у рівнянні (1.1) принаймні одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-розв'язка, котрий має при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.15.1), (1.15.2). Для цього застосуємо для рівняння (1.1) перетворення

$$\Phi_{i0}(y(t)) = \frac{\alpha_i}{\mu_0}\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1 + v_1(x)], \qquad (3.31)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)}[1 + v_2(x)], \qquad (3.3.2)$$

де

$$x = \beta \ln |\pi_\omega(t)|,$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = \beta \left[-\dfrac{\pi_\omega(t) I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}[1 + v_1] + \right. \\ \left. + \dfrac{\alpha_i \mu_0 [1 + \mu_0]}{\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)} \cdot \dfrac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t, v_1)\right)}[1 + v_2] \right], \\ v_2' = \beta \left[1 + v_2 - (1 + \mu_0)[1 + v_2]^2 + \right. \\ + \dfrac{\pi_\omega^2(t)}{(1 + \mu_0) Y_i(t, v_1)} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j p_j(t)[1 + r_j(t)] \times \\ \left. \times \varphi_{j0}\left(Y_i(t, v_1)\right) \varphi_{j1}\left(Y_i^{[}[1](t, v_1, v_2)\right)\right], \end{cases} \qquad (3.4)$$

де

$$Y_i(t, v_1) = \Phi_{i0}^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1 + v_1]\right),$$

$$Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) = \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)} Y_i(t, v_1)[1 + v_2],$$

$$t = \begin{cases} e^x & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ \omega - e^{-x} & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Вкажемо деякі властивості функцій Y_i і $Y_i^{[1]}$. В силу (1.12.1), (1.13.1) і умови $\mu_0 \neq 0$ можна вибрати $t_1 \in (a, \omega)$ так, щоб

$$\frac{3}{2}\alpha_i \mu_0 \varphi_{i1}^0 I_{i2}(t) \subset \Delta_{i0} \text{ при } t \in [t_1, \omega).$$

Тоді з урахуванням (1.8.l), де l=1,2, отримаємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_i(t, v_1) = Y_0 \qquad (3.5.1)$$

рівномірно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

$$Y_i(t, v_1) \subset \Delta_0, \qquad (3.5.2)$$

$t \in [t_1, \omega)$, $|v_1| \leq \frac{1}{2}$.

При кожному фіксованому значенні v_1

$$Y_i'(t, c) = \varphi_{i0}\left(Y_i(t, c)\right) \frac{\alpha_i}{\mu_0} \varphi_{i1}^0 [1 + c] \pi_\omega(t) p_i(t).$$

Окрім того, за правилом Лопіталя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t,)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,)\right) I_{i2}(t)} = \frac{\alpha_i}{\mu_0}(1 - \sigma_{i0})[1 + c]\varphi_{i1}^0 \qquad (3.6)$$

або при $t \uparrow \omega$

$$\frac{Y_i(t,)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,)\right)} = \frac{\alpha_i}{\mu_0}(1 - \sigma_{i0})[1 + c]\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1 + o(1)].$$

Тоді з урахуванням виду $Y_i'(t, c)$ отримаємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) Y_i'(t, c)}{Y_i(t, c)} = 1 + \mu_0 \qquad (3.7)$$

або при $t \uparrow \omega$

$$Y_i(t, c) =$$
$$= (1 + \mu_0)|\pi_\omega(t)|^{1 + \mu_0 + o(1)} \operatorname{sign}\left(\pi_\omega(t) Y_i(t, c)\right).$$

З останньої рівності з урахуванням умов (1.12.2), (1.13.2) і монотонності функції Y_i виходить, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) = Y_1 \qquad (3.8)$$

рівномірно по $v_k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ $(k = 1, 2)$. Це граничне співвідношення і (1.13.2), (3.5.2) дають можливість вибрати $t_2 \in [t_1, \omega)$ так, щоб

$$Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_1, \qquad (3.9)$$

$t \in [t_2, \omega)$, $|v_k| \leq \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2)$.

Позначимо $x_0 = \beta \ln |\pi_\omega(t_2)|$ і розглянемо систему (3.4) на множині

$$\Omega = [x_0; +\infty) \times D,$$

$$D = \{(v_1, v_2) : |v_k| \leq \frac{1}{2}, \; k = 1, 2\}.$$

На цій множині функції $\dfrac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}$ і $\dfrac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{Y_i(t,v_1)}$ є неперервні і двічі неперервно диференційовні по змінним v_1 і v_2. Розкладемо ці функції при кожному фіксованому t згідно з формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі $(0;0)\in D$ з метою виділення лінійних частин. З урахуванням цього, перепишемо систему (3.4) у виді

$$\begin{cases} v_1' = \beta[f_1(x)+c_{11}(x)v_1+c_{12}(x)v_2+ \\ +V_1(x,v_1,v_2)], \\ \\ v_2' = \beta[f_2(x)+c_{21}(x)v_1+c_{22}(x)v_2+ \\ +V_2(x,v_1,v_2)], \end{cases} \tag{3.10}$$

де

$$f_1(x) = -\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)} + \frac{\alpha_i\mu_0(1+\mu_0)}{\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)}\times$$

$$\times\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)};\ c_{11}(x) = -\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}+$$

$$= (1+\mu_0)\left[1-\frac{Y_i(t,0)\varphi_{i0}'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}\right];$$

$$c_{12}(x) = \frac{\alpha_i\mu_0(1+\mu_0)}{\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)}\cdot\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)};$$

$$f_2(x) = -\mu_0 + \frac{1}{1+\mu_0}\cdot\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}\times$$

$$\times\frac{I_{i2}(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i(t,0)}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{[1+r_j(t)]}{\alpha_j}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,0)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}\right);$$

$$c_{21}(x) = \frac{\alpha_i\varphi_{i1}^0}{\mu_0(1+\mu_0)}\cdot\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}\times$$

$$\times\left(\frac{I_{i2}(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i(t,0)}\right)^2\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{[1+r_j(t)]}{\alpha_j}\times\right.$$

$$\times\frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,0)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_{j0}'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,0)\right)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{Y_i^{[1]}(t,0,0)\varphi_{j1}'\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}-1\right]\right);$$

$$c_{22}(x) = -1-2\mu_0+\frac{1}{1+\mu_0}\cdot\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}\times$$

$$\times\frac{I_{i2}(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i(t,0)}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{[1+r_j(t)]}{\alpha_j}\times\right.$$

$$\times\frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}\cdot\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)\times$$

$$\left.\times\frac{Y_i^{[1]}(t,0,0)\varphi_{j1}'\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}\right);$$

$$V_1(x,v_1,v_2) =$$

$$= (1+\mu_0)\left[1-\frac{Y_i(t,0)\varphi_{i0}'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)}\right]v_1v_2-$$

$$-\frac{\alpha_i\varphi_{i1}^0(1+\mu_0)}{\mu_0}\cdot\frac{I_{i2}(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{Y_i(t,\theta_1)}\times$$

$$\times\left\{\frac{Y_i(t,\theta_1)\varphi_{i0}'\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}+\right.$$

$$+\frac{Y_i^2(t,\theta_1)\varphi_{i0}''\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}-$$

$$\left.\left[\frac{Y_i(t,\theta_1)\varphi_{i0}'\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}\right]^2\right\}\cdot\frac{v_1^2}{2}(1+v_2),$$

де

$$\theta_1 = \theta_1(t,v_1,v_2).$$

$$V_2(x,v_1,v_2) = \frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{1+\mu_0}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j(t)[1+r_j(t)]}{\alpha_j p_i(t)}\left(\frac{\alpha_i\varphi_{i1}^0}{\mu_0}I_{i2}(t)\right)^2\times$$

$$\times\frac{\varphi_{i0}^2\left(Y_i(t,\theta_1)\right)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{Y_i^3(t,\theta_1)}\times$$

$$\times\left[\frac{Y_i^2(t,\theta_1)\varphi_{j0}''\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}+\right.$$

$$+2\cdot\frac{Y_i(t,\theta_1)\varphi_{j0}'\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}\times$$

$$\times\frac{Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}+$$

$$+\frac{\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)^2\varphi''_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}+$$

$$+\frac{Y_i(t,\theta_1)\varphi'_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}\times$$

$$\times\frac{Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}-$$

$$-\frac{Y_i(t,\theta_1)\varphi'_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}-$$

$$-2\cdot\frac{Y_i(t,\theta_1)\varphi'_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)}-$$

$$\left.-2\cdot\frac{Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}+2\right]\times$$

$$\times\frac{v_1^2}{2}+2\cdot\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{1+\mu_0}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j(t)[1+r_j(t)]}{\alpha_j p_i(t)}\times$$

$$\times\left[\varphi'_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)\frac{\alpha_i\varphi^0_{i1}}{\mu_0}I_{i2}(t)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)^2\varphi''_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}\right]\times$$

$$\times v_1v_2+\left[-1-\mu_0+\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{1+\mu_0}\times\right.$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j(t)[1+r_j(t)]}{\alpha_j p_i(t)}\varphi_{j0}\left(Y_i(t,\theta_1)\right)\times$$

$$\left.\times\frac{\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)^2\varphi''_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}\right]\frac{v_2^2}{2},$$

де $\theta_k=\theta_k(t,v_1,v_2)$, $k=1,2$.

В силу умов (1.3.l), (1.4), (1.5.1), (3.5.l), (3.8), (3.9), де l=1,2, рівномірно по $v_k\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $(k=1,2)$ мають місце наступні границі:

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi'_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1)\right)}=\sigma_{j0}\qquad(3.11.1)$$

$\forall j\in M$,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\varphi'_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_1,v_2)\right)}=\frac{\sigma_{j1}}{1+v_2}\qquad(3.11.2)$$

$\forall j\in M$, причому коли

$$\lim_{\substack{z\to Y_k\\ z\in\Delta_k}}\varphi_{jk}(Y)=\mathrm{const}\neq 0,$$

маємо $\sigma_{jk}=0$, $k=0,1$. Якщо ж врахувати умову (3.7), то функції $Y_i(t,0)$ і $Y_i^{[1]}(t,0,0)$ мають ті властивості, які використовувалися при доведенні леми 2.2. Отже,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_{j0}\left(Y_i(t,0)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}{p_i(t)\varphi_{i0}\left(Y_i(t,0)\right)\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}=0,\qquad(3.12)$$

$j\in M\setminus\{i\}$.

Окрім того, функція Y_i монотонна на проміжку Δ_{i0} (в силу означення) і правильно мінлива в околі ω (в силу умови (3.7)). Тому при $t\uparrow\omega$ відношення $\frac{Y_i(t,\theta_1)}{Y_i(t,0)}$ буде обмеженим, отже існують сталі l_{jk}, L_{jk} $(k=0,1)$ такі, що

$$\begin{gathered}l_{j0}\le\frac{\varphi_{j0}(Y_i(t,\theta_1))}{\varphi_{j0}(Y_i(t,0))}\le L_{j0},\\ l_{j1}\le\frac{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,\theta_1,\theta_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,0,0)\right)}\le L_{j1},\end{gathered}\qquad(3.13)$$

де $j\in M$, $\theta_k\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $(k=1,2)$.

Тепер, приймаючи до уваги умови (3.5.k) (k=1,2)—(3.9), (3.1.k) (k=1,2) — (3.13) і (1.12.k) (k=1,2), а також заміну незалежної змінної, отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty}f_k(x)=0\ (k=1,2),\quad\lim_{x\to+\infty}c_{11}(x)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}c_{12}(x)=(1+\mu_0)(1-\sigma_{i0}),$$

$$\lim_{x\to+\infty}c_{21}(x)=-\mu_0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1-2\mu_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_k(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0 \ (k=1,2).$$

рівномірно по $x \in [x_0;\infty)$.

Отже, система (3.10) є квазілінійною системою диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами. Записавши характеристичне рівняння для граничної матриці коефіцієнтів лінійної частини цієї системи у вигляді

$$\begin{vmatrix} -\beta\lambda & -\beta(1+\mu_0)(1-\sigma_{i0}) \\ -\beta\mu_0 & -\beta(1+2\mu_0)-\beta\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

отримаємо

$$\lambda^2 + (1+2\mu_0)\lambda + \mu_0(1+\mu_0)(1-\sigma_{i0}) = 0.$$

Внаслідок (1.11) це рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною. Таким чином, для системи диференціальних рівнянь (3.10) виконано всі умови теореми 2.1 роботи [1]. На підставі цієї теореми система (3.10) має хоча б один розв'язок $(v_k)_{k=1}^2 : [x_1,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, де $x_1 \geq x_0$, який прямує до нуля при $x \to +\infty$. Йому, з урахуванням перетворення (3.3.k) (k=1,2) відповідає розв'язок $y : [t_3;\omega) \to \Delta_0$, який допускає асимптотичні зображення

$$\Phi_{i0}(y(t)) = \frac{\alpha_i}{\mu_0}\varphi_{i1}^0 I_{i2}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)].$$

Звідси та внаслідок граничного співвідношення (1.10) дістаємо справедливість асимптотичних зображень (1.15.k) (k=1,2). Теорему доведено.

Доведення теореми 1.2. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0,\omega) \to \Delta_0$ — довільний $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1). Оскільки $\mu_0 \neq -1$, то з леми 2.1 випливають (1.16.2), (1.17.2) і (1.19.2). Внаслідок виконання умови S_{i1} з леми 2.2 виходить, що при $t \uparrow \omega$

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}^0\varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)]. \quad (3.15)$$

Згідно з правилом Лопіталя у формі Штольца, з урахуванням (1.5.1) і умови $\sigma_{i1} \neq 1$ отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{I_{i1}(t)\varphi_{i1}(y'(t))} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y''(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1-\frac{y'(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right]}{p_i(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}^0[1-\sigma_{i1}]}{p_i(t)} = \alpha_i[1-\sigma_{i1}]\varphi_{i0}^0, \quad (3.16)$$

або при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i[1-\sigma_{i1}]\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t)[1+o(1)]. \quad (3.16)$$

З останнього співвідношення випливають (1.17.1) і (1.19.1). Окрім того, якщо скористатися (1.6), (1.5.1) і (3.16), отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$|y'(t)|^{1-\sigma_{i1}}\mathrm{sign} y'(t) \sim \alpha_i[1-\sigma_{i1}]\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t),$$

з чого випливає (1.16.1). Оскільки $\mu_0 \neq 0$, з (1.7.1), (3.15) і (3.16) будемо мати при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\alpha_i}{\mu_0} p_i(t)\pi_\omega(t)\varphi_{i0}^0 \sim \alpha_i[1-\sigma_{i1}]\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t),$$

або

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}'(t)} - \mu_0(1-\sigma_{i1}),$$

тобто справджується умова (1.18).

Достатність. Застосуємо до рівняння (1.1) перетворення

$$\Phi_{i1}(y'(t)) = \alpha_i\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t)[1+v_2(x)], \quad (3.31)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+v_1(x)], \quad (3.3.2)$$

де

$$x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|,$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = \beta\,[1+v_1-(1+\mu_0)[1+v_1]^2+ \\ +\dfrac{\pi_\omega(t)[1+v_1]}{Y_i^{[1]}(t,v_2)}\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\times \\ \times\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^[[1](t,v_2)\right)\Big], \\ \\ v_1' = \beta\left[-\dfrac{\pi_\omega(t)I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}[1+v_2]+\right. \\ +\dfrac{\alpha_i\pi_\omega(t)}{\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t)\varphi_{i1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}\times \\ \times\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j p_j(t)[1+r_j(t)]\times \\ \left.\times\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)\right], \end{cases} \tag{3.17}$$

де

$$Y_i^{[1]}(t,v_2) = \Phi_{i1}^{-1}\left(\alpha_i\varphi_{i0}^0 I_{i1}(t)[1+v_2]\right),$$

$$t = \begin{cases} e^x & \text{при} \quad \omega=+\infty, \\ \omega-e^{-x} & \text{при} \quad \omega<+\infty, \end{cases}$$

$$Y_i(t,v_1,v_2) = \frac{\pi_\omega(t)}{(1+\mu_0)[1+v_1]}Y_i(t,v_2).$$

Розкладемо функції

$$\frac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}{Y_i^{[1]}(t,v_2)}$$

і

$$\frac{\varphi_{j0}\left(Y_i(t,v_1,v_2)\right)\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}{\varphi_{j1}\left(Y_i^{[1]}(t,v_2)\right)}$$

при кожному фіксованому t згідно з формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі $(0;0)\in D$ з метою виділення лінійних частин. З урахуванням цього, перепишемо систему (3.17) у виді

$$\begin{cases} v_1' = \beta[f_1(x)+c_{11}(x)v_1+c_{12}(x)v_2+ \\ +V_1(x,v_1,v_2)], \\ \\ v_2' = \beta[f_2(x)+c_{21}(x)v_1+c_{22}(x)v_2+ \\ +V_2(x,v_1,v_2)], \end{cases} \tag{3.18}$$

Внаслідок умов теореми та властивостей функцій Y_i, $Y_i^{[1]}$ мають місце наступні границі

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0 \ (k=1,2),$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = -1-\mu_0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = -\mu_0, \ \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -\mu_0(1-\sigma_{i1}),$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0}\frac{V_k(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0 \ (k=1,2).$$

Записавши характеристичне рівняння для граничної матриці коефцієнтів лінійної частини системи (3.18), отримаємо

$$\lambda^2+(1+\mu_0(2-\sigma_{i1}))\lambda+(1+\mu_0)\mu_0(1-\sigma_{i1}) = 0.$$

У цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною, тому система (3.18) має розв'язок $(v_k)_{k=1}^2 : [x_1,+\infty)\to\mathbb{R}^2$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$. Йому відповідає $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок рівняння (1.1). Теорему доведено.

Доведення теореми 1.3. Нехай виконуються умови теореми 1, тоді у рівняння (1.1) існує $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язок $y(t)$, який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (1.15.1), (1.15.2). Внаслідок означення $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язку функція $L(t) = \frac{y(t)}{|\pi_\omega(t)|}$ є двічі неперервно диференційовною і повільно мінливою при $t\uparrow\omega$.

Тоді, враховуючи наявність у функції φ_{i0} властивості L_0 отримаємо при $t\uparrow\omega$

$$\varphi_{i0}(y(t)) \sim |y(t)|^{\sigma_{i0}}\psi_{i0}\left(|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}\mathrm{sign}y_0^0\right).$$

З цієї рівності і (1.15.1) випливає справедливість (1.20.1). В свою чергу, з (1.20.1) і (1.15.2) отримаємо (1.20.2).

Доведення теореми 1.4 здійснюється за аналогією.

4. Висновки. Ця робота продовжує розпочате в [4] дослідження рівняння (1.1), права частина якого містить доданки з нелінійностями чотирьох різних типів, визначених множинами M_i $(i=\overline{1,4})$. Для цього рівняння був виділений клас $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$-розв'язків і отримані умови при виконанні яких на будь-якому такому розв'язку (якщо він існує) головним у правій частині є i-й доданок, де i належить або M_2 або M_3. Якщо ці умови мають місце і $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0; -1\}$, встановлені необхідні і достатні ознаки існування у рівняння (1.1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-розв'язків. Окрім того, отримані асимптотичні зображення цих розв'язків та їх похідних першого порядку при $t \uparrow \omega$, причому при додаткових обмеженнях на функції φ_{ik} ці зображення надані у явному вигляді.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. - 2003. - **39**, № 4. - С. 433-444.

2. *Евтухов В.М., Касьянова В.А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.I// Укр. Мат. журнал. - 2005. - **57**, №3. - С.338-355.

3. *Касьянова В.А.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика.—2004.—Вип. 228-с.5—19.

4. *Козьма А. А.* Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Нелінійні коливання - 2006, — т. 9 — № 4, – с.490–501.