УДК 517.51

©2008 р. Карлова О.О.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ σ-ДИСКРЕТНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доводиться, що сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера збігається з сукупністю всіх σ-дискретних відображень $f : X \to Y$ першого класу Лебеґа, якщо X – сильно нульвимірний метризовний простір, а Y – метризовний простір.

We prove that the collection of all first Baire class mappings $f : X \to Y$ coincides with the collection of all σ-discrete first Lebesgue class mappings $f : X \to Y$ in the case when X is a strongly zero-dimensional metrizable space and Y is a metrizable space.

1. Вступ. Для топологічних просторів X і Y позначимо через $H_1(X,Y)$ сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Лебеґа*, тобто таких, що для довільної замкненої в Y множини F прообраз $f^{-1}(F)$ подається у вигляді перетину послідовності відкритих множин в X. Сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Бера*, тобто поточкових границь послідовностей неперервних відображень, позначатимемо через $B_1(X,Y)$.

Система $\mathcal{A}$ називається *σ-дискретною*, якщо її можна подати у вигляді зліченного об'єднання дискретних систем.

Система $\mathcal{B}$ підмножин топологічного простору X називається *базою для функції* $f : X \to Y$, якщо для довільної відкритої в Y множини V існує підсистема $\mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{B}$, така, що $f^{-1}(V) = \bigcup \mathcal{B}_V$. Якщо, до того ж, система $\mathcal{B}$ є σ-дискретною, то її називають *σ-дискретною базою для* f, а відображення $f : X \to Y$, яке має σ-дискретну базу, – *σ-дискретним.* Сукупність усіх σ-дискретних відображень ми будемо позначати через $\Sigma(X,Y)$.

Очевидно, що довільне відображення, яке діє в простір з другою аксіомою зліченності, є σ-дискретним. Також легко бачити, що кожне неперервне відображення з метризовною областю визначення чи простором значень є σ-дискретним, адже метризовний простір має σ-дискретну базу.

Згідно з класичною теоремою Лебеґа-Гаусдорфа [1, с. 402], рівність $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$ виконується у випадку, коли X – метризовний простір, а $Y = [0,1]^n$, де $n \le \aleph_o$.

М. Фосґерау [2] узагальнив цей результат, показавши, що для метризовного простору X, лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного метризовного простору Y має місце рівність $H_1(X,Y) \cap \Sigma(X,Y) = B_1(X,Y)$.

Нагадаємо, що дві підмножини A і B топологічного простору X називаються *цілком відокремними*, якщо існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $f(x) = 0$ при $x \in A$ і $f(x) = 1$ при $x \in B$.

Непорожній тихоновський простір X називається *сильно нульвимірним*, якщо для будь-яких двох цілком відокремних підмножин A і B з X існує відкрито-замкнена множина $U \subseteq X$, така, що $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$.

В [3] було встановлено, що рівність $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$ виконується, якщо X – сильно нульвимірний нормальний простір, а Y – сепарабельний метризовний простір.

Природно постало питання про можливість зняття умови сепарабельності на простір Y в останньому результаті, розглядаючи відображення $f \in H_1(X,Y)$, які є σ-дискретними.

У цій статті ми встановлюємо рівність $H_1(X,Y) \cap \Sigma(X,Y) = B_1(X,Y)$ у випадку, коли X – сильно нульвимірний метризовний простір, а Y – метризовний простір.

2. Допоміжні твердження.

Нехай (X,d) – метричний простір. Система $\mathcal{A}$ підмножин простору X називається *рівномірно дискретною*, якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що $d(A,B) > \varepsilon$ для всіх $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$.

Для підмножини A метричного простору (X,d) і числа $\varepsilon > 0$ символом $B(A,\varepsilon)$ ми позначаємо множину $\{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$.

Ми кажемо, що система $\mathcal{A}$ *вписана в систему* $\mathcal{B}$ і позначаємо це $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, якщо для будь-якої множини $A \in \mathcal{A}$ існує множина $B \in \mathcal{B}$, така, що $A \subseteq B$.

Твердження 1. *Нехай (X,ρ) – сильно нульвимірний метричний простір, (Y,d) – метричний простір, $f : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ – системи замкнених непорожніх множин з X, такі, що*

(1) система $\mathcal{F}_k$ рівномірно дискретна для кожного $1 \le k \le n$;

(2) $\mathcal{F}_{k+1} \preceq \mathcal{F}_k$ для кожного $1 \le k < n$;

(3) $\mathrm{diam} f(F) < \frac{1}{2^k}$ для всіх $1 \le k \le n$ і $F \in \mathcal{F}_k$.

Тоді існує неперервне відображення $g : X \to Y$, таке, що $d(f(x), g(x)) < \frac{1}{2^{k-2}}$ для всіх $x \in \cup\mathcal{F}_k$, $1 \le k \le n$.

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_k = \{F_{i,k} : i \in I_k\}$, де $F_{i,k} \neq F_{j,k}$ при $i \neq j$, $1 \le k \le n$. З властивості (1) випливає, що існують такі додатні числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, що

$$\varepsilon_1 > 2\varepsilon_2 > \dots > 2^{n-1}\varepsilon_n$$

і сім'я $(B(F_{i,k}, \varepsilon_k) : i \in I_k)$ дискретна для кожного $1 \le k \le n$.

Для кожного $1 \le k \le n$ та $i \in I_k$ множини $\overline{B(F_{i,k}, \frac{\varepsilon_k}{2})}$ і $X \setminus B(F_{i,k}, \varepsilon_k)$ замкнені і неперетинні, тому існує відкрито-замкнена множина $H_{i,k}$, така, що

$$\overline{B(F_{i,k}, \tfrac{\varepsilon_k}{2})} \subseteq H_{i,k} \subseteq B(F_{i,k}, \varepsilon_k),$$

адже простір X сильно нульвимірний.

Зауважимо, що сім'я $\mathcal{H}_k = (H_{i,k} : i \in I_k)$ дискретна для кожного $1 \le k \le n$. Позначимо $H_k = \bigcup\limits_{i \in I_k} H_{i,k}$, $1 \le k \le n$.

Виберемо точки $y_o \in f(X)$ і $y_{i,k} \in f(F_{i,k})$ для всіх $1 \le k \le n$ та $i \in I_k$.

Нехай $g_o(x) = y_o$ для всіх $x \in X$. Покладемо $g_1(x) = g_o(x)$, якщо $x \notin H_1$, $g_1(x) = y_{i,1}$, якщо $x \in H_{i,1}$ для деякого $i \in I_1$.

Покажемо, що відображення $g_1 : X \to Y$ неперервне. Справді, звуження $g_1|_{H_1}$ неперервне, адже множини $H_{i,1}$ відкрито-замкнені, а сім'я $\mathcal{H}_1$ дискретна. Крім того, звуження $g_1|_{X \setminus H_1}$ також неперервне. Оскільки множина H_1 відкрито-замкнена, то відображення $g_1 : X \to Y$ неперервне.

Припустимо, що для деякого k, $1 \le k < n$, вже визначені неперервні відображення $g_m : X \to Y$, $1 \le m \le k$, такі, що $g_m(x) = g_{m-1}(x)$, якщо $x \notin H_m$, $g_m(x) = y_{i,m}$, якщо $x \in H_{i,m}$ для деякого $i \in I_m$.

Нехай $g_{k+1}(x) = g_k(x)$, якщо $x \notin H_{k+1}$, $g_{k+1}(x) = y_{i,k+1}$, якщо $x \in H_{i,k+1}$ для деякого $i \in I_{k+1}$.

Легко бачити, що відображення $g_{k+1} : X \to Y$ неперервне.

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо неперервні відображення $g_1, \dots, g_n$ з відповідними властивостями.

Доведемо, що

$$d(g_{k+1}(x), g_k(x)) < \frac{1}{2^k} \qquad (*)$$

для всіх $0 \le k < n$ і $x \in X$.

Зафіксуємо $x \in X$ і $0 \le k < n$. Якщо $x \notin H_{i,k+1}$, то $g_{k+1}(x) = g_k(x)$ і $d(g_{k+1}(x), g_k(x)) = 0$. Якщо ж існує таке $i \in I_{k+1}$, що $x \in H_{i,k+1}$, то $x \in B(F_{i,k+1}, \varepsilon_{k+1})$. З властивості (2) і дискретності сім'ї $\mathcal{F}_k$ випливає, що існує єдине $j \in I_k$, таке, що $F_{i,k+1} \subseteq F_{j,k}$. Оскільки $\varepsilon_{k+1} < \frac{\varepsilon_k}{2}$, то $B(F_{i,k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subseteq B(F_{j,k}, \frac{\varepsilon_k}{2})$. Тоді

$$H_{i,k+1} \subseteq \overline{B(F_{j,k}, \tfrac{\varepsilon_k}{2})} \subseteq H_{j,k}.$$

Звідси маємо, що

$$g_{k+1}(x) = y_{i,k+1} \text{ і } g_k(x) = y_{j,k}.$$

Зауважимо, що $f(F_{i,k+1}) \subseteq f(F_{j,k})$. Тому $y_{i,k+1} \in f(F_{j,k})$. Згідно з властивістю (3), $\mathrm{diam} f(F_{j,k}) < \frac{1}{2^k}$. Отже, має місце нерівність (*).

Для всіх $x \in X$ покладемо $g(x) = g_n(x)$.

Зафіксуємо $1 \le k \le n$ і $x \in \cup\mathcal{F}_k$. Існує таке $i \in I_k$, що $x \in F_{i,k}$. Оскільки $F_{i,k} \subseteq H_{i,k}$, то $g_k(x) = y_{i,k}$. Тоді

$$d(f(x), g(x)) = d(f(x), g_n(x)) \le$$
$$\le d(f(x), g_k(x)) + d(g_k(x), g_n(x)) \le$$

$$\le d(f(x),y_{i,k}) + d(g_k(x),g_{k+1}(x)) + \dots +$$
$$+d(g_{n-1}(x),g_n(x)) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$
$$< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^{k-2}},$$
що і завершує доведення. ♢

Нам буде потрібний наступний допоміжний результат з [2].

Твердження 2. *Нехай X – метричний простір, $\mathcal{A}$ – σ-дискретна система замкнених в X множин і $\cup\mathcal{A} = X$. Тоді існує послідовність $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ систем замкнених в X множин, така, що*

(i) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \preceq \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}_n \preceq \mathcal{A}_{n+1}$ *для кожного* n;

(iii) система $\mathcal{A}_n$ *рівномірно дискретна для кожного* n;

(iv) $\bigcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = X$.

3. Основний результат. Перейдемо до викладу основного результату цієї статті.

Теорема. *Нехай X – сильно нульвимірний метризовний простір, (Y,d) – метричний простір. Тоді*
$$H_1(X,Y) \cap \Sigma(X,Y) = B_1(X,Y).$$

Доведення. Нехай $f \in B_1(X,Y)$. Згідно з [1, с. 394], $f \in H_1(X,Y)$, а з [4] випливає, що $f \in \Sigma(X,Y)$.

Нехай тепер $f : X \to Y$ – σ-дискретне відображення першого класу Лебеґа. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо покриття $\mathcal{U}_k = \{U_{s,k} : s \in S_k\}$ простору Y відкритими кулями $U_{s,k}$ діаметра, меншого, ніж $\frac{1}{2^k}$.

Оскільки відображення f є σ-дискретним, то для нього існує σ-дискретна база $\mathcal{B}$, яка складається з замкнених множин [5].

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо
$$\mathcal{B}_k = \{B \in \mathcal{B} : (\exists s \in S_k)\,(f(B) \subseteq U_{s,k})\}.$$

Тоді $\cup\mathcal{B}_k = X$ для кожного k і $\mathcal{B}_k$ – σ-дискретна система. Згідно з твердженням 2 для кожного k існує послідовність $(\mathcal{B}_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ систем замкнених в X множин, така, що

(i) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{k,n} \preceq \mathcal{B}_k$ для кожного k;

(ii) $\mathcal{B}_{k,n} \preceq \mathcal{B}_{k,n+1}$ для всіх k і n;

(iii) система $\mathcal{B}_{k,n}$ рівномірно дискретна для всіх k і n;

(iv) $\bigcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{k,n} = X$.

Для довільних $k, n \in \mathbb{N}$ покладемо
$$\mathcal{F}_{k,n} = \{B_1 \cap \dots \cap B_k : B_i \in \mathcal{B}_{i,n}, 1 \le i \le k\}.$$
Тоді система $\mathcal{F}_{k,n}$ рівномірно дискретна, $\mathcal{F}_{k+1,n} \preceq \mathcal{F}_{k,n}$, $\mathcal{F}_{k,n} \preceq \mathcal{F}_{k,n+1}$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{k,n} = X$.

Крім того, з властивості (i) випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ і для кожного $F \in \mathcal{F}_{k,n}$ існує $B \in \mathcal{B}_k$, таке, що $F \subseteq B$. Також існує $s \in S_k$, таке, що $f(B) \subseteq U_{s,k}$. Тоді $F \subseteq f^{-1}(U_{s,k})$. Таким чином, $\mathrm{diam} f(F) < \frac{1}{2^k}$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ застосуємо твердження 2 до функції f і систем $\mathcal{F}_{k,n}$, $k \le n$. Отримаємо послідовність неперервних відображень $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n : X \to Y$, таку, що $d(f(x), g_n(x)) < \frac{1}{2^{k-2}}$ для всіх $x \in \cup\mathcal{F}_{k,n}$, $k \le n$.

Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$.

Зафіксуємо точку $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Знайдемо номер k, такий, що $\frac{1}{2^{k-2}} < \varepsilon$. Існує номер n_o, такий, що $x \in \cup\mathcal{F}_{k,n_o}$. Оскільки $\mathcal{F}_{k,n} \preceq \mathcal{F}_{k,n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то існує номер $n_1 \ge k$, такий, що $x \in \cup\mathcal{F}_{k,n}$ для всіх $n \ge n_1$.

Тоді для всіх $n \ge n_1$ маємо, що
$$d(f(x), g_n(x)) < \frac{1}{2^{k-2}} < \varepsilon.$$

Отже, $f \in B_1(X,Y)$. ♢

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Куратовский К. Топология. - Т.1. - Москва: Мир, 1966. - 596 с.

2. Fosgerau, M. When are Borel functions Baire functions? // Fund. Math. – 1993. – **143**. – P. 137 - 152.

3. Карлова О.О. Незв'язні простори і берівська класифікація відображень першого класу Лебеґа // Укр. мат. вісник. - Т. 4, №2. - 2007. - С. 180 - 188.

4. Hansell, R. Extended Bochner measurable selectors // Math. Ann. 277 (1987). – P. 79 - 94.

5. Hansell, R. Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **161**. – P. 145 - 168.

6. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.