УДК 517.983

©2008 р. Т.І. Звоздецький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ІЗОМОРФІЗМИ, ПЕРЕСТАВНІ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ІНТЕГРУВАННЯМ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

Нехай G_i – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}(G_i)$ – простір усіх аналітичних у G_i функцій з топологією компактної збіжності, а $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ – оператор узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в $\mathcal{A}(G_i)$ ($\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\mu_i > 0$), $i \in \{1, 2\}$. У даній роботі отримано опис усіх ізоморфізмів $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$, які задовольняють операторне рівняння $T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} = \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}T$.

Let G_i be a starlike with respect to zero domain in $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}(G_i)$ be the space of all analytic in G_i functions with the topology of compact convergence and $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ be the Gelfond-Leontiev integration in $\mathcal{A}(G_i)$ ($\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\mu_i > 0$), $i \in \{1, 2\}$. We describe all isomorphisms $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$ satisfying the operator equation $T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} = \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}T$.

Для $i = 1, 2$ розглянемо числа $\varrho_i > 0$ і $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_i > 0$), зіркову відносно нуля область $G_i \subseteq \mathbb{C}$ та оператор $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в $\mathcal{A}(G_i)$, який на функцію $f \in \mathcal{A}(G_i)$ діє за правилом [1]

$$(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} f)(z) = \frac{z}{\Gamma\left(\frac{1}{\varrho_i}\right)} \int_0^1 t^{\mu_i - 1}(1-t)^{\frac{1}{\varrho_i}-1} f\left(zt^{\frac{1}{\varrho_i}}\right) dt,$$

де $\mathcal{A}(G_i)$ – це простір усіх аналітичних в області G_i функцій, що наділений топологією компактної збіжності. У даній роботі отримано опис усіх ізоморфізмів $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$, які задовольняють операторне рівняння

$$T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} = \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}T. \tag{1}$$

Відзначимо, що коли $G_1 = G_2 = K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $(0 < R \le +\infty)$, то ізоморфізми відповідного простору $\mathcal{A}(K_R)$, переставні зі звичайним інтегруванням, описані в [2], а ізоморфізми, переставні з оператором узагальненого інтегрування (для досить широкого класу таких операторів), описані в [3]. Крім цього, коли $G_1 = G_2$, $\varrho_1 = \varrho_2$ і $\mu_1 = \mu_2$, то дана задача розв'язана в [4]. Зауважимо також, що в [5] одержано критерій еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{A}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{A}(G_2)$, а в [6] отримано опис усіх лінійних неперервних розв'язків $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$ операторного рівняння (1).

Нехай ізоморфізм $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$ задовольняє рівняння (1). У [6] було доведено, що ненульовий оператор $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$ задовольняє рівняння (1) тоді й лише тоді, коли $\varrho_1 \ge \varrho_2$ і у випадку $\varrho_1 = \varrho_2$ правильне включення $G_1 \supseteq G_2$. Тому маємо, що $\varrho_1 \ge \varrho_2$. Оскільки оператор $T^{-1} : \mathcal{A}(G_2) \to \mathcal{A}(G_1)$ задовольняє рівняння

$$T^{-1}\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} = \mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}T^{-1},$$

то $\varrho_2 \ge \varrho_1$. Тому $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Крім цього, $G_1 \supseteq G_2$ і $G_2 \supseteq G_1$, тобто $G_1 = G_2 = G$.

Відзначимо, що в [4] була побудована неперервна згортка $*$ для оператора $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}$ в $\mathcal{A}(G)$, тобто неперервна білінійна, комутативна й асоціативна операція $* : \mathcal{A}(G) \times \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$, для якої $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}(\varphi * f) = (\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}\varphi) * f$, $\varphi, f \in \mathcal{A}(G)$. А саме, для $\varphi, f \in \mathcal{A}(G)$

$$(\varphi * f)(z) = \varphi(0)f(z) + \frac{z}{\varrho\Gamma(\mu_2)} \int_0^1 t^{\mu_2-1}(1-t)^{\frac{1}{\varrho}-1} \times (A_{\varrho,\mu_2}\varphi)'\left(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho}}\right) f\left(zt^{\frac{1}{\varrho}}\right) dt,$$

де A_{ϱ,μ_2} – ізоморфізм простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, причому

$$(A^{-1}_{\varrho,\mu_2}f)(z) \;=$$

$$= \left(\frac{\mu_2}{\Gamma(\mu_2)} + \frac{z}{\varrho\Gamma(\mu_2)}\frac{d}{dz}\right)\int_0^1 (1-t)^{\mu_2-1} f(zt^{\frac{1}{\varrho}})dt$$

(зауважимо, що $1 * f = f$).

Із [6] випливає, що оператор T можна подати у вигляді

$$Tf = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)}[\varphi * (Bf)], \qquad (2)$$

де $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, причому $\varphi = T1$, а

$$Bf = A^{-1}_{\varrho,\mu_2}A_{\varrho,\mu_1}f, \qquad f \in \mathcal{A}(G). \qquad (3)$$

Відзначимо, що так визначений оператор B є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе. Розглянемо на $\mathcal{A}(G)$ оператор T_1, який визначається формулою

$$T_1 f = \frac{\Gamma(\mu_1)}{\Gamma(\mu_2)}T(B^{-1}f), \qquad f \in \mathcal{A}(G).$$

Враховуючи, що T і B є ізоморфізмами простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, отримаємо, що T_1 також є таким ізоморфізмом. Оскільки, очевидно,

$$T_1 f = \varphi * f, \qquad f \in \mathcal{A}(G), \qquad (4)$$

то, згідно з [4], $\varphi(0) \neq 0$.

Отже, встановлено необхідні умови наступної теореми.

Теорема. *Нехай для $i \in \{1, 2\}$ маємо, що $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ (*$\mathrm{Re}\,\mu_i > 0$*), а G_i – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$. Ізоморфізм $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$ є розв'язком операторного рівняння (1) тоді й лише тоді, коли $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $G_1 = G_2 = G$ і T подається у вигляді (2), де оператор B визначається формулою (3), а $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, причому $\varphi(0) \neq 0$.*

Доведення. Достатність. Нехай $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $G_1 = G_2 = G$ і $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, причому $\varphi(0) \neq 0$. Розглянемо на $\mathcal{A}(G)$ оператор T, який визначається формулою (2). Те, що він задовольняє рівняння (1), випливає з [6]. Із [4] одержуємо, що оператор T_1, який задається рівністю (4), є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе. Оскільки

$$Tf = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)}T_1(Bf), \qquad f \in \mathcal{A}(G),$$

то T є також ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dimovski I.H., Kiryakova V.S.* Convolution and commutant of Gelfond-Leontiev operator of integration // Конструктивная теория функций: Труды междунар. конф. (Варна, 1-5 июня, 1981). – София, 1983. – С. 288 - 294.

2. *Нагнибида Н.И.* О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т. 7, № 6. – С. 888 - 999.

3. *Царьков М.Ю.* Изоморфизмы аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора обобщенного интегрирования // Теор. функц., функц. анализ и их прилож. – 1971. – Вып. 13. – С. 54 - 63.

4. *Линчук Н.Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 5. – С. 72 - 74.

5. *Звоздецький Т.І.* Еквівалентність двох операторів узагальненого інтегрування у просторі аналітичних функцій // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 160. Математика. – 2003. – С. 73 - 75.

6. *Звоздецький Т.І.* Опис розв'язків одного операторного рівняння, що містить узагальнене інтегрування Гельфонда-Леонтьєва // Мат. студії. – 2003. – Т. 20, № 2. – С.200 - 204.