УДК 517.524

©2008 р. Р.І. Дмитришин

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

ЕФЕКТИВНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ДЕЯКОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Встановлено ефективну ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними, на основі якої встановлено різні ознаки збіжності подібних ГЛДзНЗ та досліджено полікругову область збіжності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними.

In this paper a convergence criteria of a branched continued fraction with nonequivalent variables whose partial quotients are of the form $\dfrac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$ is established. As a results, convergence criterions for similar branched continued fractions with nonequivalent variables are established and the convergence domain for multidimensional g-fraction with nonequivalent variables in the polydisk is investigated.

Вступ. Одним із найважливих питань аналітичної теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень — гіллястих ланцюгових дробів — є встановлення ефективних ознак збіжності таких дробів. Різні ознаки збіжності неперервних дробів з частинними ланками вигляду

$$\frac{g_k(1-g_{k-1})z_k}{1}$$

наведено в монографії [8, стор. 45–50], а їх узагальнень — в роботах [1, стор. 147–149], [2–7].

У даній роботі встановлено ефективну ознаку збіжності гіллястого неперервного дробу з нерівнозначними змінними (ГЛДзНЗ), частинні ланки якого мають вигляд

$$\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1},$$

на основі якої встановлено різні ознаки збіжності подібних ГЛДзНЗ. Крім того, досліджено збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними в одиничній полікруговій області простору $\mathbb{C}^N$.

Ознаки збіжності. Нехай N — довільне натуральне число,

$$\mathcal{J}_r = \{i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k :\ k \geq 1,\quad r \leq i_n \leq i_{n-1},\ 1 \leq n \leq k,\ i_0 = N\},$$

$1 \leq r \leq N$, — множина мультиіндексів.

Теорема 1. *Нехай $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, — комплексні змінні, $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, — дійсні сталі, для яких виконуються умови*

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq q_0 < 1, \\ 0 \leq q_{i(k)} < 1 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}_1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

або

$$\left.\begin{array}{c} 0 < q_0 \leq 1, \\ 0 < q_{i(k)} \leq 1 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}_1. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Тоді

1) *ГЛДзНЗ*

$$\frac{q_{i(0)}^N}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}}, \tag{3}$$

де $q_{i(0)} = q_0$, рівномірно збіжний, якщо

$$|z_{i(k)}| \leq 1 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}_1. \tag{4}$$

2) *Значення ГЛДзНЗ* (3) *і всіх його апроксимант належать кругу*

$$|z| \leq \prod_{n=1}^{N} \frac{S_n}{1+S_n}, \tag{5}$$

де

$$S_n = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{q_0}{1-q_0} \prod_{k=1}^{r-1} \frac{q_{\underbrace{nn\ldots n}_{k}}}{1-q_{\underbrace{nn\ldots n}_{k}}} \right). \qquad (6)$$

Д о в е д е н н я проводимо поетапно. На першому етапі за допомогою еквівалентних перетворень $\rho_0^{(1)} = 1/Q_0^{(1)}$, $\rho_{i(k)}^{(1)} = 1/Q_{i(k)}^{(1)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$ [1, стор. 29–33], де

$$Q_0^{(1)} = 1 + \cfrac{q_1(1-q_0)z_1}{1 + \cfrac{q_{11}(1-q_1)z_{11}}{1 + \ddots}},$$

$$Q_{i(k)}^{(1)} = 1 + \cfrac{q_{i(k)1}(1-q_{i(k)})z_{i(k)1}}{1 + \cfrac{q_{i(k)11}(1-q_{i(k)1})z_{i(k)11}}{1 + \ddots}}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_2$ і $Q_{i(k)}^{(1)} = 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1 \backslash \mathcal{J}_2$, ГЛДзНЗ (3) зводимо до вигляду

$$\frac{q_0^{N-1} \dfrac{q_0}{Q_0^{(1)}}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=2}^{i_{k-1}} \dfrac{q_{i(k)}^{i_k-1} q_{i(k-1)}^{i_k-2} (1-q_{i(k-1)}) z_{i(k)}^{(1)}}{1}}, \qquad (7)$$

де

$$z_{i(k)}^{(1)} = \frac{q_{i(k)} q_{i(k-1)}}{Q_{i(k)}^{(1)} Q_{i(k-1)}^{(1)}} z_{i(k)} \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{J}_2,$$

причому $q_{i(0)}/Q_{i(0)}^{(1)} = q_0/Q_0^{(1)}$.

Згідно з теоремою 11.1 [8, стор. 45] для всіх мультиіндексів $i(k) \in \mathcal{J}_2$ неперервні дроби $q_{i(k)}/Q_{i(k)}^{(1)}$ і дріб $q_0/Q_0^{(1)}$ збігаються рівномірно, якщо виконуються умови (1) або (2) і умови (4), значення цих дробів та їх апроксимант належать кругу $|z| \le 1$, тобто для довільного $r \ge 1$ і для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_2$ справджуються нерівності

$$\left| \frac{q_0}{Q_0^{(1)r}} \right| \le 1, \quad \left| \frac{q_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(1)r}} \right| \le 1, \qquad (8)$$

де $Q_0^{(1)r}$, $Q_{i(k)}^{(1)r}$ — r-ті апроксиманти дробів $Q_0^{(1)}$ і $Q_{i(k)}^{(1)}$ відповідно.

Використовуючи нерівності (8), для будь-якого мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{J}_2$ і натурального r при виконанні умов (1) або (2) і умов (4) маємо

$$\left| z_{i(k)}^{(1)r} \right| = \left| \frac{q_{i(k-1)} q_{i(k)}}{Q_{i(k-1)}^{(1)r} Q_{i(k)}^{(1)r}} z_{i(k)} \right| \le 1. \qquad (9)$$

На другому етапі еквівалентними перетвореннями аналогічними першому етапу ГЛДзНЗ (7) зводимо до вигляду

$$\frac{q_0^{N-2} \dfrac{q_0}{Q_0^{(1)}} \dfrac{q_0}{Q_0^{(2)}}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=3}^{i_{k-1}} \dfrac{q_{i(k)}^{i_k-2} q_{i(k-1)}^{i_k-3} (1-q_{i(k-1)}) z_{i(k)}^{(2)}}{1}},$$

де

$$Q_0^{(2)} = 1 + \cfrac{q_2(1-q_0)z_2^{(1)}}{1 + \cfrac{q_{22}(1-q_2)z_{22}^{(1)}}{1 + \ddots}};$$

$$z_{i(k)}^{(2)} = \frac{q_{i(k)} q_{i(k-1)}}{Q_{i(k)}^{(2)} Q_{i(k-1)}^{(2)}} z_{i(k)}^{(1)},$$

$$Q_{i(k)}^{(2)} = 1 + \cfrac{q_{i(k)2}(1-q_{i(k)})z_{i(k)2}^{(1)}}{1 + \cfrac{q_{i(k)22}(1-q_{i(k)2})z_{i(k)22}^{(1)}}{1 + \ddots}}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_3$; $q_{i(0)}/Q_{i(0)}^{(2)} = q_0/Q_0^{(2)}$.

Оскільки із співвідношення (9)

$$\left| z_{i(k)}^{(1)} \right| = \lim_{r\to\infty} \left| z_{i(k)}^{(1)r} \right| \le 1$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_2$, то неперервний дріб $q_0/Q_0^{(2)}$, як і дріб $q_0/Q_0^{(2)}$, збігається рівномірно, значення цього дробу та його апроксимант належать кругу $|z| \le 1$. Із таких самих міркувань робимо аналогічні висновки для неперервних дробів $q_{i(k)}/Q_{i(k)}^{(2)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_3$. Крім того, звідси, як і вище, використовуючи співвідношення (9), для будь-якого мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{J}_3$ і натурального r отримуємо справедливість співвідношень

$$\left| z_{i(k)}^{(2)r} \right| = \left| \frac{q_{i(k-1)} q_{i(k)}}{Q_{i(k-1)}^{(2)r} Q_{i(k)}^{(2)r}} z_{i(k)}^{(1)r} \right| \le 1,$$

де $Q_0^{(2)r}$, $Q_{i(k)}^{(2)r}$ — r-ті апроксиманти дробів $Q_0^{(2)}$ і $Q_{i(k)}^{(2)}$ відповідно.

Застосовуючи далі метод скінченної математичної індукції при

$$\left|z_{i(k)}^{(n)r}\right| = \left|\frac{q_{i(k)}q_{i(k-1)}}{Q_{i(k)}^{(n)r}Q_{i(k-1)}^{(n)r}}z_{i(k)}^{(n-1)r}\right| \le 1 \qquad (10)$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_{n+1}$, $1 \le n \le N-2$, і натурального r, де $Q_{i(0)}^{(n)r} = Q_0^{(n)r}$, $Q_{i(k)}^{(n)r}$ — r-і апроксиманти дробів

$$Q_0^{(n)} = 1 + \cfrac{q_n(1-q_0)z_n^{(n-1)}}{1 + \cfrac{q_{nn}(1-q_n)z_{nn}^{(n-1)}}{1+\ddots}}, \qquad (11)$$

$$Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \cfrac{q_{i(k)n}(1-q_{i(k)})z_{i(k)n}^{(n-1)}}{1 + \cfrac{q_{i(k)nn}(1-q_{i(k)n})z_{i(k)nn}^{(n-1)}}{1+\ddots}}, \qquad (12)$$

відповідно, причому $z_{i(k)}^{(0)} = z_{i(k)}$,

$$z^{(0)}_{\underbrace{11\ldots1}_{r}} = z_{\underbrace{11\ldots1}_{r}}, \quad z^{(0)}_{i(k)\underbrace{11\ldots1}_{r}} = z_{i(k)\underbrace{11\ldots1}_{r}},$$

$r \ge 1$; на $(N-1)$-у етапі отримуємо неперервний дріб

$$\cfrac{q_0\prod\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{q_0}{Q_0^{(n)}}}{1 + \cfrac{q_N(1-q_0)z_N^{(N-1)}}{1 + \cfrac{q_{NN}(1-q_N)z_{NN}^{(N-1)}}{1+\ddots}}}, \qquad (13)$$

де

$$z^{(N-1)}_{\underbrace{NN\ldots N}_{k}} = z_{i(k)}^{(N-1)} = \frac{q_{i(k)}q_{i(k-1)}}{Q_{i(k)}^{(N-1)}Q_{i(k-1)}^{(N-1)}}z_{i(k)}^{(N-2)}$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_N$, $Q_{i(0)}^{(N-1)} = Q_0^{(N-1)}$, дроби $Q_0^{(N-1)}$, $Q_{i(k)}^{(N-1)}$ визначаються за формулами (11) і (12) відповідно при $n = N-1$.

Оскільки із співвідношення (10)

$$\left|z_{i(k)}^{(N-2)}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|z_{i(k)}^{(N-2)r}\right| \le 1$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_{N-1}$, то згідно з теоремою 11.1 [8, стор. 45] для всіх мультиіндексів $i(k) \in \mathcal{J}_N$ неперервні дроби $Q_{i(k)}^{(N-1)}$ і дріб $Q_0^{(N-1)}$ збігаються рівномірно, значення цих дробів та їх апроксимант належать кругу $|z| \le 1$.

Далі, використовуючи нерівності (10), для будь-якого мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{J}_N$ і натурального r маємо

$$\left|z_{i(k)}^{(N-1)r}\right| = \left|\frac{q_{i(k-1)}q_{i(k)}}{Q_{i(k-1)}^{(N-1)r}Q_{i(k)}^{(N-1)r}}z_{i(k)}^{(N-2)r}\right| \le 1,$$

звідки

$$\left|z_{i(k)}^{(N-1)}\right| = \lim_{r\to\infty}\left|z_{i(k)}^{(N-1)r}\right| \le 1 \qquad (14)$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_N$.

Згідно з теоремою 11.1 [8, стор. 45] неперервні дроби $q_0/Q_0^{(n)}$, $1 \le n \le N$, де $Q_0^{(n)}$ визначаються за формулами (13), збігаються рівномірно, якщо виконуються умови (14), значення цих дробів та їх апроксимант належать відповідно кругам

$$|z| \le \frac{S_n}{1+S_n}, \quad 1 \le n \le N,$$

де S_n визначаються за формулами (6). З огляду на останні нерівності доходимо висновку, що значення неперервного дробу (13) та його апроксимант належать кругу (5).

Нарешті, із еквівалентності дробів (3) і (13) робимо висновок про справедливість тверджень теореми. $\square$

Встановимо ознаки збіжності іншого ГЛДзНЗ, частинні ланки якого мають вигляд

$$\frac{q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}.$$

Теорема 2. *Нехай $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, — комплексні змінні, $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, — дійсні сталі, для яких виконуються умови*

$$0 \le q_{i(k)} < 1 \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}_1 \qquad (15)$$

або

$$0 < q_{i(k)} \le 1 \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}_1 \qquad (16)$$

і умова

$$\sum_{i_1=1}^{N}\prod_{n=1}^{i_1}\frac{S_n^{i_1}}{1+S_n^{i_1}}<1, \tag{17}$$

де

$$S_n^{i_1}=\sum_{r=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{r-1}\frac{q_{i_1\underbrace{nn\ldots n}_{k}}}{1-q_{i_1\underbrace{nn\ldots n}_{k}}}. \tag{18}$$

Тоді ГЛДзНЗ

$$\cfrac{1}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{q_{i(1)}^{i_1}z_{i(1)}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\cfrac{s_{i(k)}z_{i(k)}}{1}}}, \tag{19}$$

де $s_{i(k)}=q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{J}_1$, $k\geq 2$, *збігається рівномірно, якщо виконуються умови* (4).

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 1 при виконанні умов (15) або (16) і умов (4) ГЛДзНЗ

$$\cfrac{q_{i(1)}^{i_1}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\cfrac{q_{i(k)}^{i_k}q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}},$$

де $1\leq i_1\leq N$, збігаються рівномірно, значення цих дробів та їх апроксимант належать відповідно кругам

$$|z|\leq\prod_{n=1}^{i_1}\frac{S_n^{i_1}}{1+S_n^{i_1}},\quad 1\leq i_1\leq N,$$

де $S_n^{i_1}$ визначаються за формулами (18). Тому, при виконанні умови (17) модулі ГЛДзНЗ (19) і його апроксимант не більші, ніж

$$\cfrac{1}{1-\sum\limits_{i_1=1}^{N}\prod\limits_{n=1}^{i_1}\cfrac{S_n^{i_1}}{1+S_n^{i_1}}}<1.$$

Таким чином, ГЛДзНЗ (19) збігається рівномірно, якщо виконуються умови теореми. □

З огляду на доведення теореми 2 доходимо висновку, що у випадку, коли

$$\sum_{i_1=1}^{N}\prod_{n=1}^{i_1}\frac{S_n^{i_1}}{1+S_n^{i_1}}=1, \tag{20}$$

де $S_n^{i_1}$ визначаються за формулами (18), і існує індекс i_1, $1\leq i_1\leq N$, такий, що

$$|z_{i_1}|<1-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1,$$

ГЛДзНЗ (19) збігається рівномірно.

Таким чином, справджується теорема.

Теорема 3. *Нехай* $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{J}_1$, *— комплексні змінні,* $q_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{J}_1$, *— дійсні сталі, для яких виконуються умови* (15) *або* (16) *і умова* (20). *Тоді ГЛДзНЗ* (19) *збігається, якщо виконуються умови* (4) *і існує індекс* i_1, $1\leq i_1\leq N$, *такий, що*

$$|z_{i_1}|<1-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1.$$

ГЛДзНЗ (19) розбіжний при $z_{i(k)}=-1$ для всіх $i(k)\in\mathcal{J}_1$, якщо виконується умова (20) і ряди

$$S_n^{i(k)}=\sum_{r=1}^{\infty}\prod_{s=1}^{r-1}\frac{q_{i(k)\underbrace{nn\ldots n}_{s}}}{1-q_{i(k)\underbrace{nn\ldots n}_{s}}}, \tag{21}$$

де $1\leq n\leq i_k-1$, $i(k)\in\mathcal{J}_2$, розбіжні для всіх $i(k)\in\mathcal{J}_2$. У цьому випадку з огляду на доведення теореми 11.3 [8, стор. 45] і теореми 2 маємо справедливість наступної теореми.

Теорема 4. *Нехай* $z_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{J}_1$, *— комплексні змінні,* $q_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{J}_1$, *— дійсні сталі, для яких виконуються умови* $0<q_{i(k)}<1$ *для всіх* $i(k)\in\mathcal{J}_1$, *умова* (20) *і ряди* (21) *розбіжні для всіх* $i(k)\in\mathcal{J}_2$. *Тоді ГЛДзНЗ* (19) *збігається, якщо виконуються умови* (4) *і існує індекс* $i(k)\in\mathcal{J}_1$ *такий, що* $z_{i(k)}\neq-1$.

Міркуючи так, як і при встановленні ознак збіжності ГЛДзНЗ (19), отримуємо аналогічні ознаки збіжності подібного ГЛДзНЗ. А, саме:

Теорема 5. *Нехай* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *— комплексні змінні,* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *— дійсні сталі, для яких виконуються умови* (15) *або* (16) *і умова*

$$\sum_{i_1=1}^{N} q_{i_1} < 1.$$

Тоді ГЛДзНЗ

$$\frac{1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \dfrac{q_{i(1)}^{i_1+1} z_{i(1)}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{s_{i(k)} z_{i(k)}}{1}}}, \qquad (22)$$

де $s_{i(k)} = q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)})$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{J}_1$, $k \geq 2$, *збігається рівномірно, якщо виконуються умови* (4).

Теорема 6. *Нехай* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *— комплексні змінні,* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *— дійсні сталі, для яких виконуються умови* (15) *або* (16) *і умова*

$$\sum_{i_1=1}^{N} q_{i_1} = 1.$$

Тоді ГЛДзНЗ (22) *збігається рівномірно, якщо виконуються умови* (4) *і існує індекс* i_1, $1 \leq i_1 \leq N$, *такий, що*

$$|z_{i_1}| < 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Теорема 7. *Нехай* $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *— комплексні змінні,* $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *— дійсні сталі, для яких виконуються умови*

$$0 < q_{i(k)} < 1 \text{ для всіх } i(k) \in \mathcal{J}_1, \ \sum_{i_1=1}^{N} q_{i_1} = 1$$

і ряди (21) *розбіжні для всіх* $i(k) \in \mathcal{J}_2$. *Тоді ГЛДзНЗ* (22) *збігається, якщо виконуються умови* (4) *і існує індекс* $i(k) \in \mathcal{J}_1$ *такий, що* $z_{i(k)} \neq -1$.

Зауважимо, що теореми 1-7 можна застосувати до ГЛДзНЗ виду

$$\frac{a_0}{b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}}, \qquad (23)$$

де a_0, b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, — комплексні числа, якщо його за допомогою еквівалентних перетворень звести до ГЛДзНЗ з частинними знаменниками рівними одиниці. Наприклад, ГЛДзНЗ (23) збігається рівномірно, якщо існують дійсні сталі q_0, $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, такі, що для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$ справджуються нерівності

$$\left| \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} b_{i(k-1)}} \right| \leq q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}),$$

де $0 < q_0 < 1$, $0 < q_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$, причому $b_{i(0)} = b_0$, $q_{i(0)} = q_0$.

Область збіжності. Наступна теорема про полікругову область збіжності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \dfrac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}}}, \qquad (24)$$

де $s_0 > 0$, $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, — дійсні сталі такі, що $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Теорема 8. *Багатовимірний* g*-дріб з нерівнозначними змінними* (24) *рівномірно збіжний в області*

$$Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |z_k| < 1, \ 1 \leq k \leq N\},$$

якщо існують дійсні сталі $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, *такі, що* $0 < q_{i(k)} < 1$ *для всіх* $i(k) \in \mathcal{J}_1$, $g_{i_1} = q_{i_1}^{i_1+1}$, $1 \leq i_1 \leq N$,

$$g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) = q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}),$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$, $k \geq 2$, *і, крім того,*

$$\sum_{i_1=1}^{N} \sqrt[i_1+1]{g_{i_1}} \leq r < 1, \quad 0 < r < 1.$$

Д о в е д е н н я. Нехай існують дійсні сталі $q_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}_1$, такі, що $0 < q_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$, $g_{i_1} = q_{i_1}^{i_1+1}$, $1 \leq i_1 \leq N$,

$$g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) = q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}),$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1,\ k \geq 2$, і, нехай

$$\sum_{i_1=1}^{N} \sqrt[i_1+1]{g_{i_1}} \leq r < 1, \quad 0 < r < 1.$$

Тоді багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (24) запишемо у вигляді

$$\cfrac{s_0}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{q_{i(1)}^{i_1+1} z_{i_1}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1-q_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1}}}.$$

Застосовуючи теорему 5 до цього дробу, робимо висновок про справедливість твердження теореми. □

Теорема 9. *Багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними* (24) *рівномірно збіжний в області*

$$Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ |z_k| < 1,\ 1 \leq k \leq N\},$$

якщо існують дійсні сталі $q_0,\ q_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{J}_1$, такі, що

$$0 < q_0 < 1, \quad 0 < q_{i(k)} < 1$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$ і

$$g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) = q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}),$$

для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_1$, де $g_{i(0)} = 0,\ q_{i(0)} = q_0$.

Д о в е д е н н я проводиться міркуваннями такими, як і при доведенні теореми 8 із використанням теореми 1. □

Відмітимо, що з огляду на теорему 1 [5] робимо висновок, що багатовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними рівномірно збіжний в області

$$G = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ \sum_{k=1}^{N} |z_k| < 1\right\}.$$

Отже, в теоремах 8 і 9 досліджено більш ширшу область збіжності багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними, ніж область G.

Висновки. Запропоновано новий метод встановлення ознак збіжності ГЛДзНЗ. На основі встановленої ефективної ознаки збіжності ГЛДзНЗ, частинні ланки якого мають вигляд

$$\frac{q_{i(k)}^{i_k} q_{i(k-1)}^{i_k-1}(1 - q_{i(k-1)}) z_{i(k)}}{1},$$

можна досліджувати інші ГЛДзНЗ, які за допомогою еквівалентних перетворень зводяться до ГЛДзНЗ з частинними знаменниками рівними одиниці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби.— К.: Наук. думка, 1986.— 176с.
2. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1,i_2,\ldots,i_k})\hat{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} x_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{1}$ // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1982. Вып. 15.— С.30—35.
3. *Боднар Д.И., Кучминская Х.И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1983. Вып. 18.— С.30—34.
4. *Возна С.М., Кучмінська Х.Й.* Ознаки збіжності для двовимірного неперервного дробу спеціального вигляду // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наукових праць. Вип. 191—192. Математика.— Чернівці: Рута.— 2004.— С.22—32.
5. *Дмитришин Р.І.* Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 2005.— **48**, №4.— С.87—92.
6. *Дмитришин Р.І.* Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 2000.— **43**, №4.— С.12—16.
7. *Kuchminskaja Ch.* On the convergence of two-dimensional continued fractions // Constructive theory of functions.— Sofia.: Publishing House of the Bulgarian Acad. Sci. 1984.— P.501—506.
8. *Wall H.S.* Analytic theory of continued fractions.— New York: Van Nostrand, 1948.— 433p.