УДК 517.925

©2008 р. М.О. Білозерова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ У ДЕЯКОМУ СЕНСІ БЛИЗЬКИМИ ДО СТЕПЕНЕВИХ

Для рівнянь другого порядку, що містять у правій частині нелінійності у деякому сенсі близькі до степеневих, встановлено необхідні і достатні умови існування одного класу неколивних розв'язків і одержано для цих розв'язків асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$).

Necessary and sufficient conditions for the existence of a class of non-oscillating solutions were stated for the equations of the second order with non-linearities which, to some extend, are close to the power ones, and asymptotic representations under $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) were obtained for these solutions.

Розглядається нелінійне диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ -неперервна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ ($i = 0,1$)- строго монотонні, двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють умови

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in \Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \qquad \limsup_{\substack{z\to Y_i \\ z\in \Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty, \quad (i=0,1) \tag{2}$$

$$Y_i = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \tag{3}$$

Δ_{Y_i} – деякий однобічний окіл Y_i,

$$\sigma_i \in \mathbb{R}, \quad \text{причому } \sigma_0 + \sigma_1 \ne 1.$$

Внаслідок першої з умов (2) кожна з функцій φ_i $(i \in \{0,1\})$ є у деякому сенсі близькою до степеневої, а саме має вигляд $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\theta_i(z)$, де $\theta_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ така, що

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in \Delta_{Y_i}}} \frac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = 0. \tag{4}$$

У випадку, коли функції φ_i (i=0,1) є степеневими, асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (1) було детально досліджено у роботах [1-8]. Окремі випадки цього рівняння виникають в астрофізиці, ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідини, а також при вивченні розподілу електростатичного потенціалу у сферично-симетричному об'ємі плазми продуктів згоряння.

У роботах [9-14] було розроблено підхід, що дозволяє досліджувати поведінку розв'язків рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y), \tag{5}$$

де функція φ_0 відмінна від степеневої. У даній роботі дається розповсюдження методики встановлення асимптотики монотонних розв'язків цього диференціального рівняння на рівняння виду (1).

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язком, якщо

$$y^{(i)} : [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ (i=0,1), \tag{6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Найбільш складними для вивчення є ті з них, для яких $\lambda_0 = 0, 1, \infty$. Дану роботу присвячено $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$- розв'язкам.

Внаслідок вигляду рівняння (1) кожний його $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$- розв'язок є строго монотонним разом зі своєю першою похідною. Тому позначення з (3) можуть бути конкретизовані наступним чином

$$\Delta_{Y_i} = \left\{ \begin{array}{l} \text{або } [y_i^0, Y_i[,^1 \\ \text{або }]Y_i, y_i^0]. \end{array} \right. \tag{7}$$

Крім того, очевидно, що при вивченні таких розв'язків необхідно вважати, що

$$\begin{array}{l} y_1^0 > 0 \text{ якщо } \Delta_{Y_0} = [y_0^0, Y_0[, \\ y_1^0 < 0 \text{ якщо } \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0^0]. \end{array} \tag{8}$$

Будемо говорити, що функція $\varphi_i(z)$, де $i \in \{0, 1\}$, задовольняє умову S_i, якщо для кожної неперервно-диференційовної функції $L : \Delta_{Y_i} \to]0; +\infty[$ такої, що

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

справедливе співвідношення

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1 + o(1))$$

$$\text{при } z \to Y_i, \quad (z \in \Delta_{Y_i})$$

Умову S_i задовольняють функції $\varphi_i(z)$, для яких $\theta_i(z)$ мають скінченну границю при $z \to Y_i$, а також функції вигляду $|z|^{\sigma_i}|ln|z||^{\mu_i}$, $|z|^{\sigma_i}|ln|ln|z|||^{\mu_i}$ та багато інших.

Введемо наступні позначення, покладаючи

$$\pi_\omega(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{array} \right.$$

$$I(t) = \int_{A_\omega}^{t} p(\tau)\, d\tau,$$

$$A_\omega = \left\{ \begin{array}{ll} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\, d\tau < +\infty, \end{array} \right.$$

$$Y_1^{[1]}(t) = |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \text{sign} y_1^0,$$

та у випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y_1^{[1]}(t) = Y_1$

$$J(t) = \int_{B_\omega}^{t} \left|\varphi_1\left(Y_1^{[1]}(t)\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} |I(t)|^{\frac{1-2\sigma_1}{(1-\sigma_1)^2}}\, d\tau,$$

[1] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) відповідно.

де $B_\omega = b$, якщо

$$\int_b^\omega \left|\varphi_1\left(Y_1^{[1]}(t)\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} |I(t)|^{\frac{1-2\sigma_1}{(1-\sigma_1)^2}}\, dt = +\infty,$$

та $B_\omega = \omega$ у протилежному випадку. При цьому $b \in (a; \omega)$ вибрано так, щоб $Y_1^{[1]}(t) \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [b; \omega)$.

Теорема 1. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, виконується (8) та функція φ_1 задовольняє умову S_1. Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків необхідно, а якщо існує скінченна, або нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)}$, то й достатньо, щоб виконувались умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}} = Y_0, \;\; \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(J'(t))^2}{J''(t)J(t)} = 0, \quad \alpha_0 y_1^0 (1-\sigma_1) I(t) > 0, \tag{9}$$

$$y_0^0 y_1^0 (1-\sigma_1)(1-\sigma_0-\sigma_1) J(t) > 0 \quad \textit{при } t \in [b, \omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ наступні асимптотичні зображення

$$\begin{array}{c} \dfrac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim CJ(t), \\ \dfrac{y'(t)}{y(t)} \sim \dfrac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J(t)}, \end{array} \tag{10}$$

де

$$C = \frac{|1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \text{sign} y_1^0}{1-\sigma_1} (1 - \sigma_0 - \sigma_1).$$

Доведення . *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — $P_\omega(Y_0; Y_1; 0)$-розв'язок рівняння (1). Тоді з рівності

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} \times$$
$$\times \left(1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))} - \right.$$
$$\left. - \frac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}\right)$$

з урахуванням (1),(2) та (6), у випадку, коли $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty$, випливає, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} \sim \alpha_0(1-\sigma_1)I(t). \qquad (11)$$

А у випадку, коли $\int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty$, отримаємо або (11), або

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = c \neq 0. \qquad (12)$$

Покажемо, що (12) не може мати місце. Оскільки $\sigma_1 \neq 1$, то згідно з першою з умовою (6) та (2) функція $\dfrac{y'(t)}{\varphi_1(y'(t))}$ має або нульову або нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. Припустимо, що умова (12) виконується. Тоді функція $\varphi_0(y(t))$ має відповідно нульову або нескінченну границю при $t \uparrow \omega$. Тому, використовуючи правило Лопіталя, (2) та (6) отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\dfrac{1}{\varphi_0(y(t))}\right]'}{\left[\dfrac{\varphi_1(y'(t))}{y'(t)}\right]'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\ \frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} \times$$

$$\times \frac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))}\ \frac{1}{1-\dfrac{y'(t)\varphi_1'(y'(t))}{\varphi_1(y'(t))}} = 0,$$

що суперечить (12). Таким чином, (11) має місце у обох випадках.

Використовуючи (1), перепишемо (11) у виді

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)}{(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)] \qquad (13)$$

при $t \uparrow \omega$, звідки отримаємо четверту з умов (9). Інтегруючи (13) за проміжком $[t_0, t] \subset [t_0, \omega[$, та враховуючи означення $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$- розв'язку, при $t \uparrow \omega$ одержуємо

$$\ln|y'(t)| = \frac{1}{1-\sigma_1}\ln|I(t)|[1+o(1)], \qquad (14)$$

звідки з урахуванням (7) випливає друга з умов (9).

Покладемо

$$\varepsilon(t) = \frac{(1-\sigma_1)\ln|y'(t)|}{\ln|I(t)|} - 1,$$

$$L(z) = |I(t(z))|^{\frac{\varepsilon(t(z))}{1-\sigma_1}},$$

де $t(z)$ — функція, обернена до функції $z = |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\mathrm{sign} y_1^0$. Тоді з урахуванням (14)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varepsilon(t) = 0,$$

$$|y'(t)| = |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} L\left(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\mathrm{sign} y_1^0\right).$$

Використовуючи (11) та (13) будемо мати

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I(t)}{I'(t)}\left(\varepsilon'(t)\ln|I(t)| + \right.$$

$$\left. + \varepsilon(t)\frac{I'(t)}{I(t)}\right) = \lim_{t\uparrow\omega}(1-\sigma_1)\left(\frac{I(t)y''(t)}{I'(t)y'(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\ln|y'(t)|}{\ln|I(t)|} + \frac{\varepsilon(t)}{1-\sigma_1}\right) = 0.$$

Тому в силу умови S_1 співвідношення (11) може бути переписано у виді

$$\frac{y'(t)\mathrm{sign} y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J'(t) \qquad (15)$$

при $t \uparrow \omega$. Використовуючи дане співвідношення, а також (2), (6), умову $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ і правило Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)\mathrm{sign} y_1^0}{J(t)|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\dfrac{y(t)\mathrm{sign} y_1^0}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right]'}{J'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y'(t)\mathrm{sign} y_1^0}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\left[1 - \dfrac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{(1-\sigma_1)\varphi_0(y(t))}\right]}{J'(t)} =$$

$$= |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}.$$

Звідси випливають перша та п'ята з умов (9), а також перше з зображень (10). З першого з зображень (10) з урахуванням (15) отримаємо друге з зображень (10). Внаслідок другого з зображень (10), третьої з умов (6), (13), (2) та виду функції J має місце друга з умов (9).

Достатність. Нехай виконуються умови (9). Розглянемо функцію

$$\Phi(y) = \int\limits_{Y_0^*}^{y} \frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}, \quad \text{де}$$

$$Y_0^* = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо } \left| \int\limits_{y_0^0}^{Y_0} \frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \right| = +\infty, \\ Y_0, & \text{якщо } \left| \int\limits_{y_0^0}^{Y_0} \frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Оскільки Φ сторого монотонна на Δ_{Y_0} та

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) = \Phi^0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{якщо } Y_0^* = y_0^0, \\ 0, & \text{якщо } Y_0^* = Y_0, \end{cases}$$

то для неї існує обернена функція Φ^{-1}, задана внаслідок (2) на проміжку

$$\Delta_{\Phi^0} = \begin{cases} [C_{\varphi_0}, \Phi^0[, & \text{якщо } C_{\varphi_0} < \Phi^0, \\ ]\Phi^0, C_{\varphi_0}], & \text{якщо } C_{\varphi_0} > \Phi^0, \end{cases}$$

де

$$C_{\varphi_0} = \int\limits_{Y_0^*}^{y_0^0} \frac{dz}{|\varphi_0(z)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},$$

причому

$$\lim_{\substack{z \to \Phi^0 \\ z \in \Delta_{\Phi^0}}} \Phi^{-1}(z) = Y_0. \tag{16}$$

Крім того, згідно з правилом Лопіталя

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi(y)|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{y} = \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \tag{17}$$

Рівняння (1) за допомогою перетворення

$$\Phi(y(t)) = |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} (\text{sign} y_1^0) J(t)[1+z_1(x)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t)}[1+z_2(x)], \tag{18}$$

де

$$x = \beta \ln|I(t)|, \quad \beta = \text{sign}(\alpha_0 y_1^0(1-\sigma_1)) \tag{19}$$

зведемо, враховуючи третю з умов (9), до системи диференціальних рівнянь

$$z_i' = \beta\psi_i(x, z_1, z_2) \quad (i = 1, 2) \tag{20}$$

у якій

$$\psi_1(x, z_1, z_2) =$$

$$= G(x)\left[-1 - z_1 + \frac{F(x, z_1)(1+z_2)}{C}\right],$$

$$\psi_2(x, z_1, z_2) = (1+z_2)\left[|BF(x, z_1)(1+z_2)|^{\sigma_1 - 1} \times\right.$$

$$\times K(x, z_1, z_2)\text{sign}(1-\sigma_1) -$$

$$\left. - BG(x)(z_2+1) + M(x)\right],$$

де

$$G(x) = \frac{I(t(x))J'(t(x))}{p(t(x))J(t(x))},$$

$$F(x, z_1) = \frac{Y(t(x), z_1)}{J(t(x))|\varphi_0(Y(t(x), z_1))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}},$$

$$Y(t, z_1) = \Phi^{-1}(BCJ(t)(1+z_1)),$$

$$B = \frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0},$$

$$K(x, z_1, z_2) = \frac{\theta_1(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2))}{\theta_1\left(Y_1^{[1]}(t(x))\right)},$$

$$Y^{[1]}(t, z_1, z_2) = \frac{Y(t, z_1)J'(t)}{BJ(t)}(1+z_2),$$

$$M(x) = G(x) -$$

$$-\frac{1}{1-\sigma_1}\left[1 + \frac{Y_1^{[1]}(t(x))\theta_1'\left(Y_1^{[1]}(t(x))\right)}{(1-\sigma_1)\theta_1\left(Y_1^{[1]}(t(x))\right)}\right].$$

З означення функції J випливає, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p(t)J'(t)}{J''(t)I(t)} = 1 - \sigma_1 \tag{21}$$

Внаслідок (16), (8), а також першої та п'ятої з умов (9), $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y(t,\xi) = Y_0$ при $|\xi| \le \frac{1}{2}$. Використовуючи правило Лопіталя та (2), для кожного такого ξ знаходимо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y(t,\xi)}{J(t)|\varphi_0(Y(t,\xi))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{Y(t,\xi)}{|\varphi_0(Y(t,\xi))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}\right]'}{J'(t)} = \tag{22}$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{C(1+\xi)}{B}\left[1-\frac{Y(t,\xi)\varphi_0'(Y(t,\xi))}{(1-\sigma_1)\varphi_0(Y(t,\xi))}\right] = C(1+\xi).$$

Тоді, з урахуванням (4), третьої з умов (9) та (21), будемо мати

$$\frac{I(t)\left(Y^{[1]}(t,\xi,0)\right)'}{I'(t)Y^{[1]}(t,\xi,0)} = BC(1+\xi)G(x(t))\frac{J(t)|\varphi_0(Y(t,\xi))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{Y(t,\xi)} - M(x(t)) \sim \frac{1}{1-\sigma_1} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{23}$$

Це означає, що $|Y^{[1]}(t,\xi,0)| = |I(t)|^{\frac{1+o(1)}{1-\sigma_1}}$ при $t\uparrow\omega$. В силу монотонності функції Φ^{-1} при $|z_i| \le \frac{1}{2}$, має місце або нерівність

$$\frac{1}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{1}{2},0\right) < Y^{[1]}(t,z_1,z_2) < \frac{3}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{3}{2},0\right),$$

або

$$\frac{1}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{3}{2},0\right) < Y^{[1]}(t,z_1,z_2) < \frac{3}{2}Y^{[1]}\left(t,\frac{1}{2},0\right).$$

Тому, враховуючи першу з умов (9), можна обрати число $t_0 \in [a,\omega[$ так, щоб $Y(t(x),z_1) \in \Delta_{Y_0}$, $Y^{[1]}(t,z_1,z_2) \in \Delta_{Y_1}$, $|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\mathrm{sign}y_1^0 \in \Delta_{Y_1}$ при $t\in[t_0,\omega[$ та $|z_i| \le \frac{1}{2}$ $(i=1,2)$.

Тепер розглянемо систему диференціальних рівнянь (20) на множині

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D, \quad \text{де} \quad x_0 = \beta\ln|I(t_0)|,$$

$$D = \left\{(z_1,z_2) : |z_i| \le \frac{1}{2},\ i=1,2\right\}.$$

На цій множині праві частини цієї системи є неперервними функціями за змінною x та двічи неперервно диференційовними за змінними z_1, z_2, причому

$$F'_{z_1}(x,z_1) = BC\left(1-\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{(1-\sigma_1)\varphi_0(Y(t(x),z_1))}\right),$$

$$F''_{z_1^2}(x,z_1) = \frac{|1-\sigma_1|^{\frac{2}{1-\sigma_1}}Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{(\sigma_1-1)\varphi_0(Y(t(x),z_1))F(x,z_1)}\times\left[1-\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0(Y(t(x),z_1))}+\frac{Y(t(x),z_1)\varphi_0''(Y(t(x),z_1))}{\varphi_0'(Y(t(x),z_1))}\right],$$

$$K'_{z_1}(x,z_1,z_2) = \frac{BC}{F(x,z_1)}\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1'\left(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\right)}{\theta_1\left(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\mathrm{sign}y_1^0\right)},$$

$$K'_{z_2}(x,z_1,z_2) = \frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{(1+z_2)\theta_1\left(|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\mathrm{sign}y_1^0\right)},$$

$$K''_{z_1^2}(x,z_1,z_2) = K'_{z_1}(x,z_1,z_2)\frac{BC}{F(x,z_1)}\times\left[\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1''\left(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\right)}{\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}-\frac{F'_{z_1}(x,z_1)}{BC}+1\right],$$

$$K''_{z_2^2}(x,z_1,z_2) = K'_{z_2}(x,z_1,z_2)\times\frac{Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\theta_1''(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))}{(1+z_2)\theta_1'(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2))},$$

$$K''_{z_1,z_2}(x,z_1,z_2) = \frac{K'_{z_1}(x,z_1,z_2)}{1+z_2}\times$$

$$\times \left[\frac{Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\theta_1''(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2))}{\theta_1'(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2))} + 1 \right].$$

Розклавши при кожному фіксованому $x \in [x_0, +\infty[$ функції $F(x, z_1)$ та $|F(x, z_1)|^{\sigma_1 - 1}$ за формулою Тейлора з залишком у формі Лагранжа у околі $z_1 = 0$ до другого порядку включно, функцію $K(x, z_1, z_2)$ — у околі точки $(z_1, z_2) = (0, 0)$, а функцію $|1 + z_2|^{\sigma_1 - 1}$ — у околі точки $z_2 = 0$, перепишемо систему (20) у вигляді

$$\begin{cases} z_1' = F_1(x) + \sum\limits_{i=1}^{2} A_{1i}(x) z_i + R_1(x, z_1, z_2), \\ z_2' = F_2(x) + \sum\limits_{i=1}^{2} A_{2i}(x) z_i + R_2(x, z_1, z_2), \end{cases} \tag{24}$$

де

$$F_1(x) = \beta G(x) \left[\frac{1}{C} F(x, 0) - 1 \right],$$

$$F_2(x) = \beta \left[|BF(x, 0)|^{\sigma_1 - 1} K(x, 0, 0) \times \right.$$
$$\left. \times \mathrm{sign}(1 - \sigma_1) - BG(x) + M(x) \right],$$

$$A_{11}(x) = \beta G(x) \left[\frac{1}{C} F'_{z_1}(x, 0) - 1 \right],$$

$$A_{12}(x) = \frac{\beta}{C} G(x) F(x, 0),$$

$$A_{21}(x) = \beta \left[B(\mathrm{sign} y_1^0)(\sigma_1 - 1) \times \right.$$
$$\times |BF(x, 0)|^{\sigma_1 - 2} F'_{z_1}(x, 0) K(x, 0, 0) +$$
$$\left. + |BF(x, 0)|^{\sigma_1 - 1} K'_{z_1}(x, 0, 0) \right] \mathrm{sign}(1 - \sigma_1),$$

$$A_{22}(x) = \beta F_2(x) - \beta BG(x) +$$
$$+ \beta |BF(x, 0)|^{\sigma_1 - 1} \left[(\sigma_1 - 1) K(x, 0, 0) + \right.$$
$$\left. + K'_{z_2}(x, 0, 0) \right] \mathrm{sign}(1 - \sigma_1),$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \beta G(x) \frac{1}{C} \left[F'(x, 0) z_1 z_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} F''(x, \xi_1) z_1^2 (1 + z_2) \right],$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \beta [A_{21}(x) z_1 z_2 + A_{22}(x) z_2^2 +$$
$$+ (1 + z_2)\mathrm{sign}(1 - \sigma_1) |B|^{\sigma_1 - 1} ((1 + z_2)^{\sigma_1 - 1} \times$$
$$\times K(x, z_1, z_2)(\sigma_1 - 1) |F(x, \xi_2)|^{\sigma_1 - 3} ((\sigma_1 - 2) \times$$
$$\times (F'_{z_1}(x, \xi_2))^2 + F(x, \xi_2) F''_{z_1^2}(x, \xi_2)) \frac{z_1^2}{2} +$$
$$+ (\sigma_1 - 1) |F(x, 0)|^{\sigma_1 - 2} F'_{z_1}(x, 0) z_1 (K(x, z_1, z_2) \times$$
$$\times ((1 + z_2)^{\sigma_1 - 1} - 1) + K(x, z_1, z_2) - K(x, 0, 0)) +$$
$$+ |F(x, 0)|^{\sigma_1 - 1} (K(x, z_1, z_2)(\sigma_1 - 1)(\sigma_1 - 2) \times$$
$$\times (1 + \xi_5)^{\sigma_1 - 3} \frac{z_2^2}{2} +$$
$$+ (1 + (\sigma_1 - 1) z_2) \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} K''_{z_i, z_j}(x, \xi_3, \xi_4) z_i z_j))],$$

де

$$|\xi_i| < |z_i| \le \frac{1}{2} \quad (i = 1, ..., 5).$$

Враховуючи (23) й те, що функція $\varphi_1(z)$ задовольняє умову S_1, маємо

$$\theta_1 \left(Y^{[1]}(t(x), 0, 0) \right) \sim \theta_1 \left(Y_1^{[1]}(t(x)) \right)$$

$$\text{при } x \to +\infty$$

Звідси $\lim\limits_{x \to +\infty} K(x, 0, 0) = 1$ та згідно (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} K'_{z_i}(x, 0, 0) = 0$ $(i \in \{1, 2\})$. Тому, в силу (22), умов (9) та (21), отримаємо, що

$$\lim_{x \to +\infty} F_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

гранична матриця коефіцієнтів лінійної частини системи (24) має вид

$$A = \lim_{x \to +\infty} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix}$$

та

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \to 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \ (i = 1, 2)$$

$$\text{рівномірно по } \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

Застосуємо тепер до системи (24) перетворення

$$z_2 = v_1, \qquad z_1 = v_2 + Ch(x) v_1, \tag{25}$$

де v_1, v_2— нові невідомі функції,

$$C = \frac{1}{1-\sigma_1}, \ h(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))J'(t(x))}{J(t(x))}. \quad (26)$$

Оскільки існує скінченна, або нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)}$, то внаслідок леми 10.6 з [15] та виду функції J, третя з умов (9) означає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J''(t)}{J'(t)} = -1.$$

Таким чином, з урахуванням (21) будемо мати

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{G(x)} = \sigma_1 - 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{G(x)} = \quad (27)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \beta\left(1 + \frac{\pi_\omega(t)J''(t)}{J'(t)} - \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)})\right) = 0.$$

За результатом перетворення (25), враховуючи (26) та (27), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = F_2(x) + \sum\limits_{i=1}^{2} B_{1i}(x)v_i + N_1(x, v_1, v_2), \\ \\ v_2' = H(x) + \sum\limits_{i=1}^{2} B_{2i}(x)v_i + N_2(x, v_1, v_2), \end{cases} \quad (28)$$

де

$$H(x) = F_1(x) - Ch(x)F_2(x),$$
$$B_{11}(x) = A_{22}(x) + Ch(x)A_{21}(x),$$
$$B_{12}(x) = A_{21}(x),$$
$$B_{21}(x) = -Ch'(x) + A_{12}(x)$$
$$+Ch(x)(A_{11}(x) - A_{22}(x)) - A_{21}(x)(Ch(x))^2,$$
$$B_{22}(x) = A_{11}(x) - Ch(x)A_{21}(x),$$
$$N_1(x, v_1, v_2) = R_2(x, v_2 + Ch(x)v_1, v_1),$$
$$N_2(x, v_1, v_2) = R_1(x, v_2 + Ch(x)v_1, v_1)-$$
$$-Ch(x)R_2(x, v_2 + Ch(x)v_1, v_1)).$$

З виду функцій I та J та означення функції G випливає, що

$$\int_{x_0}^{+\infty} |G(x)|dx = +\infty,$$

Використовуючи це співвідношення, властивості коефіцієнтів системи (24), (26) та (27), маємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F_2(x)}{B_{11}(x)} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{B_{22}(x)} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{B_{11}(x)} = -\beta, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{B_{22}(x)} = -\beta,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A_{21}(x)}{B_{11}(x)} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{B_{21}(x)}{B_{22}(x)} = 0,$$

$$\int_{x_0}^{+\infty} |B_{ii}(x)|dx = +\infty, \ (i = 1, 2)$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{N_i(x, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

рівномірно по $\quad x \in [x_0, +\infty[$.

Тоді, згідно з теоремою 1.3 та зауваженням 1.4 з [16] система (28) має хоча б один розв'язок $\{v_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, що прямує до нуля при $x \to +\infty$. Йому, внаслідок замін (18), (19) та перетворення (25), відповідає розв'язок y рівняння (1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi(y(t)) \sim |1 - \sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J(t)\text{sign}y_1^0,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{(1-\sigma_1)J'(t)}{(1-\sigma_1-\sigma_0)J(t)}.$$

Враховуючи (17), перше з них перепишемо у виді

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} \sim CJ(t) \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Таким чином, y є зростаючим $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком рівняння (1). Теорему 1 повністю доведено.

Теорема 2. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, виконується (8) та при кожному значенні $i \in \{0, 1\}$ функція $\varphi_i(z)$ задовольняє умову S_i. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ наступні асимптотичні зображення*

$$y(t) \sim \text{sign}y_0^0 \left(C_1 \frac{\theta_0\left(|J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \text{sign}y_0^0\right)}{|J(t)|^{\sigma_1-1}} \right)^{\vartheta},$$

$$y'(t) \sim |J'(t)| \mathrm{sign} y_1^0 \times \tag{29}$$
$$\times \left(C_2 |J(t)|^{\sigma_0} \theta_0 \left(|J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \mathrm{sign} y_0^0 \right) \right)^{\vartheta},$$

де

$$\vartheta = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$$
$$C_1 = |1-\sigma_1|^{\sigma_1} |1-\sigma_1-\sigma_0|^{1-\sigma_1},$$
$$C_2 = |1-\sigma_1|^{1-\sigma_0} |1-\sigma_1-\sigma_0|^{\sigma_0}.$$

Доведення. З теореми 1 випливає, що при виконанні умов (8) та (9) кожний $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язок $y : [t_y, \omega[\to R$, допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (10). Інтегруючи друге з них на проміжку $[t_y, t] \subset [t_y, \omega[$ отримаємо

$$y(t) = |J(t)|^{\vartheta(1-\sigma_1)+\varepsilon(t)} \mathrm{sign} y_0^0, \tag{30}$$

де $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \varepsilon(t) = 0$.

Покладемо $L(z) = |J(t(z))|^{\varepsilon(t(z))}$, де $t(z)$ — функція, обернена для функції $z = |J(t)|^{\vartheta(1-\sigma_1)}$. З урахуванням (30) та другого із співвідношень (10) будемо мати

$$\lim_{\substack{z\to Y_0 \\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J(t)}{\vartheta(1-\sigma_1)J'(t)} \times$$
$$\times \left(\varepsilon'(t) \ln |J(t)| + \frac{\varepsilon(t) J'(t)}{J(t)} \right) =$$
$$= \frac{1}{\vartheta(1-\sigma_1)} \lim_{t\uparrow\omega} \left(\frac{J(t) y'(t)}{\vartheta(1-\sigma_1)J'(t)y(t)} - 1 \right) = 0.$$

Звідси, оскільки функція φ_0 задовольняє умову S_0, отримаємо

$$\theta_0(y(t)) = \theta_0 \left(|J(t)|^{\vartheta(1-\sigma_1)} L \left(|J(t)|^{\vartheta(1-\sigma_1)} \right) \right) =$$
$$= \theta_0 \left(|J(t)|^{\vartheta(1-\sigma_1)} \right) (1+o(1)) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

На підставуі цього співвідношення перше з зображень (10) може бути переписано у вигляді

$$|y(t)|^{\frac{1}{\vartheta}} \sim |1-\sigma_1|^{\sigma_1} |\frac{1}{\vartheta} J(t)|^{1-\sigma_1} \times$$
$$\times \theta_0 \left(|J(t)|^{\vartheta(1-\sigma_1)} \mathrm{sign} y_0^0 \right) \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Звідси, з урахуванням знаку y, слідує перше з зображень (29). Після підстановки його до другого з зображень (10), отримаємо друге з зображень (29). Теорему 2 повністю доведено.

Проілюструємо отримані результати на прикладі диференціального рівняння

$$y'' = A t^\gamma \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \tag{31}$$

де $A \in R \setminus \{0\}$, $\gamma \in R$, $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i} |ln|z||^{\mu_i}$, $\sigma_i, \mu_i, \in R$, (i=0,1), $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, $\sigma_1 \neq 1$. Внаслідок структури функцій φ_i $(i = 0, 1)$, рівняння (31) допускає застосування теореми 2. При цьому ми враховуємо, що це рівняння є рівнянням (1), у якому $\alpha_0 = \mathrm{sign} A$, $p(t) = |A| t^\gamma$. Нам будуть потрібні наступні допоміжні позначення:

$$K_1 = -A \left(|A|^{\sigma_0+\sigma_1} \left| \frac{1-\sigma_1-\sigma_0}{\mu_1+1-\sigma_1} \right|^{\sigma_0-\mu_0} \right)^{\vartheta},$$
$$K_2 = -A \left(|A|^{\sigma_0+\sigma_1} \left| \frac{\mu_1+\sigma_0}{\mu_1} \right|^{\sigma_0-\mu_0} \right)^{\vartheta},$$
$$K_3 = A \left(|\omega|^\gamma |A|^{\sigma_0+2} \left| \frac{1+\sigma_0}{1-\mu_1} \right|^{\sigma_0-\mu_0} \right)^{\vartheta},$$
$$K_4 = A \left(|\omega|^\gamma |A|^{\sigma_0+2} |1+\sigma_0|^{\sigma_0-\mu_0} \right)^{\vartheta}.$$

Спочатку дослідимо питання про наявність та асимптотику $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків. При цьому можемо вважати, що $a = 2$.

У даному випадку

$$I(t) = |A| \int_{A_{+\infty}}^{t} \tau^\gamma d\tau, \quad J(t) =$$
$$= \left| \frac{1}{1-\sigma_1} \right|^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_1}} \int_{B_{+\infty}}^{t} |I(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \ln^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_1}} |I(\tau)| \, d\tau.$$

Тому, з урахуванням вибору границь інтегрування $A_{+\infty}$ та $B_{+\infty}$, отримаємо при $t \to +\infty$ зображення

$$I(t) \sim \begin{cases} \frac{|A|}{\gamma+1} t^{\gamma+1}, & \text{якщо } \gamma \neq -1, \\ |A| \ln t, & \text{якщо } \gamma = -1. \end{cases} \tag{32}$$

У випадку $\gamma \neq -1$ маємо при $t \to +\infty$

$$J(t) \sim \frac{1-\sigma_1}{\gamma+2-\sigma_1}\left|\frac{A|\gamma+1|^{\mu_1-1}}{|1-\sigma_1|^{\mu_1}}\frac{\ln^{\mu_1} t}{t^{\sigma_1-\gamma-2}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}, \tag{33}$$

якщо $\sigma_1-\gamma \neq 2$,

$$J(t) \sim \frac{1-\sigma_1}{\mu_1+1-\sigma_1}\left|\frac{A}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\ln t)^{\frac{\mu_1+1-\sigma_1}{1-\sigma_1}}, \tag{34}$$

якщо $\sigma_1-\gamma = 2,\ \mu_1-\gamma \neq 1$,

$$J(t) \sim \left|\frac{A}{\gamma+1}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\ln\ln t, \tag{35}$$

якщо $\sigma_1-\gamma=2$, $\mu_1-\gamma=1$. Якщо $\gamma=-1$, то при $t \to +\infty$ має місце зображення

$$J(t) \sim \left|A|1-\sigma_1|^{-\mu_1}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} t(\ln t)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\ln\ln t)^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_1}}. \tag{36}$$

Крім того,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{(J'(t))^2}{J''(t)J(t)} = \begin{cases} \frac{\gamma+2-\sigma_1}{\gamma+1}, \text{якщо } \gamma \neq -1, \\ \infty, \text{якщо } \gamma=-1. \end{cases} \tag{37}$$

Тоді внаслідок (32) – (36) та (37) з теореми 2 отримаємо, що для існування у рівняння (31) $P_{+\infty}(Y_0,Y_1,0)$- розв'язків необхідно і достатньо виконання умов $\gamma-\sigma_1=-2$, $\gamma\neq-1$. Більш того, при $\mu_1 \neq \sigma_1-1$ для кожного такого $P_{+\infty}(Y_0,Y_1,0)$-розв'язку мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$\begin{gathered} y(t) \sim \frac{K_1|\ln t|^{\vartheta(\mu_1+1-\sigma_1)}}{\vartheta(\mu_1+1-\sigma_1)}(\ln|\ln t|)^{\vartheta\mu_0}, \\ y'(t) \sim \frac{K_1}{t}|\ln t|^{\vartheta(\mu_1+\sigma_0)}(\ln|\ln t|)^{\vartheta\mu_0}, \end{gathered} \tag{38}$$

а при $\mu_1=\sigma_1-1$ — зображення виду

$$\begin{gathered} y(t) \sim \frac{K_2(\ln|\ln t|)^{\vartheta(1-\sigma_1)}}{\vartheta(1-\sigma_1)(\ln\ln|\ln t|)^{-\vartheta\mu_0}}, \\ y'(t) \sim \frac{K_2(\ln|\ln t|)^{\vartheta\sigma_0}}{t\ln t}(\ln\ln|\ln t|)^{\vartheta\mu_0}. \end{gathered} \tag{39}$$

Оберемо тепер за ω будь яке число з проміжку $(0,+\infty)$ та дослідимо питання про наявність та асимптотику при $t \uparrow \omega$ $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків рівняння (31). У цьому випадку з теореми 2 випливає, що для існування у рівняння (31) $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків необхідно та достатньо виконання умови $\sigma_1=2$. Більш того, при $\mu_1\neq1$ для кожного такого $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\begin{gathered} y(t) \sim K_3\frac{(1+\sigma_0)|\ln|\omega-t||^{\frac{1-\mu_1}{1+\sigma_0}}}{(1-\mu_1)(\ln|\ln|\omega-t||)^{\frac{\mu_0}{1+\sigma_0}}}, \\ y'(t) \sim \frac{K_3|\ln|\omega-t||^{\frac{-\sigma_0-\mu_1}{1+\sigma_0}}}{(t-\omega)(\ln|\ln|\omega-t||)^{\frac{\mu_0}{1+\sigma_0}}}, \end{gathered} \tag{40}$$

а при $\mu_1=1$ — зображення виду

$$\begin{gathered} y(t) \sim K_4\frac{(1+\sigma_0)(\ln|\ln|\omega-t||)^{\frac{1}{1+\sigma_0}}}{(\ln\ln|\ln|\omega-t||)^{\frac{\mu_0}{1+\sigma_0}}}, \\ y'(t) \sim \frac{K_4|\ln|\omega-t||^{\frac{-\sigma_0}{1+\sigma_0}}}{(t-\omega)(\ln\ln|\ln|\omega-t||)^{\frac{\mu_0}{1+\sigma_0}}}. \end{gathered} \tag{41}$$

Питання про існування та асимптотику при $t\downarrow\omega$ $(0\le\omega<+\infty)$ розв'язків, що визначені у правому околі ω вирішується шляхом заміни $\omega-\tau=t-\omega$. Отримане після такої заміни рівняння слід вже досліджувати при $\tau\uparrow\omega$ за допомогою теореми 2. Розв'язок рівняння (31), що відповідає при цьому $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язку, будемо називати $P_{\omega+}(Y_0,Y_1,0)$-розв'язком. Таким чином отримаємо, що для існування у рівняння (31) $P_{\omega+}(Y_0,Y_1,0)$- розв'язків необхідно й досить умови $\sigma_1=2$. Більш того, при $\mu_1\neq1$ для кожного такого $P_{\omega+}(Y_0,Y_1,0)$-розв'язку мають місце при $t\downarrow\omega$ асимптотичні зображення (40), а при $\mu_1=1$ — зображення (41). При $\omega=0$ аналогічно отримаємо, що для існування у рівняння (31) $P_{0+}(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків необхідно і достатньо виконання умов $\gamma-\sigma_1=-2$, $\gamma\neq-1$. Більш того, при $\mu_1\neq\sigma_1-1$ для кожного такого розв'язку мають місце при $t\downarrow0$ асимптотичні зображення (38), а при $\mu_1=\sigma_1-1$ — зображення (39).

Висновки. Для нелінійних диференціальних рівнянь вигляду (1) вперше отримано асимптотичні формули розв'язків, що відмінні від розв'язків вигляду $y \sim C$ та $y \sim C\pi_\omega(t)$ при $t \uparrow \omega$, де $C \in R \setminus \{0\}$. Цього вдалося домогтися завдяки розробці методу дослідження асимптотичного поводження достатньо широкого класу $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків. У даній роботі отримано необхідні та достатні умови існування таких розв'язків, а також їх асимптотичні зображення в особливому випадку, коли $\lambda_0 = 0$.

Встановлені результати дозволяють одержувати асимптотичні зображення не тільки для правильних [1], але й для різних типів сингулярних розв'язків рівняння (1). Результати роботи проілюстровано на прикладі рівняння (31), частинними випадком якого є рівняння типу Емдена-Фаулера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.-1990. - М.: Наука. - 430с.

2. *Костин А.В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена-Фаулера//Докл. АН СССР. - 1971. - 200, № 1. - С. 28-31.

3. *Костин А.В., Евтухов В.М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения.// Докл. АН СССР.– 1976.– 231, № 5.– С. 1059-1062.

4. *Евтухов В.М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка.// Докл. АН СССР.– 1977.– 233, № 4.– С. 531–534.

5. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.// Сообщ. АН ГССР.– 1982.– 106, № 3.– С. 473–476.

6. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr – 1984. - V. 115.- S. 215-236.

7. *Евтухов В.М.* Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1990. - 26, № 5. - С. 776 - 787.

8. *Wong P.K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations
Pacific. J.Math. - 1963. - V. 13 - P. 737-760.

9. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic Properties of Solutions of the Equation $y'' = f(x)\Phi(y)$
Math. Zeit. - 1976. - V. 149. - P. 261-266.

10. *Talliaferro S.D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$// SIAM J. Math. Anal. - 1981. - 12, № 6. - P. 1 - 24.

11. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations of solutions of nonlinear second order differential equations // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phis. - 2003. – 30. – P. 153—158.

12. *Кирилова Л.О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена-Фаулера// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. - 2004. - Вип. 228. Математика. - С. 30 - 35.

13. *Евтухов В.М., Кириллова Л.А* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. - 2005, - 41, № 8. - С. 1053-1061.

14. *Кириллова Л.А* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Нелінійні коливання - 2005, - 8, № 1. - С. 18-28.

15. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Дис....докт. физ.-мат. наук.- Киев.- 1998.

16. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. - 2003. - 39, № 4. - С. 433-444.