УДК 517.929

©2008 р. Я.Й. Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Обгрунтовано метод усереднення за швидкими змінними для багаточастотної системи із змінним запізненням. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

An averaging method over fast variables is justified for multifrequence system which variable delay. For error of the method, an estimate evidently dependent of a small parameter is obtained.

У даній статті будується оцінка осциляційного інтеграла [1], коли функція, що характеризує відхилення аргументу, залежить від повільного часу $\tau = \varepsilon t$ і малого параметра ε. Вона є продовженням робіт [2, 3]. У статті [2] вивчено випадок обмеженого запізнення і лінійно перетвореного аргументу, а в [3] – сталого запізнення. На підставі оцінки осциляційного інтеграла одержується відповідна оцінка похибки методу усереднення для системи з повільними і швидкими змінними, яка в процесі еволюції проходить через резонанси.

Такий підхід до обгрунтування методу усереднення запропонований в роботах А.М.Самойленка і Р.І. Петришина [1, 4], а одержані результати підсумовані в монографії [5], в якій наведена бібліографія відповідних праць. Інші схеми усереднення для багаточастотних систем без запізнення розглядалися, наприклад, в [5 – 9], а для систем із запізненням – в [10 – 12].

1. Розглядається система диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \qquad (1)$$

де $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in [0, L]$. Вектор-функція $F := [A, B]$ – 2π-періодична за компонентами векторів φ і φ_Δ. Векторну змінну a прийнято називати повільною, а φ – швидкою [5]. Відхилення аргументу в a і φ характеризується функцією $\Delta = \Delta(\tau, \varepsilon)$, $\Delta : [0, L] \times (0, \varepsilon_0] \to [0, L]$, $x_\Delta(\tau, \varepsilon) = x(\Delta(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$, $\varphi_\Delta(\tau, \varepsilon) = \varphi(\Delta(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$.

Відповідна (1) усереднена система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = A_0(\tau, \overline{a}, \overline{a}_\Delta),$$
$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B_0(\tau, \overline{a}, \overline{a}_\Delta), \qquad (2)$$

де вектор-функція $F_0(\tau, u, v) := [A_0, B_0] = \dfrac{1}{(2\pi)^{2m}} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} F(\tau, u, v, \varphi, \psi) d\varphi d\psi.$

Усереднена система (2) значно простіша порівняно (1), оскільки рівняння для $\overline{a}$ не залежить від швидкої змінної. Якщо розв'язок $\overline{a} = \overline{a}(\tau, \varepsilon)$ знайдемо, що

$$\overline{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \overline{\varphi}(0, \varepsilon) + \int\limits_0^\tau \Big[\frac{\omega(s)}{\varepsilon} + B_0(s, \overline{a}(s, \varepsilon), \overline{a}(\Delta(s, \varepsilon), \varepsilon))\Big] ds.$$

Умовою резонансу в системі (1) в точці $\tau \in [0, L]$ служить виконання точної або наближеної рівності [2]:

$$\gamma_\lambda(\tau, \varepsilon) \cong 0, \qquad (3)$$

де $\lambda := [k, l] \in Z^{2m} \setminus \{0\}$,

$$\gamma_\lambda(\tau,\varepsilon) := (\lambda^{(1)}, \omega(\tau)) + (\lambda^{(2)}, \omega_\Delta(\tau)) \frac{d\Delta(\tau,\varepsilon)}{d\tau}. \quad (4)$$

Якщо $l = 0$, то маємо умову резонансу частот для систем без запізнення [5 – 8]. В [10, 11] така умова використовувалась і для багаточастотних систем із запізненням.

Залежність γ_λ від малого параметра ускладнює обгрунтування методу усереднення, оскільки ширина резоананснoї зони і довжина проміжків, на яких система залишається в зоні, залежить від ε.

2. Системі (1) відповідає осциляційний інтеграл вигляду

$$I_\lambda(\tau,\varepsilon) = \\ = \int_0^\tau f(s,\varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_\lambda(s_1,\varepsilon)ds_1\right\}ds, \quad (5)$$

де f – задана функція, $\lambda := [\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}] \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$. Такого типу інтеграл одержується, якщо записати систему (1) в інтегральній формі і в розкладі Фур'є за змінними φ, φ_Δ вектор-функції F підставити вираз для $\varphi(\tau,\varepsilon)$.

Запровадимо позначення: $W_p(\tau,\varepsilon)$ – $(p \times 2m)$-матриця, $p \geq 2m$, перші m стовпців якої утворені функціями $\omega_\nu^{(j)}(\tau)$, $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, 2p-1$, елементи решти m стовпців – $\left(\omega_\nu(\Delta(\tau,\varepsilon))\dfrac{d\Delta(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right)^{(j)}$; $\|\lambda\| := \sum|\lambda_\nu|$.

Припустимо, що для $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0])$ існує матриця $(W_p^T(\tau,\varepsilon)W_p(\tau,\varepsilon))^{-1}$ і

$$\|(W_p^T(\tau,\varepsilon)W_p(\tau,\varepsilon))^{-1}W_p^T(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma\varepsilon^{-\beta}, \quad (5)$$

де $0 < \beta < (p+1)^{-1}$, $\sigma > 0$.

У статті [2] розглядався випадок, коли $\beta = 0$. Якщо $p = 2m$, то замість нерівності (6) одержується умова

$$\|(W_p^T(\tau,\varepsilon))^{-1}\| < \sigma\varepsilon^{-\beta}. \quad (7)$$

Приклад 1. Нехай $2m = L = 2$, $\omega(\tau) = 1 + \tau$, $\Delta(\tau,\varepsilon) = \tau - \sqrt[4]{\varepsilon}$. Тоді

$$(W_2^T(\tau,\varepsilon))^{-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\begin{bmatrix} 1+\tau & 1 \\ 1+\tau+\sqrt[4]{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix}$$

і $\|(W_2^T)^{-1}\| \leq 4/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\beta = 1/2$.

Якщо $\Delta = \Delta(\tau)$, то достатньо існування матриці $W_p^{-1}(\tau)$.

Приклад 2. Нехай $2L = m = 1$, $\omega(\tau) = 1 + \tau$, $\Delta(\tau) = \tau - \ln(\tau+1)$. Тоді

$$W_2(\tau) = \begin{bmatrix} 1+\tau & \tau - \dfrac{\tau\ln(\tau+1)}{\tau+1} \\ 1 & 1 - \dfrac{\ln(\tau+1)+\tau}{(\tau+1)^2} \end{bmatrix}$$

і $\det W_2(\tau) = (\ln(\tau+1)-1)(\tau+1)^{-1} > 0$.

Теорема 1. *Нехай:*

1) функції $\omega_\nu \in C^{p-1}[0, L]$, $\nu = 1, \ldots, m$;

2) $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функція $\Delta(\cdot,\varepsilon)$ p разів диференційовна на $[0, L]$, $\Delta^p(\cdot,\varepsilon) \in \mathrm{Lip}[0, L]$ і функція Δ разом з похідними до порядку $p-1$ і сталою Ліпшиця рівномірно обмежені;

3) $f(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0, L]$ $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і обмежена разом з похідною по τ рівномірно відносно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

4) виконується умова (6) або (7).

Тоді $\exists\bar\varepsilon_0$, $\bar\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0$, таке, що для всіх $(\tau,\varepsilon) \in [0, L] \times (0, \bar\varepsilon_0]$ справджується нерівність

$$\|I_\lambda(\tau,\varepsilon)\| \leq c_4\varepsilon^\alpha\Big[\Big(1 + \frac{1}{\|\lambda\|}\Big)\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| + \\ + \frac{1}{\|\lambda\|}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|\Big], \quad (8)$$

$$\alpha = (1 - \beta(p+1))/p,$$

де стала $c_4 > 0$ і не залежить від λ, τ і ε.

Доведення. Застосуємо схему доведення, запропоновану в [4]. Нехай

$$\Omega_p(\tau,\varepsilon) := \mathrm{col}[\gamma(\tau,\varepsilon), \gamma'(\tau,\varepsilon), \ldots, \gamma^{(p-1)}(\tau,\varepsilon)].$$

Із рівності

$$W_p(\tau,\varepsilon)\lambda = \Omega_p(\tau,\varepsilon)$$

одержимо

$$\lambda = (W_p^T(\tau,\varepsilon)W_p(\tau,\varepsilon))^{-1}W_p(\tau,\varepsilon)\Omega_p(\tau,\varepsilon),$$

звідки маємо

$$\|\Omega_p(\tau,\varepsilon)\| \geq \frac{\|\lambda\|}{\sigma}\varepsilon^\beta.$$

Для кожного λ, τ і ε знайдеться ціле $q = q(\tau, \varepsilon, \lambda)$ таке, що

$$|\gamma_\lambda^{(q)}(\tau;\varepsilon)| = \max_{0\le j\le p-1} |\gamma_\lambda^{(j)}(\tau,\varepsilon)| \ge \frac{\|\lambda\|}{p\sigma}\varepsilon^\beta. \quad (9)$$

Розіб'ємо проміжок $[0,\tau]$ точками t_ν на проміжки T_ν довжиною

$$\delta(\varepsilon) = \delta_0\varepsilon^\beta, \delta_0 > 0.$$

Тоді

$$[0,\tau] = \Big(\bigcup_{\nu=0}^{N-1} T_\nu\Big)\bigcup[t_N,\tau],$$

де $N(\varepsilon) = [L\delta_0^{-1}\varepsilon^\alpha]$.

Зафіксуємо вектор $\lambda \ne 0$. Нехай $\bar t_\nu = (t_\nu + t_{\nu+1})/2$ і $q_\nu = q(\bar t_\nu, \varepsilon, \lambda)$.

Тоді, для всіх $(t,\varepsilon) \in T_\nu \times (0,\varepsilon_0]$ справджуються нерівності:

$$|\gamma_\lambda^{(q_\nu)}(t,\varepsilon)| \ge \frac{\|\lambda\|}{c_1}\varepsilon^\beta, \quad c_1 = 2p\sigma; \quad (10)$$

$$|\gamma_\lambda^{(j)}(t,\varepsilon)| \le 4|\gamma_\lambda^{q_\nu}(t,\varepsilon)|, j = 0,\dots,p-1. \quad (11)$$

Справді,

$$|\gamma_\lambda^{(q_\nu)}(t,\varepsilon)| \ge \frac{\|\lambda\|}{p\sigma}\varepsilon^\beta - |(\lambda^{(1)}, \omega^{(q_\nu)}(t) -$$

$$-\omega^{(q_\nu)}(\bar t_\nu))| - |(\lambda^{(2)}, (\omega_\Delta(t)\Delta'(t,\varepsilon))^{(q_\nu)} -$$

$$-(\omega_\Delta(\bar t)\Delta'(\bar t,\varepsilon))^{(q_\nu)})| \ge \frac{\|\lambda\|}{p\sigma}\varepsilon^\beta - (\|\lambda^{(1)}\|\bar c_2 +$$

$$+\|\lambda^{(2)}\|\{\bar{\bar c}_2)\delta_0\varepsilon^\beta \ge \frac{\|\lambda\|}{c_1}\varepsilon^\beta,$$

якщо $\delta_0 \le (2p\sigma(\bar c_2) + \bar{\bar c})^{-1}$, $\bar c_1$ і $\bar{\bar c}_2$ – деякі сталі, існування яких забезпечується умовами 1 і 2 теореми.

Друга з оцінок одержується із такого ланцюжка нерівностей:

$$|\gamma_\lambda^j(t,\varepsilon)| \le |\gamma^{(j)}(\bar t,\varepsilon)| + |\gamma^{(j)}(t,\varepsilon) - \gamma^{(j)}(\bar t_\nu,\varepsilon)| \le$$

$$\le \frac{\|\lambda\|}{p\sigma}\varepsilon^\beta + \varepsilon^\alpha\|\lambda\| \le 2|\gamma_\lambda^{(q_\nu)}(t,\varepsilon)| \le 4|\gamma_\lambda^{(q_\nu)}(t,\varepsilon)|.$$

Зафіксуємо $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$. Нехай $q_\nu = 0$ на T_ν, тобто виконується нерівність (10) для $q = 0$.

Проінтегрувавши ОІ частинами на T_ν із врахуванням (10) для $q_\nu = 0$ і (11) для $h = 1$ одержимо

$$\Big\|\int_{T_\nu} g(s,\varepsilon)ds\Big\| \le \frac{c_1\varepsilon^{1-\beta}}{\|\lambda\|}\Big[2(1+2\delta(\varepsilon))\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| +$$

$$\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|\Big], \quad (12)$$

де $G_0 = [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$, $g(s,\varepsilon) = f(s,\varepsilon)\exp\Big\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_\lambda(s,\varepsilon)ds_1\Big\}$.

Нехай для кожного фіксованого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0$ $q_\nu \ge 1$ на T_ν. Із (10) випливає, що $\gamma_\lambda^{q_\nu-1}(t,\varepsilon) = 0$ хіба що в одній точці або не більше одного разу графік функції $\gamma_\lambda^{q-1}(t,\varepsilon)$ входить або виходить із резонансної зони

$$|\gamma_\lambda(t,\varepsilon)| \le c_3\|\lambda\|\varepsilon^\chi,$$

де c_3 і $\chi > 0$ – деякі числа.

Аналогічно, якщо $q_\nu \ge 2$, то $\gamma_\lambda^{(q_\nu-2)}(t,\varepsilon) = 0$ не більше, ніж у двох точках, або не більше одного разу входить і виходить із резонансної зони. Для $\gamma_\lambda(t,\varepsilon)$ на T_ν маємо не більше p нулів, включаючи входження або вихід із резонансної зони. В підсумку одержимо не більше $M = p(p+1)/2$ нулів, входжень і виходів із резонансної зони. Для кожного нуля $z_\nu^i(\varepsilon)$ функцій $\gamma_\lambda^{(q-1)}(t,\varepsilon), \dots, \gamma_\lambda(t,\varepsilon)$ побудуємо проміжок

$$[z_\nu(\varepsilon) - \mu(\varepsilon), z_\nu(\varepsilon) + \mu(\varepsilon)], \mu(\varepsilon) < \min(2, \delta(\varepsilon)/M).$$

Об'єднання цих проміжків з $[t_\nu(\varepsilon), t_\nu(\varepsilon) + \mu(\varepsilon)/2]$ і $[t_\nu(\varepsilon) - \mu(\varepsilon)/2, t_\nu(\varepsilon)]$, якщо такі існують, позначимо через R_ν і назвемо резонансною множиною. Множину $N_\nu = \overline{T_\nu \setminus R_\nu}$ – нерезонансною.

На резонансній множині R_ν

$$\Big\|\int_{R_\nu} g(s,\varepsilon)ds\Big\| \le M\mu(\varepsilon)\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\|. \quad (13)$$

На нерезонансній множині

$$|\gamma_\lambda^{q_\nu-j}(t,\varepsilon)| \ge \frac{\|\lambda\|}{c_1}\varepsilon^\beta\Big(\frac{\mu}{2}\Big)^j, j = 1,\dots,q_\nu,$$

$$|\gamma_\lambda(t,\varepsilon)| \geq \frac{\|\lambda\|}{c_1}\varepsilon^\beta\Big(\frac{\mu}{2}\Big)^{p-1}. \qquad (14)$$

Нехай $\mu = 2\varepsilon^{\chi_1}$, $2c_1c_3 = 1$,

$$\chi = \beta + \chi_1(p-1). \qquad (15)$$

Тоді на нерезонансній множині N_ν

$$|\gamma_\lambda(t,\varepsilon)| \geq \frac{\|\lambda\|}{c_1}\varepsilon^\beta\Big(\frac{\mu}{2}\Big)^{p-1} \geq 2c_3\|\lambda\|\varepsilon^\chi.$$

Проінтегрувавши на кожному з відрізків $[\alpha_j, \beta_j]$, що складають N_ν, $j = 1, \dots, M_1$, $M_1 \leq M+1$, на підставі (14) і вибраних $\mu(\varepsilon)$, χ, одержимо

$$\Big\|\int\limits_{N_\nu} g(s,\varepsilon)ds\Big\| \leq \sum_{j=1}^{M_1}\Big\|\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} g(s,\varepsilon)ds\Big\| \leq$$

$$\leq \varepsilon^{1-\chi}\Big(\frac{4c_1M}{\|\lambda\|}\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| +$$

$$+\frac{c_1\delta(\varepsilon)}{\|\lambda\|}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|\Big). \qquad (16)$$

Таким чином, із (13) і (16) маємо

$$\Big\|\int\limits_{T_\nu} g(s,\varepsilon)ds\Big\| \leq \Big(2M\varepsilon^{\chi_1} + \varepsilon^{1-\chi}\frac{4c_1M_1}{\|\lambda\|}\times$$

$$\times\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| +$$

$$+\varepsilon^{1-\chi}\frac{c_1\delta(\varepsilon)}{\|\lambda\|}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|. \qquad (17)$$

Оскільки $\delta(\varepsilon)N(\varepsilon) \leq L$, то із (12) і (17) одержимо нерівність

$$\|I_\lambda(\tau,\varepsilon)\| \leq \frac{4c_1L}{\|\lambda\|}\varepsilon^{1-2\beta}\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| +$$

$$+\frac{c_1L}{\|\lambda\|}\varepsilon^{1-\beta}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|$$

у нерезонансному випадку, якщо $2\delta_0\varepsilon^\beta \leq 1$. Якщо ж $q_\nu \geq 1$ для $\nu = 1, \dots, N(\varepsilon)$, то

$$\|I_\lambda(\tau,s)\| \leq \frac{2L}{\delta_0}\Big(M\varepsilon^{\chi_1-\beta} + \frac{2c_1M_1}{\|\lambda\|}\varepsilon^{1-\beta-\chi}\Big)\times$$

$$\times\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| + \frac{c_1L}{\|\lambda\|}\varepsilon^{1-\chi}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|.$$

Із умови $\chi_1 - \beta = 1 - \beta - \chi$ знаходимо $\chi_1 = (1-\beta)/p$. Тоді

$$\alpha := \chi_1 - \beta = (1 - \beta(p+1))/p.$$

Далі, $1 - \chi = \alpha - \beta$, $1 - 2\beta = \chi_1 - \beta + \chi_2$, де $\chi_2 = 1 - 3\beta - (1+\beta)/p$. Нехай

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 := \min\Big(\Big(\frac{\delta_0}{2}\Big)^{\frac{1}{\chi_1-\beta}}, \Big(\frac{M_1}{\delta_0}\Big)^{\frac{1}{\chi_2}}\Big).$$

Тоді

$$\|I_\lambda(\tau,s)\| \leq \varepsilon^\alpha\Big(\frac{2c_1M_1}{\|\lambda\|} +$$

$$+\frac{2LM}{\delta_0}\Big)\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| + \frac{\varepsilon^\alpha c_1L}{\|\lambda\|}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|.$$

Звідси одержується оцінка (8), якщо $c_4 = \max(2c_1M_1, 2LM, c_1L)$.

Наслідок 1. Якщо $\lambda \in Z^{2m} \setminus \{0\}$, то $\|\lambda\| \geq 1$ і нерівність (8) набуває вигляду

$$\|I_\lambda(\tau,\varepsilon)\| \leq c_5\varepsilon^\alpha\Big(\sup_{G_0}\|f(s,\varepsilon)\| +$$

$$+\frac{1}{\|\lambda\|}\sup_{G_0}\Big\|\frac{df(s,\varepsilon)}{ds}\Big\|\Big), \qquad (18)$$

де $c_5 = 2c_4$.

Наслідок 2. Якщо $\beta = 0$, то $\delta = \delta_0 \leq (2p\sigma(\bar{c}_2 + \bar{\bar{c}}_2))^{-1}$ і $\alpha = p^{-1}$, $p \geq 2m$.

3. Обгрунтування методу усереднення на проміжку $[0, L]$ одержується як наслідок з нерівності (18) за схемою, запропонованою в праці [4].

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконуються умови 1, 2 і 4 теореми 1;

2) в області $G = [0,L] \times D \times D \times R^m \times R^m$ $F \in C^1_{\tau,x,x_\Delta}(G, \sigma_1)$, де сталою σ_1, обмежена вектор-функція F та її похідні;

3) для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції F виконується нерівність

$$\sup_{G_1}\|F_0\| + \sum_{\lambda\neq 0}\Big(\sup_{G_1}\|F_\lambda\| + \frac{1}{\|\lambda\|}\Big(\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial F}{\partial x}\Big\| +$$

$$+\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial F}{\partial x_\Delta}\Big\| + \sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial F}{\partial \tau}\Big\|\Big)\Big) \leq \sigma_2,$$

$G_1 = [0, L] \times D \times D;$

4) існує розв'язок $\overline{a} = a(\tau, \varepsilon)$ *першого з рівнянь (2), який лежить в області* D *разом із деяким* ρ*-околом.*

Тоді для досить малого $\overline{\overline{\varepsilon}}_0$ *існує єдиний розв'язок системи (1) такий, що* $a(0, \varepsilon) = \overline{a}(0, \varepsilon)$, $\varphi(0, \varepsilon) = \overline{\varphi}(0, \varepsilon)$ *і для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \overline{\overline{\varepsilon}}_0]$ *виконується нерівність*

$$v(\tau, \varepsilon) := \|a(\tau, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \varepsilon)\| +$$
$$+ \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_6 \varepsilon^{\alpha}. \qquad (19)$$

Доведення. Із систем (1) і (2) та умови 2 теореми 2 одержимо

$$v(\tau, \varepsilon) \leq 2\sigma_1 \int\limits_0^{\tau} \|a(s, \varepsilon) - \overline{a}(s, \varepsilon)\| ds +$$

$$+ \sum_{\lambda \neq 0} \Big\| \int\limits_0^{\tau} F_{\lambda}(s, a(s, \varepsilon), a_{\Delta}(s, \varepsilon)) \exp[i(k, \varphi) +$$
$$+ i(l, \varphi_{\Delta})] ds \Big\|.$$

Залишається застосувати нерівність (18) для функції

$$f_{\lambda}(s, \varepsilon) = F_{\lambda}(s, a(s, \varepsilon), a_{\Delta}(s, \varepsilon)) \times$$
$$\times \exp\Big[-\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{s} \gamma_{\lambda}(s, \varepsilon) ds_1 +$$
$$+ i(k, \varphi(s, \varepsilon)) + (l, \varphi_{\Delta}(s, \varepsilon)) \Big],$$

де $\lambda := [k, l]$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Нерівність (19) одержується на підставі нерівності Гронуолла-Белмана, де $c_6 = c_7 \exp(2\sigma_1 L)$, $c_7 = c_5 \sigma_2 (1 + \sigma_1(1 + \sigma_3))$, $\sigma_3 \geq \sup\limits_{G_0} |\frac{d\Delta(\tau, \varepsilon)}{dt}|$. Нехай $2c_6 \varepsilon_2 \leq \rho$, тоді розв'язок системи (1) визначений для всіх $\tau \in [0, L]$, коли $\varepsilon \in (0, \overline{\overline{\varepsilon}}_0] = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267 – 278.

2. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8 – 14.

3. *Бігун Я.Й.* Дослідження багаточастотних коливних систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 15 – 20.

4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики.— М.: УРСС, 2002.— 416 с.

6. *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* Введение в резонансную аналитическую динамику. – М.: Янус-К, 1999. – 320 с.

7. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

8. *Dodson M., Rynne B.P., Vickers J.A.G.* Averaging in multifrequency systems // Nonlinearly.— 1989.— 2, N 1.— P. 137—148.

9. *Fuzhong Cong* The approximate decomposition of exponential order of slow-fast motion in multifrequency systems // J. Differential Equations.— 2004.— **196**, N 2.— P.466—480.

10. *Кузнецова И.Ф.* Об усреднении в многочастотных системах с запаздыванием // Дифференц. уравн. – 1981. – **17**, № 6. – С. 1128 – 1131.

11. *Шпакович В.П.* Метод усреднения для многочастотных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 4. – С. 535 – 539.

12. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007.-59, №4. - С. 435–446.