УДК 517.95

©2013 р. М.І. Іванчов, Г.А. Снітко

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, Львів

НЕЛОКАЛЬНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі для нелокального рівняння дифузії в області з вільною межею.

We establish unique solvability conditions for the inverse problem to the nonlocal diffusion equation in a free boundary domain.

Завдяки можливостям визначення параметрів різноманітних за своєю природою процесів шляхом математичних розрахунків без проведення фізичних експериментів, обернені задачі набули широкого практичного застосування у багатьох галузях науки і техніки. Вагоме місце серед цих задач займають коефіцієнтні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння. Задачі такого типу в областях з відомими межами достатньо повно вивчені. Зокрема, в роботах [1]–[5] вивчались обернені задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта в одновимірних параболічних рівняннях. У [6] встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення коефіцієнта $a(s)$ параболічного рівняння

$$u_t = a\left(\int_0^h u(x,t)dx\right)u_{xx} + f(x,t),$$

$$(x,t) \in (0,h) \times (0,T).$$

Така задача є математичною моделлю міграції популяції у випадку, коли швидкість міграції є невідомою. Задачі, в яких коефіцієнт $a(s)$ відомий, розглядались в роботах [7, 8].

Багато практично важливих задач моделюється задачами з вільними межами. Такі задачі можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з фіксованими межами, в яких невідомим параметром є межа області або її частина. Тому розгляд задач з вільними межами разом з оберненими задачами є природним. У роботах [9]–[11] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта в одновимірних параболічних рівняннях в області, частина або вся межа якої є невідомою.

У даній роботі розглядається обернена задача для нелокального рівняння дифузії з невідомим старшим коефіцієнтом в області з вільною межею.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнта $a(s) > 0$ параболічного рівняння

$$u_t = a\left(\int_0^{h(t)} u(x,t)dx\right)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a\left(\int_0^{h(t)} u(x,t)dx\right)u_x(0,t) = \mu_3(t),$$

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \quad (4)$$

$$h(0) = h_0, \quad (5)$$

де $h_0 > 0$ – задане число.

Увівши нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$, задачу (1)–(5) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h(t), a(s), v(y,t))$ в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{1}{h^2(t)} a\Bigg(h(t)\int_0^1 v(y,t)dy\Bigg) v_{yy} +$$

$$+\frac{yh'(t)}{h(t)} v_y + f(yh(t),t), \ (y,t) \in Q_T, \quad (6)$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_0), \quad y \in [0,1], \quad (7)$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \ v(1,t) = \mu_2(t), \ t \in [0,T], \quad (8)$$

$$a\Bigg(h(t)\int_0^1 v(y,t)dy\Bigg) v_y(0,t) = h(t)\mu_3(t),$$

$$t \in [0,T], \quad (9)$$

$$h'(t) = -\frac{v_y(1,t)}{h(t)} + \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \quad (10)$$

$$h(0) = h_0, \quad (11)$$

де $v(y,t) = u(yh(t),t)$.

2. Існування розв'язку задачі (6)–(11).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $\varphi \in C^1[0,h_0]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j = 3,4$;

2) $f(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in ([0,\infty) \times [0,T])$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $\mu_2(t) < 0$, $\mu_3(t) > 0$, $\mu_2(t)\mu_4(t) - \mu_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \leq T$, *що існує розв'язок* $(h,a,v) \in C^1[0,T_0] \times C[0,S] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap$ $\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ *задачі (6)–(11), такий що* $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, $a(s) > 0$, $s \in [0,S]$, *де числа* T_0, S *визначаються вихідними даними задачі.*

Доведення. Існування розв'язку задачі (6)–(11) доводиться шляхом зведення задачі до системи рівнянь відносно невідомих та застосування до неї теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Припустимо тимчасово, що функції $h(t) > 0$, $a(s) > 0$ відомі. Позначимо

$$b(t) = a\Bigg(h(t)\int_0^1 v(y,t)dy\Bigg), \ w(y,t) = v_y(y,t).$$

Пряма задача (6)–(8) еквівалентна системі рівнянь

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \times$$

$$\times \frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

$$w(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \times$$

$$\times \frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \quad (12)$$

де $v_0(y,t)$, $v_{0y}(y,t)$ визначаються формулами

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0)d\eta +$$

$$+ \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau) \frac{b(\tau)}{h^2(\tau)} \mu_1(\tau) d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau) \frac{b(\tau)}{h^2(\tau)} \mu_2(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) f(\eta h(\tau),\tau) d\eta d\tau,$$

$$v_{0y}(y,t) = h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0) d\eta -$$

$$-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau. \quad (13)$$

Через $G_k(y,t,\eta,\tau),\ k=1,2$, позначено функції Гріна першої ($k=1$) та другої ($k=2$) крайових задач для рівняння

$$v_t=\frac{b(t)}{h^2(t)}v_{yy}, \quad (y,t)\in Q_T.$$

Вони визначаються формулами

$$G_k(y,t,\eta,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),$$

$$k=1,2, \quad \theta(t)=\int_0^t\frac{b(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau.$$

З умови (10) отримуємо

$$h'(t)=-\frac{w(1,t)}{h(t)}+\mu_4(t), \quad t\in[0,T]. \quad (14)$$

Використавши (14), подамо (12) у вигляді

$$w(y,t)=v_{0y}(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{\eta\mu_4(\tau)}{h(\tau)}-\frac{\eta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\right)w(\eta,\tau)d\eta d\tau,$$

$$(y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (15)$$

З умови (9), врахувавши введені позначення, отримуємо

$$b(t)w(0,t)=h(t)\mu_3(t), \quad t\in[0,T]. \quad (16)$$

Проінтегрувавши (14) за змінною t, одержуємо

$$h(t)=h_0+\int_0^t\mu_4(\tau)d\tau-\int_0^t\frac{w(1,\tau)}{h(\tau)}d\tau,$$

$$t\in[0,T]. \quad (17)$$

Отже, задачу (6)–(11) зведено до системи рівнянь (15)–(17) відносно невідомих $(w(y,t),b(t),h(t))$. Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (15)–(17) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього встановимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь. Оскільки

$$\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta=1,$$

то згідно з умовами теореми перший доданок (13) додатний, всі інші доданки (13), (12) прямують до 0 при $t\to 0$. Отже, можна вказати таке число $t_1, 0<t_1\le T$, що

$$w(y,t)\ge\frac{h_0}{2}\min_{y\in[0,1]}\varphi'(yh_0):=M_0>0,$$

$$(y,t)\in\overline{Q}_{t_1}. \quad (18)$$

Число t_1 визначається нерівністю

$$\left|-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+\right.$$

$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(f(\eta h(\tau),\tau)+$$

$$\left.+\left(\frac{\eta\mu_4(\tau)}{h(\tau)}-\frac{\eta w(1,\tau)}{h^2(\tau)}\right)w(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau\right|\le$$

$$\le M_0 \qquad (y,t)\in\overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді для розв'язків рівнянь (17), (16) виконуються оцінки

$$h(t)\le H_1<\infty, \quad t\in[0,T], \quad (19)$$

$$b(t) \leq \frac{H_1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_3(t) := B_1 < \infty,$$

$$t \in [0, t_1]. \qquad (20)$$

Оскільки всі доданки (17), крім першого, прямують до нуля при $t \to 0$, то існує таке число $t_2, 0 < t_2 \leq T$, яке визначається нерівністю

$$\left| \int_0^t \mu_4(\tau) d\tau - \int_0^t \frac{w(1,\tau)}{h(\tau)} d\tau \right| \leq \frac{h_0}{2}, \quad t \in [0, t_2],$$

що

$$h(t) \geq \frac{h_0}{2} \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0, t_2]. \qquad (21)$$

Позначимо $W(t) = \max_{y \in [0,1]} w(y,t)$. Врахувавши (21), з (16) отримуємо

$$b(t) \geq \frac{H_0}{W(t)} \min_{[0,T]} \mu_3(t), \quad t \in [0, t_2]. \qquad (22)$$

Використавши (19) та оцінки функції Гріна

$$|G_2(y,t,\eta,\tau)| \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \right),$$

$$\int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)| d\eta \leq \frac{C_2}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},$$

з (15) отримуємо нерівність

$$W(t) \leq C_3 + C_4 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} +$$

$$+ C_5 \int_0^t \frac{(1 + W(\tau)) W(\tau) d\tau}{h^2(\tau) \sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad t \in [0, t_3],$$

де $t_3 = \min\{t_1, t_2\}$.

Врахувавши (18), (22) і позначивши $W_1(t) = W(t) + 1$, попередню нерівність зведемо до вигляду

$$W_1(t) \leq C_6 + C_7 \int_0^t \frac{b(\tau) W_1^4(\tau) d\tau}{h^2(\tau) \sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},$$

$$t \in [0, t_3]. \qquad (23)$$

Піднесемо обидві частини нерівності до четвертого степеня і застосуємо нерівність Гельдера

$$W_1^4(t) \leq C_8 + C_9 \int_0^t \frac{b(\tau) W_1^{16}(\tau) d\tau}{h^2(\tau) \sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}.$$

Замінивши t на σ, домножимо попередню нерівність на $\dfrac{b(\sigma)}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{b(\sigma) W_1^4(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma) \sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \leq C_{10} + C_9 \times$$

$$\times \int_0^t \frac{b(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma) \sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \int_0^\sigma \frac{b(\tau) W_1^{16}(\tau) d\tau}{h^2(\tau) \sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}}.$$

Змінивши порядок інтегрування у другому доданку правої частини нерівності та використавши рівність

$$\int_\tau^t \frac{b(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma) \sqrt{(\theta(t) - \theta(\sigma))(\theta(\sigma) - \theta(\tau))}} = \pi,$$

одержуємо

$$\int_0^t \frac{b(\sigma) W_1^4(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma) \sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \leq$$

$$\leq C_{10} + C_{11} \int_0^t \frac{b(\tau) W_1^{16}(\tau) d\tau}{h^2(\tau)},$$

або, з урахуванням (20), (21),

$$\int_0^t \frac{b(\sigma) W_1^4(\sigma) d\sigma}{h^2(\sigma) \sqrt{\theta(t) - \theta(\sigma)}} \leq$$

$$\leq C_{10} + C_{12} \int_0^t W_1^{16}(\tau) d\tau. \qquad (24)$$

Підставивши (24) в (23), отримуємо

$$W_1(t) \leq C_{13} + C_{14} \int_0^t W_1^{16}(\tau) d\tau.$$

Позначимо $K(t) = C_{13}+C_{14}\int\limits_0^t W_1^{16}(\tau)d\tau$. Тоді

$$K'(t) \leq C_{14}K^{16}(t).$$

Проінтегрувавши це співвідношення від 0 до t, знаходимо

$$K(t) \leq \frac{C_{13}}{\sqrt[15]{1-15C_{13}^{15}C_{14}t}} \leq C_{15}, \quad t \in [0,T_0],$$

де число $T_0, 0 < T_0 \leq t_3$, задовольняє умову $1 - 15_{13}^{15}C_{14}T_0 > 0$.

Звідси отримуємо оцінки

$$W(t) \leq M_1 < \infty, \quad t \in [0,T_0],$$

$$b(t) \geq \frac{H_0}{M_1}\min_{[0,T]}\mu_3(t) := B_0 > 0, \quad t \in [0,T_0].$$

Подамо систему рівнянь (15)–(17) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (w(y,t), b(t), h(t))$, а оператор $P = (P_1,P_2,P_3)$ визначається правими частинами рівнянь (15)–(17).

Позначимо $N = \{(w,b,h) \in C(\overline{Q}_{T_0}) \times \times (C[0,T_0])^2 : M_0 \leq w(y,t) \leq M_1, B_0 \leq b(t) \leq B_1, H_0 \leq h(t) \leq H_1\}$. З наведених вище оцінок випливає, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N в себе. Компактність множини PN у просторі неперервних функцій доведено в [12].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок $(w,b,h) \in C(\overline{Q}_{T_0}) \times \times (C[0,T_0])^2$, $b(t) > 0,\ h(t) > 0,\ t \in [0,T_0]$ системи рівнянь (15)–(17).

Позначимо

$$q(t) = h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy.$$

Тоді

$$b(t) = a(q(t)), \quad t \in [0,T].$$

Знайдемо похідну функції $q(t)$

$$q'(t) = h'(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy + h(t)\int\limits_0^1 v_t(y,t)dy.$$

Використавши рівняння (5) і введені позначення, отримуємо

$$q'(t) = \frac{b(t)-\mu_2(t)}{h(t)}v_y(1,t)+\mu_2(t)\mu_4(t)-\mu_3(t)+$$

$$+h(t)\int\limits_0^1 f(yh(t),t)dy.$$

Згідно з (18) та умовами теореми маємо

$$q'(t) > 0, \quad t \in [0,T_0].$$

Отже, існує неперервна функція $q^{-1}(s)$, визначена на $[0,S]$, така що

$$q(q^{-1}(s)) := s, \quad s \in [0,S], \quad S = \max_{[0,T]} q(t).$$

Звідси

$$a(s) = b(q^{-1}(s)), \quad s \in [0,S].$$

Отже, існує розв'язок $(h,a,v) \in C^1[0,T_0] \times C[0,S] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0,\ t \in [0,T_0],\ a(s) > 0,\ s \in [0,S]$ задачі (6)–(11).

Зауваження. *Якщо в теоремі 1 $\varphi \in C^2[0,h_0]$, то існує розв'язок $(h,a,v) \in C^1[0,T_0] \times C[0,S] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0,\ t \in [0,T_0],\ a(s) > 0,\ s \in [0,S]$ задачі (6)–(11).*

3. Єдиність розв'язку задачі (6)–(11).

Теорема 2. *За умов*

$$f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), \quad \varphi \in C^2[0,h_0],$$

$$\mu_3(t) \neq 0, \quad t \in [0,T]$$

задача (6)–(11) не може мати двох різних розв'язків $(h,a,v) \in C^1[0,T] \times C[0,S] \times \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h(t) > 0,\ t \in [0,T],\ a(s) > 0,$ $s \in [0,S]$, де число S визначається вихідними даними задачі.

Доведення. Припустимо, що $(h_i(t), a_i(s), v_i(y,t)),\ i = 1,2,$ – два розв'язки задачі (6)–(11). Позначимо

$$b_i = a_i\biggl(h_i(t)\int\limits_0^1 v_i(y,t)dy\biggr),$$

$$\frac{b_i(t)}{h_i^2(t)} = s_i(t), \quad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = p_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

$$v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $s(t), p(t), v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = s_1(t)v_{yy} + yp_1(t)v_y + s(t)v_{2yy} +$$

$$+yp(t)v_{2y} + f(yh_1(t),t) -$$

$$-f(yh_2(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \qquad (25)$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \ y \in [0,1], \qquad (26)$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \ t \in [0,T], \qquad (27)$$

$$s(t)v_{2y}(0,t) + s_1(t)v_y(0,t) =$$

$$= \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \qquad (28)$$

$$p(t) = -\frac{v_y(1,t)}{h_1^2(t)} - v_{2y}(1,t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right) +$$

$$+\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T]. \qquad (29)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = s_1(t)v_{yy} + yp_1(t)v_y$$

з урахуванням умов (26), (27) функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)(s(\tau)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) +$$

$$+\eta p(\tau)v_{2\eta}(\eta,\tau) + f(\eta h_1(\tau),\tau) -$$

$$-f(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (30)$$

Продиференціювавши (30) за змінною y, одержуємо

$$v_y(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)(s(\tau)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) +$$

$$+\eta p(\tau)v_{2\eta}(\eta,\tau) + f(\eta h_1(\tau),\tau) -$$

$$-f(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (31)$$

Виразимо $h_i(t)$ через $p_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t p_i(\tau)d\tau\right), \quad i = 1, 2,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Звідси, використовуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримуємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t p(\tau)d\tau \times$$

$$\times \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma p(\tau) + p_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \qquad (32)$$

Рівність (32) можемо аналогічно використати для зображення різниць $h_1(t) - h_2(t), \quad \dfrac{1}{h_1^2(t)} - \dfrac{1}{h_2^2(t)}$.

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = y(h_1(t) - h_2(t)) \times$$

$$\times \int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))),t)d\sigma. \qquad (33)$$

Підставивши (31)–(33) в (28), (29), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $s(t), p(t)$ з ядрами, які мають інтегровні особливості. Таким чином,

$$p(t) = 0, \quad s(t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Звідси отримуємо, що

$$p_1(t) = p_2(t), \quad s_1(t) = s_2(t), \quad t \in [0,T],$$

а, отже,

$$h_1(t) = h_2(t), \quad b_1(t) = b_2(t).$$

Використавши це в задачі (25)–(27), одержуємо

$$v_1(y,t) = v_2(y,t), \quad (y,t) \in \overline{Q}_T.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness // J. Math. Mech. – 1962. – **11**, № 5. – P. 907–918.

2. *Cannon J.R., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **160**. – P. 572–582.

3. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539–550.

4. *Ivanchov M.I.* Inverse problem for finding a major coefficient in a parabolic equation // Мат. студії. – 1997. – **8**, № 2. – С. 212–220.

5. *Пабирівська Н.В., Власов В.А.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 18–25.

6. *Ivanchov M.* A nonlocal inverse problem for the diffusion equation // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 103–108.

7. *Chipot M., Lovat B.* On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems // Positivity. – 1999. – **3**. – P. 65–81.

8. *Chipot M., Molinet L.* Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems // Applicable Analysis. – 2001. – **80**. – P. 279–315.

9. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

10. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.

11. *Іванчов М.І., Снітко Г.А.* Визначення залежних від часу коефіцієнтів параболічного рівняння в області з вільною межею // Нелінійні граничні задачі. – 2011. – **20**. – С. 28–44.

12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)