УДК 517.95

©2008 р. І.Є.Баранська

Львівський національний університет імені Івана Франка

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомих, залежних від часу, коефіцієнтів теплопровідності в анізотропному параболічному рівнянні в області з вільною межею.

We establish conditions of existence and uniqueness for a solution of the inverse problem to finding out of the unknown time-dependent coefficients of heat conductivity for the anisotropic parabolic equation in a domain with free bound.

Обернені задачі для анізотропних тіл з невідомими тепловими характеристиками, що залежать від напрямку, мають теоретичне та практичне значення. Такі задачі було розглянуто в роботі [1], де було знайдено умови єдиності розв'язку. В [2] було встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для анізотропного рівняння теплопровідності.

Обернені задачі в області з вільними межами - це поєднання задачі знаходження невідомої межі області та оберненої задачі визначення невідомих параметрів рівняння. У роботі [3] було досліджено обернену задачу для двовимірного параболічного рівняння в області з вільними межами.

Дана робота відрізняється від [3] тим, що рівняння є анізотропним рівнянням параболічного типу з невідомими, залежними від часу, коефіцієнтами теплопровідності.

В області $\Omega_T \equiv \{(x_1,x_2,t) : 0 < x_1 < l(t)\,,\, 0 < x_2 < h(t)\,,\, 0 < t < T < \infty\}$ з невідомими межами $x_1 = l(t)$, $x_2 = h(t)$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a^{(1)}(t)u_{x_1x_1} + a^{(2)}(t)u_{x_2x_2}+$$
$$+b\,(x_1,x_2,t)\,u_{x_1} + c\,(x_1,x_2,t)\,u_{x_2}+$$
$$+d\,(x_1,x_2,t)\,u + f(x_1,x_2,t)\,, \tag{1}$$

в якому $a^{(1)}(t)$, $a^{(2)}(t)$ - невідомі коефіцієнти. Задамо початкову умову

$$u(x_1,x_2,0) \;=\; \varphi\,(x_1,x_2)\,,$$
$$(x_1,x_2) \in [0,l_0] \times [0,h_0]\,, \tag{2}$$

де $l_0 \equiv l(0)$, $h_0 \equiv h(0)$, крайові умови

$$u(0,x_2,t) \;=\; \mu_1(x_2,t)\,,$$
$$u(l(t),x_2,t) \;=\; \mu_2(x_2,t)\,,$$
$$u(x_1,0,t) \;=\; \mu_3(x_1,t)\,,$$
$$u(x_1,h(t),t) \;=\; \mu_4(x_1,t)\,,$$
$$x_1 \in [0,l(t)]\,, x_2 \in [0,h(t)]\,, t \in [0,T] \tag{3}$$

та умови перевизначення

$$\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{h(t)} u(x_1,x_2,t)\,dx_2dx_1 \;=\; \mu_5(t)\,,$$
$$t \in [0,T]\,, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{h(t)} x_2u(x_1,x_2,t)\,dx_2dx_1 \;=\; \mu_6(t)\,,$$
$$t \in [0,T]\,, \tag{5}$$

$$a^{(1)}(t)\,u_{x_1}(0,x^{(2)},t) = \mu_7(t)\,, \quad t \in [0,T]\,, \tag{6}$$

$$a^{(2)}(t)\,u_{x_2}(x^{(1)},0,t) = \mu_8(t)\,, \quad t \in [0,T]\,, \tag{7}$$

де $x^{(1)} \in (0, l(t))$, $x^{(2)} \in (0, h(t))$ - деякі фіксовані точки.

Заміною $y_1 = \dfrac{x_1}{l(t)}\,, y_2 = \dfrac{x_2}{h(t)}\,, t = t$ зведемо задачу (1)-(7) до оберненої задачі стосовно невідомих $a(t)$, $l(t)$, $h(t)$, $v(y_1, y_2, t) \equiv u(y_1 l(t), y_2 h(t), t)$ в області з відомими межами $Q_T \equiv \{(y_1, y_2, t) \,:\, 0 < y_1 < 1\,, 0 < y_2 < 1\,,\, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a^{(1)}(t)}{l^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{a^{(2)}(t)}{h^2(t)} v_{y_2 y_2} +$$
$$+ \frac{b\,(y_1 l(t), y_2 h(t), t) + y_1 l'(t)}{l(t)} v_{y_1} +$$
$$+ \frac{c\,(y_1 l(t), y_2 h(t), t) + y_2 h'(t)}{h(t)} v_{y_2} +$$
$$+ d\,(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, v + f(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\,,$$
$$(y_1, y_2, t) \in Q_T\,, \tag{8}$$

$$v(y_1, y_2, 0) \,=\, \varphi(y_1 l_0, y_2 h_0)\,,$$
$$y_i \in [0,1]\,, \qquad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$v(0, y_2, t) \,=\, \mu_1(y_2 h(t), t)\,,$$
$$v(1, y_2, t) \,=\, \mu_2(y_2 h(t), t)\,,$$
$$v(y_1, 0, t) \,=\, \mu_3(y_1 l(t), t)\,,$$
$$v(y_1, 1, t) \,=\, \mu_4(y_1 l(t), t)\,,$$
$$y_1 \in [0,1]\,, y_2 \in [0,1]\,, t \in [0,T]\,, \tag{10}$$

$$l(t) h(t) \int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2 dy_1 \;=$$
$$= \mu_5(t)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{11}$$

$$l(t) h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t)\, dy_2 dy_1 \;=$$
$$= \mu_6(t)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{12}$$

$$\frac{a^{(1)}(t)}{l(t)} v_{y_1}\left(0, \frac{x^{(2)}}{h(t)}, t\right) \,=\, \mu_7(t)\,,$$
$$t \in [0,T]\,, \tag{13}$$

$$\frac{a^{(2)}(t)}{h(t)} v_{y_2}\left(\frac{x^{(1)}}{l(t)}, 0, t\right) \,=\, \mu_8(t)\,,$$
$$t \in [0,T]\,. \tag{14}$$

Означення. Функції $(a^{(1)}, a^{(2)}, l, h, v) \in (C[0,T])^2 \times (C^1[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $a^{(1)}(t) > 0$, $a^{(2)}(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, які задовольняють умови (8)-(14), назвемо розв'язком задачі (8)-(14).

Зауважимо, запис $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ означає, що функція v є двічі неперервно диференційовною по просторових змінних та неперервно диференційовною по часовій змінній в області $\overline{Q}_T$.

Теорема існування. Нехай виконуються умови:

1) $\varphi \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty))$, $\mu_i \in C([0,+\infty) \times [0,T])$, $i = \overline{1,4}$, $f \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,T])$;

2) $0 < \varphi_0 \le \varphi(x_1, x_2) \le \varphi_1 < \infty$, $(x_1, x_2) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{5,8}$, $t \in [0,T]$, $0 < \mu_{i0} \le \mu_i(x_2, t) \le \mu_{i1} < \infty\,, i = 1, 2\,, (x_2, t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$, $0 < \mu_{k0} \le \mu_k(x_1, t) \le \mu_{k1} < \infty\,, k = 3, 4\,, (x_1, t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$, $d(x_1, x_2, t) \le 0\,, (x_1, x_2, t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,T]$, $0 \le f(x_1, x_2, t) \le f_1 < \infty\,, (x_1, x_2, t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,T]$, $\mu_{ix_2}(x_2, t) > 0$, $(x_2, t) \in [0, H_2] \times [0,T]\,, i = 1, 2$, $\mu_{kx_1}(x_1, t) > 0, (x_1, t) \in [0, L_2] \times [0,T]\,, k = 3, 4$, $\varphi_{x_i}(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in [0, l_0] \times [0, h_0]\,, i = 1, 2$, $0 < x^{(1)} < L_1$, $0 < x^{(2)} < H_1$, де l_0, h_0, H_1, L_1, H_2, L_2- деякі додатні сталі, значення яких буде вказано;

3) $\varphi \in C^2([0, l_0] \times [0, h_0])$, $\mu_m \in C^1[0,T]$, $m = 5, 6$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j = 7, 8$, $\mu_i \in C^{2,1}([0, H_2] \times [0,T])$, $i = 1, 2$, $\mu_k \in C^{2,1}([0, L_2] \times [0,T])$, $k = 3, 4$, $b, c, f \in C^{1,0}([0, L_2] \times [0, H_2] \times [0,T])$;

4) умови узгодження нульового та першого порядків.

Тоді можна вказати таке число t_0, $0 < t_0 \le T$, що розв'язок задачі (8)-(14) існує при $0 \le y_i \le 1$, $i = 1, 2$, $0 \le t \le t_0$.

Доведення. З умов (2), (4), (5) отримаємо систему рівнянь стосовно невідомих l_0 , h_0:

$$\int_0^{l_0}\int_0^{h_0} \varphi(x_1, x_2)\, dx_2 dx_1 \;=\; \mu_5(0)\,,$$

$$\int_0^{l_0}\int_0^{h_0} x_2\varphi(x_1, x_2)\, dx_2 dx_1 \;=\; \mu_6(0)\,.$$

Позначивши $\int\limits_0^{l_0} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \;\equiv\; \psi(l_0, x_2)$, систему запишемо у вигляді

$$\int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \;=\; \mu_5(0)\,,$$

$$\int_0^{h_0} x_2\psi(l_0, x_2)\, dx_2 \;=\; \mu_6(0). \tag{15}$$

З припущень теореми отримаємо, що $\varphi_0 l_0 \;\le\; \psi(l_0, x_2) \;\le\; \varphi_1 l_0$. Тоді $\varphi_0 l_0 h_0 \;\le\; \int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \;\le\; \varphi_1 l_0 h_0$. Функція $y = \int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2$ при довільному фіксованому $l_0 > 0$ монотонно зростаюча стосовно h_0. Отже, з умов теореми випливає, що існує єдине значення $h_0(l_0)$, яке є розв'язком рівняння $\int\limits_0^{h_0(l_0)} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \;=\; \mu_5(0)$ і $\dfrac{\mu_5(0)}{\varphi_1 l_0} \le h_0(l_0) \le \dfrac{\mu_5(0)}{\varphi_0 l_0}$. Тоді

$$\frac{\varphi_0\mu_5^2(0)}{2\varphi_1^2 l_0} \le \varphi_0 l_0 \frac{h_0^2(l_0)}{2} \le$$
$$\le \int_0^{h_0(l_0)} x_2\psi(l_0, x_2)\, dx_2 \;\le$$
$$\le \varphi_1 l_0 \frac{h_0^2(l_0)}{2} \le \frac{\varphi_1\mu_5^2(0)}{2\varphi_0^2 l_0}\,. \tag{16}$$

Функція $y = \int\limits_0^{h_0(l_0)} x_2\psi(l_0, x_2)\, dx_2$ є монотонно спадною функцією змінної l_0, графік якої перетинає пряму $y = \mu_6(0)$ лише в одній точці. Отже, існує єдине значення l_0 , h_0, яке є розвязком системи (15).

З припущень теореми за принципом максимуму для розв'язку задачі (8)-(10) справджується оцінка

$$0 < M_0 \le v(y_1, y_2, t) \le M_1 < \infty\,,$$
$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T\,, \tag{17}$$

де M_0 , M_1 - відомі величини, які визначаються через вихідні дані.

З умов (11) та (12) отримаємо такі оцінки:

$$0 < H_1 \le h(t) \le H_2 < \infty\,,$$
$$0 < L_1 \le l(t) \le L_2 < \infty\,,$$
$$t \in [0, T]\,. \tag{18}$$

Задача (8)-(10) еквівалентна рівнянню

$$v(y_1, y_2, t) = v_0(y_1, y_2, t) +$$
$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)\times$$
$$\times\Bigg(\frac{b\,(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_1 l'(\tau)}{l(\tau)} v_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \tau)+$$
$$+\frac{c\,(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_2 h'(\tau)}{h(\tau)} v_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \tau)+$$
$$+d\,(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) v(\xi_1, \xi_2, \tau)\Bigg)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau\,,$$
$$(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T\,, \tag{19}$$

де

$$v_0(y_1, y_2, t) = \int_0^1\int_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, 0)\times$$
$$\times\varphi(\xi_1 l_0, \xi_2 h_0)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_1}(y_1, y_2, t, 0, \xi_2, \tau)\times$$
$$\times\frac{a^{(1)}(\tau)}{l^2(\tau)}\, \mu_1(\xi_2 h(\tau), \tau)\, d\xi_2\, d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{a^{(1)}(\tau)}{l^2(\tau)}\,\mu_2(\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\times$$

$$\times\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,\mu_3(\xi_1 l(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\times$$

$$\times\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,\mu_4(\xi_1 l(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,, \qquad (20)$$

$$G_{kl}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times$$

$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y_1-\xi_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y_1+\xi_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{(y_2-\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^l\exp\left(-\frac{(y_2+\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right),$$

$k,l=1,2$, $\theta_1(t)=\int\limits_0^t\frac{a^{(1)}(\sigma)}{l^2(\sigma)}\,d\sigma$, $\theta_2(t)=\int\limits_0^t\frac{a^{(2)}(\sigma)}{h^2(\sigma)}\,d\sigma$. Зазначимо, що $G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$ - функція Гріна рівняння

$$v_t=\frac{a^{(1)}(t)}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{a^{(2)}(t)}{h^2(t)}v_{y_2y_2}+$$

$$+f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,,(y_1,y_2,t)\in Q_T\,, \qquad (21)$$

з крайовими умовами (10), а $v_0(y_1,y_2,t)$ є розв'язком задачі (21), (9), (10). Враховуючи властивості функції Гріна, з (18) знайдемо $v_{y_1}(y_1,y_2,t)$:

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)=v_{0\,y_1}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11\,y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{b\,(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)+\xi_1 l'(\tau)}{l(\tau)}v_{\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau)+\right.$$

$$+\frac{c\,(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)+\xi_2 h'(\tau)}{h(\tau)}v_{\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$

$$\left.+d\,(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)v(\xi_1,\xi_2,\tau)\right)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,,$$

$$(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T\,, \qquad (22)$$

де

$$v_{0\,y_1}(y_1,y_2,t)=l_0\int_0^1\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\times$$

$$\times\varphi_\eta(\eta,\xi_2 h_0)|_{\eta=\xi_1 l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\Big(\xi_2 h'(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)-$$

$$-a^{(2)}(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{1\tau}(\eta,\tau)\Big)|_{\eta=\xi_2 h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\Big(\xi_2 h'(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)-$$

$$-a^{(2)}(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{2\tau}(\eta,\tau)\Big)|_{\eta=\xi_2 h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\times$$

$$\times\mu_{3\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\times$$

$$\times\mu_{4\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,. \qquad (23)$$

Рівності (11)-(14) запишемо у вигляді рівняннь стосовно невідомих $a^{(1)}(t)$, $a^{(2)}(t)$, $h(t)$, $l(t)$. Продиференціювавши (11), (12) по t, використовуючи рівняння (8) та умови (11), (12), отримаємо рівняння стосовно невідомих $h'(t)$, $l'(t)$. Отже, задачу (8)-(14) зведено до системи рівнянь:

$$a^{(1)}(t)=\frac{\mu_7(t)\,l(t)}{w_1\left(0,x^{(2)}h^{-1}(t),t\right)}\,,\ t\in[0,T]\,, \quad (24)$$

$$a^{(2)}(t)=\frac{\mu_8(t)\,h(t)}{w_2\left(x^{(1)}l^{-1}(t),0,t\right)}\,,\ t\in[0,T]\,, \quad (25)$$

$$h(t)=\frac{\mu_6(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)\,dy_2dy_1}{\mu_5(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2 v(y_1,y_2,t)\,dy_2dy_1}\,,$$

$$t\in[0,T]\,, \quad (26)$$

$$l(t)=\frac{\mu_5(t)}{h(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)\,dy_2dy_1}\,,$$

$$t\in[0,T]\,, \quad (27)$$

$$p\,(t)\,h(t)\int_0^1\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2+g(t)\,l(t)\times$$

$$\times\int_0^1\mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1+\frac{a^{(1)}(t)\,h(t)}{l(t)}\times$$

$$\times\int_0^1\left(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t)\right)\,dy_2+$$

$$+\frac{a^{(2)}(t)\,l(t)}{h(t)}\int_0^1\left(v_{y_2}(y_1,1,t)-\right.$$

$$\left.-v_{y_2}(y_1,0,t)\right)\,dy_1=\mu_5'(t)-$$

$$-h(t)\int_0^1\left(b\left(l(t),y_2h(t),t\right)\mu_2(y_2h(t),t)-\right.$$

$$\left.-b\left(0,y_2h(t),t\right)\mu_1(y_2h(t),t)\right)\,dy_2-$$

$$-l(t)\int_0^1\left(c\left(y_1l(t),h(t),t\right)\mu_4(y_1l(t),t)-\right.$$

$$\left.-c\left(y_1l(t),0,t\right)\mu_3(y_1l(t),t)\right)\,dy_1+$$

$$+l(t)\,h(t)\int_0^1\int_0^1\Big(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\,|_{\eta=y_1l(t)}+$$

$$+c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\,|_{\eta=y_2h(t)}-$$

$$-d\left(y_1l(t),y_2h(t),t\right)\Big)\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2-$$

$$-l(t)\,h(t)\int_0^1\int_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2\,,$$

$$t\in[0,T]\,, \qquad (28)$$

$$p\,(t)\,h^2(t)\int_0^1(1-y_2)\,\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2+$$

$$+\frac{a^{(1)}(t)\,h^2(t)}{l(t)}\int_0^1(1-y_2)\left(v_{y_1}(1,y_2,t)-\right.$$

$$\left.-v_{y_1}(0,y_2,t)\right)\,dy_2-a^{(2)}(t)\,l(t)\times$$

$$\times\int_0^1\left(v_{y_2}(y_1,0,t)+\mu_3(y_1l(t),t)-\right.$$

$$\left.-\mu_4(y_1l(t),t)\right)\,dy_1=\mu_5'(t)\,h(t)-\mu_6'(t)+$$

$$+h(t)\,l(t)\int_0^1 c\left(y_1l(t),0,t\right)\mu_3(y_1l(t),t)\,dy_1-$$

$$-h(t)\,l(t)\int_0^1\int_0^1 c\left(y_1l(t),y_2h(t),t\right)\times$$

$$\times v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2-h^2(t)\int_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times\left(b\left(l(t),y_2h(t),t\right)\mu_2(y_2h(t),t)-\right.$$

$$-b\,(0,y_2h(t),t)\,\mu_1(y_2h(t),t))\;dy_2+$$

$$+l(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times\left(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\,|_{\eta=y_1l(t)}+\right.$$

$$+c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\,|_{\eta=y_2h(t)}-$$

$$\left.-d\,(y_1l(t),y_2h(t),t)\right)\;v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2-$$

$$-l(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2\,,\quad t\in[0,T]\,,\tag{29}$$

$$v(y_1,y_2,t)=v_0(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{b\,(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)+\xi_1p\,(\tau)}{l(\tau)}w_1(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$

$$+\frac{c\,(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)+\xi_2g\,(\tau)}{h(\tau)}w_2(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$

$$+d\,(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)\,v(\xi_1,\xi_2,\tau)\Bigg)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,,$$

$$(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T\,,\tag{30}$$

$$w_i(y_1,y_2,t)=v_{0\,y_i}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11\,y_i}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{b\,(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)+\xi_1p\,(\tau)}{l(\tau)}w_1(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$

$$+\frac{c\,(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)+\xi_2g\,(\tau)}{h(\tau)}w_2(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$

$$+d\,(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)\,v(\xi_1,\xi_2,\tau)\Bigg)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,,$$

$$i=1,2\,,\qquad(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T\,,\tag{31}$$

де $p\,(t)\equiv l'(t)$, $g(t)\equiv h'(t)$, $w_i(y_1,y_2,t)\equiv v_{y_i}(y_1,y_2,t)$, $i=1,2$, $v_{0\,y_1}$ задано формулою (23), а $v_{0\,y_2}$ має вигляд:

$$v_{0\,y_2}(y_1,y_2,t)=h_0\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\times$$

$$\times\varphi_\eta(\xi_1l_0,\eta)|_{\eta=\xi_2h_0}\,d\xi_1\,d\xi_2-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\Big(\xi_1l'(\tau)\mu_{3\eta}(\eta,\tau)-$$

$$-a^{(1)}(\tau)\mu_{3\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{3\tau}(\eta,\tau)\Big)|_{\eta=\xi_1l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\Big(\xi_1l'(\tau)\mu_{4\eta}(\eta,\tau)-$$

$$-a^{(1)}(\tau)\mu_{4\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{4\tau}(\eta,\tau)\Big)|_{\eta=\xi_1l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\frac{a^{(1)}(\tau)}{l^2(\tau)}\,h(\tau)\times$$

$$\times\mu_{1\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\frac{a^{(1)}(\tau)}{l^2(\tau)}\,h(\tau)\times$$

$$\times\mu_{2\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11y_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times f(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,.\tag{32}$$

Зі способу отримання системи рівнянь (24)-(31) випливає, що коли функції $(a^{(1)}, a^{(2)}, l, h, v)\in(C[0,T])^2\times(C^1[0,T])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $a^{(1)}(t)>0$, $a^{(2)}(t)>0$, $l(t)>0$, $h(t)>0\,,\ t\in[0,T]$ є розв'язком задачі (8)-(14), то функції $(a^{(1)}, a^{(2)}, l, h, p, g, v, w_i,\ i=1,2)\in(C[0,T])^6\times(C(\overline{Q}_T))^3$, $a^{(1)}(t)>0$, $a^{(2)}(t)>0$, $l(t)>0$, $h(t)>0$ є розв'язком системи (24)-(31). Покажемо, що правильне і обернене твердження, тобто, якщо функції $(a^{(1)}, a^{(2)}, l, h, p, g, v, w_i,\ i=1,2)$, $a^{(1)}(t)>0$, $a^{(2)}(t)>0$, $l(t)>0$, $h(t)>0$

з класу $(C[0,T])^6 \times (C(\overline{Q}_T))^3$ є розв'язком системи (24)-(31), то функції $(a^{(1)}, a^{(2)}, l, h, v)$, $a^{(1)}(t) > 0$, $a^{(2)}(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$ належать до класу $(C[0,T])^2 \times (C^1[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ і є розв'язком задачі (8)-(14). Оскільки функція $v_0(y_1,y_2,t)$ є розв'язком задачі (21), (9), (10), то з умов теореми випливає, що $v_0 \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Продиференціювавши (30) один раз по y_i, $i=1,2$, отримаємо, що $v_{y_i} \equiv w_i$, $i=1,2$. З (30) випливає, що $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a^{(1)}(t)}{l^2(t)} v_{y_1y_1} + \frac{a^{(2)}(t)}{h^2(t)} v_{y_2y_2} +$$
$$+ \frac{b\,(y_1l(t), y_2h(t), t) + y_1p(t)}{l(t)} v_{y_1} +$$
$$+ \frac{c\,(y_1l(t), y_2h(t), t) + y_2g(t)}{h(t)} v_{y_2} +$$
$$+ d\,(y_1l(t), y_2h(t), t)\, v + f(y_1l(t), y_2h(t), t) \quad (33)$$

і задовольняє умови (9), (10). Продиференціюємо (26), (27) та врахуємо, що $v(y_1,y_2,t)$ є розв'язком рівняння (33). Провівши спрощення, отримаємо

$$p\,(t)\,h(t)\int_0^1 \mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 + g(t)\,l(t)\times$$
$$\times \int_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1 + \frac{a^{(1)}(t)\,h(t)}{l(t)}\times$$
$$\times \int_0^1 \left(v_{y_1}(1,y_2,t) - v_{y_1}(0,y_2,t)\right)\,dy_2 +$$
$$+ \frac{a^{(2)}(t)\,l(t)}{h(t)} \int_0^1 (v_{y_2}(y_1,1,t) -$$
$$- v_{y_2}(y_1,0,t))\,dy_1 = \mu_5'(t) -$$
$$- h(t)\int_0^1 \left(b\,(l(t), y_2h(t), t)\,\mu_2(y_2h(t),t) -\right.$$
$$\left. - b\,(0, y_2h(t), t)\,\mu_1(y_2h(t),t)\right)\,dy_2 -$$
$$- l(t)\int_0^1 \left(c\,(y_1l(t), h(t), t)\mu_4(y_1l(t),t) -\right.$$
$$\left. - c\,(y_1l(t), 0, t)\mu_3(y_1l(t),t)\right)\,dy_1 +$$
$$+ l(t)\,h(t)\int_0^1\int_0^1 \Big(b_\eta(\eta, y_2h(t), t)\,|_{\eta=y_1l(t)} +$$
$$+ c_\eta(y_1l(t), \eta, t)\,|_{\eta=y_2h(t)} -$$
$$- d\,(y_1l(t), y_2h(t), t)\Big)\, v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 -$$
$$- l(t)\,h(t)\int_0^1\int_0^1 f(y_1l(t), y_2h(t), t)\,dy_1\,dy_2 +$$
$$+ h(t)\big(p\,(t) - l'(t)\big)\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 +$$
$$+ l(t)\big(g\,(t) - h'(t)\big)\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2\,,$$

$$p\,(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\,\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 +$$
$$+ \frac{a^{(1)}(t)\,h^2(t)}{l(t)} \int_0^1 (1-y_2)\,(v_{y_1}(1,y_2,t) -$$
$$- v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2 - a^{(2)}(t)\,l(t)\times$$
$$\times \int_0^1 (v_{y_2}(y_1,0,t) + \mu_3(y_1l(t),t) -$$
$$- \mu_4(y_1l(t),t))\,dy_1 = \mu_5'(t)\,h(t) - \mu_6'(t) +$$
$$+ h(t)\,l(t)\int_0^1 c\,(y_1l(t), 0, t)\,\mu_3(y_1l(t),t)\,dy_1 -$$
$$- h(t)\,l(t)\int_0^1\int_0^1 c\,(y_1l(t), y_2h(t), t)\times$$
$$\times v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 - h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\times$$
$$\times \left(b\,(l(t), y_2h(t), t)\,\mu_2(y_2h(t),t) -\right.$$

$$-b\,(0,y_2h(t),t)\,\mu_1(y_2h(t),t))\;dy_2+$$

$$+l(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times\big(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\;|_{\eta=y_1l(t)}+$$

$$+c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\;|_{\eta=y_2h(t)}-$$

$$-d\,(y_1l(t),y_2h(t),t))\;v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2-$$

$$-l(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2+h^2(t)\big(p\,(t)-$$

$$-l'(t)\big)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2+$$

$$+l(t)\,h(t)\,\big(g\,(t)-h'(t)\big)\times$$

$$\times\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2\,.$$

Віднявши від цих рівностей (28), (29), отримаємо однорідну систему рівнянь

$$(g(t)-h'(t))l(t)\big(h(t)\mu_5(t)-2\mu_6(t)\big)+$$

$$+(p\,(t)-l'(t))h(t)\big(h(t)\mu_5(t)-\mu_6(t)\big)=0\,,$$

$$(g(t)-h'(t))l(t)\mu_5(t)+$$

$$+(p\,(t)-l'(t))h(t)\mu_5(t)=0\,.$$

Визначник цієї системи $\Delta=-h(t)\,l(t)\mu_5(t)\mu_6(t)\neq 0$. Отже, $p\,(t)\equiv l'(t)$, $g(t)\equiv h'(t)$. Виконання умов (11)-(14) випливає з (24)-(27). Еквівалентність задачі (8)-(14) та системи рівнянь (24)-(31) встановлено.

Застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, доведемо існування розв'язку системи рівнянь (24)-(31). Встановимо оцінки невідомих $w_i(y_1,y_2,t)\,,i=1,2$, $a^{(1)}(t)$, $a^{(2)}(t)$, $p(t)$, $g(t)$.

Оцінимо в (23) суму таких доданків:

$$l_0\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\times$$

$$\times\varphi_\eta(\eta,\xi_2h_0)|_{\eta=\xi_1l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\times$$

$$\times\mu_{3\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\times$$

$$\times\mu_{4\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau\geq$$

$$\geq l_0\min_{(x_1,x_2)\in[0,l_0]\times[0,h_0]}\varphi_{x_1}(x_1,x_2)\times$$

$$\times\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\,d\xi_1\,d\xi_2+$$

$$+\min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]}l(t)\mu_{3x_1}(x_1,t)\times$$

$$\times\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]}l(t)\mu_{4x_1}(x_1,t)\times$$

$$\times\Bigg(-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\times$$

$$\times\,d\xi_1\,d\tau\Bigg)\geq\min\{\min_{(x_1,x_2)\in[0,l_0]\times[0,h_0]}\varphi_{x_1}(x_1,x_2),$$

$$\min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]}l(t)\mu_{3x_1}(x_1,t),$$

$$\min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]}l(t)\mu_{4x_1}(x_1,t)\}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_0^1 G_1(y_2,t,\xi_2,0)\,d\xi_2+\int\limits_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,0,\tau)\times$$

$$\times\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau-\int\limits_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,1,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau\Bigg)\,,$$

де

$$G_1(y_2,t,\xi_2,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y_2-\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)-\right.$$

$$-\exp\left(-\frac{(y_2+\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\bigg)$$

- функція Гріна рівняння

$$v_t = \frac{a^{(2)}(t)}{h^2(t)} v_{yy}\,, \quad 0 < y < 1\,,\, 0 < t < T\,, \tag{34}$$

з крайовими умовами першого роду.

Розглянувши допоміжну задачу для рівняння (34) з умовами $v(y,0) = 1$, $y \in [0,1]$, $v(0,t) = 1$, $v(1,t) = 1$, $t \in [0,T]$, легко переконатися, що

$$\int_0^1 G_1(y_2,t,\xi_2,0)\,d\xi_2 + \int_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,0,\tau)\times$$

$$\times\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau - \int_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,1,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau \equiv 1\,.$$

Отже,

$$l_0 \int_0^1\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\times$$

$$\times\varphi_\eta(\eta,\xi_2 h_0)|_{\eta=\xi_1 l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\times$$

$$\times\mu_{3\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\times$$

$$\times\mu_{4\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau \ge M_2 > 0\,.$$

Решта доданків в (31) при $t = 0$ дорівнюють нулю. Тому існує деяке число $t_1 : 0 < t_1 \le T$, при якому виконується оцінка

$$w_1(y_1,y_2,t) \ge \frac{1}{2}M_2\,, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_1}\,. \tag{35}$$

Аналогічними міркуваннями отримаємо оцінку для w_2:

$$w_2(y_1,y_2,t) \ge \frac{1}{2}M_3\,, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_2}\,. \tag{36}$$

Враховуючи умови теореми та оцінки (18), (35), (36), з (24) та (25) отримаємо оцінки зверху для $a^{(1)}(t)$, $a^{(2)}(t)$:

$$0 < a^{(1)}(t) \le A_1\,, \qquad 0 < a^{(2)}(t) \le A_2\,,$$

$$t \in [0,t_3], \qquad t_3 = \min(t_1,t_2)\,. \tag{37}$$

Введемо позначення

$$W(t) \equiv \max_{0\le y_i\le 1,\, i=1,\,2} |\, w_1(y_1,y_2,t)\,| +$$

$$+\max_{0\le y_i\le 1,\, i=1,\,2} |\, w_2(y_1,y_2,t)\,|\,.$$

З (31) отримаємо

$$W(t) \le C_1 + C_2\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right)\Big(1+|\,p\,(\tau)\,|+|\,g(\tau)\,|\Big)\times$$

$$\times(1+W(\tau))\,d\tau\,. \tag{38}$$

З (28) та (29) випливає

$$\begin{aligned}|p\,(t)| &\le C_3 + C_4\,W(t)\,,\\ |g(t)| &\le C_5 + C_6\,W(t)\,.\end{aligned} \tag{39}$$

Отже, ввівши позначення $W_*(t) \equiv 1 + W(t)$, $a^{(1)}_{\min}(t) \equiv \min\limits_{0\le\tau\le t}\frac{a^{(1)}(\tau)}{l^2(\tau)}$, $a^{(2)}_{\min}(t) \equiv \min\limits_{0\le\tau\le t}\frac{a^{(2)}(\tau)}{h^2(\tau)}$, врахувавши, що

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_n(t)-\theta_n(\tau)}} \le \frac{1}{\sqrt{a^{(n)}_{\min}(t)(t-\tau)}}\,,\; n = 1,\,2\,,$$

та нерівності (39), оцінки (18) для $l(t)$, $h(t)$, нерівність (38) запишемо у вигляді

$$W_*(t) \le C_7 + C_8 A(t)\int_0^t \frac{W_*^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,,$$

де $A(t) = \dfrac{1}{\sqrt{a^{(1)}_{\min}(t)}} + \dfrac{1}{\sqrt{a^{(2)}_{\min}(t)}}$.

Проведемо перетворення аналогічно до [4], тоді нерівність набуде вигляду:

$$W_*(t) \le C_9 + C_{10}A(t) + \\ +C_{11}A^3(t) \int\limits_0^t W_*^4(t)\, d\tau\,. \qquad (40)$$

Ввівши позначення $\alpha\,(t) \equiv C_9 + C_{10}A(t)$, $\beta\,(t) \equiv C_{11}A^3(t)$, нерівність (40) подамо у вигляді

$$W_*(t) \le \alpha\,(t) + \beta\,(t) \int\limits_0^t W_*^4(t)\, d\tau\,.$$

Поділимо на $\beta\,(t)$ та введемо позначення $\omega\,(t) \equiv \dfrac{\alpha\,(t)}{\beta\,(t)} + \int\limits_0^t W_*^4(t)\, d\tau$. Тоді, продиференціювавши $\omega\,(t)$ по t та врахувавши, що $0 < W_*(t) \le \beta\,(t)\,\omega\,(t)$, отримаємо диференціальну нерівність:

$$\omega'\,(t) \le \left(\frac{\alpha\,(t)}{\beta\,(t)}\right)' + \beta^4\,(t)\,\omega^4\,(t)\,.$$

Розв'язавши цю нерівність, повернувшись до функцій, які ми замінили через $\alpha\,(t)$ і $\beta\,(t)$, та врахувавши, що $W_*(t) \le \beta\,(t)\,\omega\,(t)$, отримаємо оцінку

$$W_*(t) \le C_9 + C_{10}A(t) + \\ + \frac{C_{12}A^6(t)}{1 - C_{13}\int\limits_0^t A^{12}(\tau)\, d\tau} \int\limits_0^t A^{12}(\tau)\, d\tau\,.$$

З оцінок (18) та $a(t) \ge \dfrac{C_{14}}{W(t)}$ випливає, що $A(t) \le C_{15}\sqrt{W_*(t)}$. Отже

$$W_*(t) \le C_9 + C_{16}\sqrt{W_*(t)} + \\ + \frac{C_{17}W_*^3(t)}{1 - C_{18}\int\limits_0^t W_*^6(\tau)\, d\tau} \int\limits_0^t W_*^6(\tau)\, d\tau\,.$$

Звузимо проміжок по часовій змінній до такого $t_4 : \ 0 < t_4 \le T$, при якому

$$1 - C_{18} \int\limits_0^{t_2} W_*^6(\tau)\, d\tau \ge \frac{1}{2}\,.$$

Тоді

$$W_*(t) \le C_{19} + C_{20}W_*^3(t) \int\limits_0^t W_*^6(\tau)\, d\tau\,, \\ t \in [0, t_4]\,.$$

Цю нерівність запишемо у вигляді:

$$W_*(t) \left(1 - C_{20}W_*^2(t) \int\limits_0^t W_*^6(\tau)\, d\tau\right) \le C_{19}\,.$$

Існує таке $t_5 : \ 0 < t_5 \le t_4 \le T$, при якому для довільного $t \in [0, t_5]$ виконується умова

$$C_{20}W_*^2(t) \int\limits_0^t W_*^6(\tau)\, d\tau \le \frac{1}{2}\,.$$

Тоді отримаємо оцінку

$$W_*(t) \le 2\,C_{19}\,, \qquad t \in [0, t_5]\,.$$

Отже, правильна наступна оцінка:

$$|w_i(y_1, y_2, t)| \le W_*(t) \le M_4 < \infty \\ i = 1, 2\,, \qquad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_5}\,. \qquad (41)$$

Тоді з (24), (25), (39) випливають оцінки для $p\,(t)$, $g\,(t)$ та $a^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$:

$$a^{(1)}(t) \ge A_3 > 0\,, \quad a^{(2)}(t) \ge A_4 > 0\,, \\ |p\,(t)| \le P_1\,, \quad |g\,(t)| \le P_2\,, \quad t \in [0, t_5]\,. \quad (42)$$

Систему рівнянь (24)-(31) подамо у вигляді рівняння $\nu = F\nu$, де $\nu = (a^{(1)}(t), a^{(2)}(t), h(t), l(t), p(t), g(t), v(y_1, y_2, t), w_i(y_1, y_2, t), i = 1, 2)$, а оператор F визначається рівняннями (24)-(27), (30), (31) та рівняннями (28), (29), які розв'язні стосовно $p(t)$ та $g(t)$. Визначимо множину $N \equiv \{(a^{(1)}, a^{(2)}, h, l, p, g, v, w_i, i = 1, 2) \in (C[0, t_0])^5 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^3$: $A_3 \le a^{(1)}(t) \le A_1$, $A_4 \le a^{(2)}(t) \le A_2$, $H_1 \le h(t) \le H_2$, $L_1 \le l(t) \le L_2$, $|p(t)| \le P_1$, $|g(t)| \le P_2$, $M_0 \le v(y_1, y_2, t) \le M_1$, $\frac{1}{2}M_2 \le w_1(y_1, y_2, t) \le M_4$, $\frac{1}{2}M_3 \le w_2(y_1, y_2, t) \le M_4\}$, де $t_0 = \min\{t_3, t_4, t_5\}$.

З встановлених оцінок випливає, що оператор F відображає множину N в себе. Те, що оператор F є цілком неперервним, доведено в [4]. За теоремою Шаудера [5] розв'язок системи рівнянь (24)-(31) існує, а отже, існує і розв'язок задачі (8)-(14).

Теорема єдиності. Нехай виконуються умови:

1) $d,\ f \in C^{1,0}([0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,T])$, $b,\ c \in C^{2,0}([0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,T])$, $\mu_n \in C^{3,0}([0,+\infty)\times[0,T])\,,\ n=\overline{1,4}$, $\mu_{i\,t\,x_2}\in C([0,+\infty)\times[0,T])\,,\ i=1,2$, $\mu_{k\,t\,x_1}\in C([0,+\infty)\times[0,T])\,,\ k=3,4$,

2) $0<\varphi_0\le\varphi(x_1,x_2)\le\varphi_1<\infty$, $(x_1,x_2)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, $d(x_1,x_2,t)\le 0$, $0\le f(x_1,x_2,t)\le f_1<\infty\,,(x_1,x_2,t)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,T]$, $\mu_i(t)>0$, $i=5,6$, $t\in[0,T]$, $\mu_k(t)\ne 0$, $k=7,8$, $t\in[0,T]$, $0<\mu_{i0}\le\mu_i(x_2,t)\le\mu_{i1}<\infty\,,i=1,2\,,(x_2,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$, $0<\mu_{k0}\le\mu_k(x_1,t)\le\mu_{k1}<\infty\,,k=3,4\,,(x_1,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$, $0<x^{(1)}<L_1$, $0<x^{(2)}<H_1$, де L_1, H_1- деякі додатні сталі, якими обмежені знизу функції $l(t)$ та $h(t)$.

Тоді розв'язок задачі (8)-(14) єдиний.

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i^{(1)}(t),\ a_i^{(2)}(t),\ h_i(t),\ l_i(t),\ v_i(y_1,y_2,t))$, $i=1,2$ задачі (8)-(14). Введемо позначення: $\dfrac{a_i^{(1)}(t)}{l_i^2(t)}=\widetilde{a_{1i}}(t)$, $\dfrac{a_i^{(2)}(t)}{h_i^2(t)}=\widetilde{a_{2i}}(t)$, $\dfrac{l_i'(t)}{l_i(t)}=q_{1i}(t)$, $\dfrac{h_i'(t)}{h_i(t)}=q_{2i}(t)$. Тоді різниці $b_1(t)=\widetilde{a_{12}}(t)-\widetilde{a_{11}}(t)$, $b_2(t)=\widetilde{a_{22}}(t)-\widetilde{a_{21}}(t)$, $q_1(t)=q_{12}(t)-q_{11}(t)$, $q_2(t)=q_{22}(t)-q_{21}(t)$, $v(y_1,y_2,t)=v_2(y_1,y_2,t)-v_1(y_1,y_2,t)$ задовольнятимуть рівняння

$$v_t=\widetilde{a_{11}}(t)v_{y_1y_1}+\widetilde{a_{21}}(t)v_{y_2y_2}+$$
$$+\left(y_1q_{11}(t)+\frac{b(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)}{l_1(t)}\right)v_{y_1}+$$
$$+\left(y_2q_{21}(t)+\frac{c(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)}{h_1(t)}\right)v_{y_2}+$$
$$+d(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)\,v+b_1(t)v_{2y_1y_1}+$$
$$+b_2(t)v_{2y_2y_2}+\left(\frac{1}{l_1(t)}\left(b(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-\right.\right.$$
$$-b(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))+y_1q_1(t)+$$
$$+\left(\frac{1}{l_2(t)}-\frac{1}{l_1(t)}\right)b(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)\Big)\,v_{2y_1}+$$
$$+\left(\frac{1}{h_1(t)}\left(c(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-\right.\right.$$
$$-c(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))+y_2q_2(t)+$$
$$+\left(\frac{1}{h_2(t)}-\frac{1}{h_1(t)}\right)c(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)\Big)\,v_{2y_2}+$$
$$+\left(d(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-d(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)\right)v_2+$$
$$+f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)\,,$$
$$(y_1,y_2,t)\in Q_T \tag{43}$$

та умови

$$v(y_1,y_2,0)=0\,,\quad 0\le y_i\le 1\,,\ i=1,2 \tag{44}$$

$$v(0,y_2,t)=\mu_1(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_1(t),t)\,,$$
$$v(1,y_2,t)=\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_2(y_2h_1(t),t)\,,$$
$$(y_2,t)\in[0,1]\times[0,T]\,, \tag{45}$$

$$v(y_1,0,t)=\mu_3(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_1(t),t)\,,$$
$$v(y_1,1,t)=\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_4(y_1l_1(t),t)\,,$$
$$(y_1,t)\in[0,1]\times[0,T]\,, \tag{46}$$

$$\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)\,dy_2dy_1=\mu_5(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\right)\,,\quad t\in[0,T]\,, \tag{47}$$

$$\int_0^1\int_0^1 y_2v(y_1,y_2,t)\,dy_2dy_1=\mu_6(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}\right)\,,\quad t\in[0,T]\,, \tag{48}$$

$$b_1(t)v_{2y_1}\left(0,x^{(2)}h_2^{-1}(t),t\right)=\mu_7(t)\left(\frac{1}{l_2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{l_1(t)}\right)-\widetilde{a_{11}}(t)v_{y_1}\left(0,x^{(2)}h_2^{-1}(t),t\right)-$$
$$-\widetilde{a_{11}}(t)\left(v_{1y_1}\left(0,x^{(2)}h_2^{-1}(t),t\right)-\right.$$
$$\left.-v_{1y_1}\left(0,x^{(2)}h_1^{-1}(t),t\right)\right)\,,\quad t\in[0,T]\,, \tag{49}$$

$$b_2(t)v_{2y_2}\left(x^{(1)}l_2^{-1}(t),0,t\right)=\mu_8(t)\left(\frac{1}{h_2(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h_1(t)}\right)-\widetilde{a_{21}}(t)v_{y_2}\left(x^{(1)}l_2^{-1}(t),0,t\right)-$$

$$-\widetilde{a_{21}}(t)\left(v_{1y_2}\left(x^{(1)}l_2^{-1}(t),0,t\right)-\right.$$

$$\left.-v_{1y_2}\left(x^{(1)}l_1^{-1}(t),0,t\right)\right)\,,\qquad t\in[0,T]\,. \quad (50)$$

Задача (43)-(46) еквівалентна рівнянню

$$v(y_1,y_2,t)=\int_0^t\int_0^1 G^*_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_1(\xi_2h_2(\tau),\tau)-\mu_1(\xi_2h_1(\tau),\tau)\Big)\times$$

$$\times\widetilde{a_{11}}(\tau)\,d\xi_2\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G^*_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_2(\xi_2h_2(\tau),\tau)-\mu_2(\xi_2h_1(\tau),\tau)\Big)\times$$

$$\times\widetilde{a_{11}}(\tau)\,d\xi_2\,d\tau+\int_0^t\int_0^1 G^*_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_3(\xi_1l_2(\tau),\tau)-\mu_3(\xi_1l_1(\tau),\tau)\Big)\times$$

$$\times\widetilde{a_{21}}(\tau)\,d\xi_1\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G^*_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_4(\xi_1l_2(\tau),\tau)-\mu_4(\xi_1l_1(\tau),\tau)\Big)\times$$

$$\times\widetilde{a_{21}}(\tau)\,d\xi_1\,d\tau+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G^*_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\left(\left(\xi_1q_{11}(\tau)+\frac{b(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)}{l_1(\tau)}\right)v_{\xi_1}+\right.$$

$$+\left(\xi_2q_{21}(\tau)+\frac{c(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}\right)v_{\xi_2}+$$

$$+d(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)\,v+b_1(\tau)v_{2\xi_1\xi_1}+$$

$$+b_2(\tau)v_{2\xi_2\xi_2}+\left(\frac{1}{l_1(\tau)}\left(b(\xi_1l_2(\tau),\xi_2h_2(\tau),\tau)-\right.\right.$$

$$\left.-b(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)\right)+\xi_1q_1(\tau)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{l_2(\tau)}-\frac{1}{l_1(\tau)}\right)b(\xi_1l_2(\tau),\xi_2h_2(\tau),\tau)\right)v_{2\xi_1}+$$

$$+\left(\frac{1}{h_1(\tau)}\left(c(\xi_1l_2(\tau),\xi_2h_2(\tau),\tau)-\right.\right.$$

$$\left.-c(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)\right)+\xi_2q_2(\tau)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{h_2(\tau)}-\frac{1}{h_1(\tau)}\right)c(\xi_1l_2(\tau),\xi_2h_2(\tau),\tau)\right)v_{2\xi_2}+$$

$$+\left(d(\xi_1l_2(\tau),\xi_2h_2(\tau),\tau)-d(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)\right)\times$$

$$\times v_2+f(\xi_1l_2(\tau),\xi_2h_2(\tau),\tau)-$$

$$\left.-f(\xi_1l_1(\tau),\xi_2h_1(\tau),\tau)\right)d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,, \qquad (51)$$

де $G^*_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$ є функцією Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\widetilde{a_{11}}(t)v_{y_1y_1}+\widetilde{a_{21}}(t)v_{y_2y_2}\,.$$

Оскільки функції $(a_i^{(1)}(t),\ a_i^{(2)}(t),\ l_i(t),\ h_i(t),\ v_i(y_1,y_2,t)),\ i=1,2$ є розв'язком задачі (8)-(14), то вони задовольняють рівняння (28), (29). Віднявши ці рівності одну від одної, отримаємо рівняння

$$q_1(t)\int_0^1(1-y_2)\mu_2(y_2h_2(t),t)\,dy_2=$$

$$=b_2(t)\int_0^1\left(v_{2y_2}(y_1,0,t)-\mu_4(y_1l_2(t),t)+\right.$$

$$\left.+\mu_3(y_1l_2(t),t)\right)dy_1-b_1(t)\int_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times\left(v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t)\right)dy_2-$$

$$-\widetilde{a_{11}}(t)\int_0^1(1-y_2)\left(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t)\right)\times$$

$$\times dy_2+\widetilde{a_{21}}(t)\int_0^1\Big(v_{y_2}(y_1,0,t)+\mu_3(y_1l_2(t),t)-$$

$$-\mu_3(y_1l_1(t),t)+\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t)\Big)\times$$

$$\times dy_1 - q_{11}(t)\int\limits_0^1 (1-y_2)\,(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_2(y_2h_1(t),t))\;dy_2 + \mu_5'(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\right)-\mu_6'(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}\right)-$$
$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-y_2)\,(f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-$$
$$-f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))\;dy_1\,dy_2 + \left(\frac{1}{h_2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{h_1(t)}\right)\int\limits_0^1 c(y_1l_2(t),0,t)\mu_3(y_1l_2(t),t)\,dy_1+$$
$$+\frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1 (c(y_1l_2(t),0,t)\,(\mu_3(y_1l_2(t),t)-$$
$$-\mu_3(y_1l_1(t),t)) + (c(y_1l_2(t),0,t)-$$
$$-c(y_1l_1(t),0,t))\,\mu_3(y_1l_1(t),t))\;dy_1 + \left(\frac{1}{l_2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{l_1(t)}\right)\int\limits_0^1 (1-y_2)\,(b(0,y_2h_2(t),t)\mu_1(y_2h_2(t),t)-$$
$$-b(l_2(t),y_2h_2(t),t)\mu_2(y_2h_2(t),t))\;dy_2+$$
$$+\frac{1}{l_1(t)}\int\limits_0^1 (1-y_2)\,(b(0,y_2h_2(t),t)\,(\mu_1(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_1(t),t)) + (b(0,y_2h_2(t),t)-$$
$$-b(0,y_2h_1(t),t))\,\mu_1(y_2h_1(t),t))\;dy_2 - \frac{1}{l_1(t)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1 (1-y_2)\,(b(l_2(t),y_2h_2(t),t)\,(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_2(y_2h_1(t),t)) + (b(l_2(t),y_2h_2(t),t)-$$
$$-b(l_1(t),y_2h_1(t),t))\,\mu_2(y_2h_1(t),t))\;dy_2+$$
$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-y_2)\,\big(b_\eta(\eta,y_2h_2(t),t)\,|_{\eta=y_1l_2(t)} +$$
$$+c_\eta(y_1l_2(t),\eta,t)\,|_{\eta=y_2h_2(t)} -$$
$$-d(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2-$$
$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-y_2)\,\big(b_\eta(\eta,y_2h_1(t),t)\,|_{\eta=y_1l_1(t)} +$$
$$+c_\eta(y_1l_1(t),\eta,t)\,|_{\eta=y_2h_1(t)} -$$
$$-d(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2\,,$$
$$t\in[0,T]\,, \tag{52}$$
$$q_1(t)\int\limits_0^1 \mu_2(y_2h_2(t),t)\,dy_2+$$
$$+q_2(t)\int\limits_0^1 \mu_4(y_1l_2(t),t)\,dy_1 =$$
$$= -b_2(t)\int\limits_0^1 (v_{2y_2}(y_1,1,t)-v_{2y_2}(y_1,0,t))\;dy_1-$$
$$-b_1(t)\int\limits_0^1 (v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t))\;dy_2-$$
$$-\widetilde{a_{11}}(t)\int\limits_0^1 (v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))\;dy_2-$$
$$-\widetilde{a_{21}}(t)\int\limits_0^1 (v_{y_2}(y_1,1,t)-v_{y_2}(y_1,0,t))\;dy_1-$$
$$-q_{11}(t)\int\limits_0^1 (\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_2(y_2h_1(t),t))\;dy_2-$$
$$-q_{21}(t)\int\limits_0^1 (\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_4(y_1l_1(t),t))\;dy_1+$$
$$+\mu_5'(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\right)-$$
$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-$$
$$-f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))\;dy_1\,dy_2 + \left(\frac{1}{l_2(t)}-\right.$$

$$-\frac{1}{l_1(t)}\Big)\int\limits_0^1 (b(0,y_2h_2(t),t)\mu_1(y_2h_2(t),t)-$$

$$-b(l_2(t),y_2h_2(t),t)\mu_2(y_2h_2(t),t))\ dy_2+$$

$$+\frac{1}{l_1(t)}\int\limits_0^1 (b(0,y_2h_2(t),t)\,(\mu_1(y_2h_2(t),t)-$$

$$-\mu_1(y_2h_1(t),t))+(b(0,y_2h_2(t),t)-$$

$$-b(0,y_2h_1(t),t))\,\mu_1(y_2h_1(t),t))\ dy_2-$$

$$-\frac{1}{l_1(t)}\int\limits_0^1 (b(l_2(t),y_2h_2(t),t)\,(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$

$$-\mu_2(y_2h_1(t),t))+(b(l_2(t),y_2h_2(t),t)-$$

$$-b(l_1(t),y_2h_1(t),t))\,\mu_2(y_2h_1(t),t))\ dy_2+$$

$$+\left(\frac{1}{h_2(t)}-\frac{1}{h_1(t)}\right)\int\limits_0^1 (c(y_1l_2(t),0,t)\times$$

$$\times\mu_3(y_1l_2(t),t)-c(y_1l_2(t),h_2(t),t)\times$$

$$\times\ \mu_4(y_1l_2(t),t))\ dy_1+\frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1\times$$

$$\times\,(c(y_1l_2(t),0,t)\,(\mu_3(y_1l_2(t),t)-$$

$$-\mu_3(y_1l_1(t),t))+(c(y_1l_2(t),0,t)-$$

$$-c(y_1l_1(t),0,t))\,\mu_3(y_1l_1(t),t))\ dy_1-$$

$$-\frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1 (c(y_1l_2(t),h_2(t),t)\,(\mu_4(y_1l_2(t),t)-$$

$$-\mu_4(y_1l_1(t),t))+(c(y_1l_2(t),h_2(t),t)-$$

$$-c(y_1l_1(t),h_1(t),t))\,\mu_4(y_1l_1(t),t))\ dy_1+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \big(b_\eta(\eta,y_2h_2(t),t)\ |_{\eta=y_1l_2(t)}+$$

$$+c_\eta(y_1l_2(t),\eta,t)\ |_{\eta=y_2h_2(t)}-$$

$$-d(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \big(b_\eta(\eta,y_2h_1(t),t)\ |_{\eta=y_1l_1(t)}+$$

$$+c_\eta(y_1l_1(t),\eta,t)\ |_{\eta=y_2h_1(t)}-$$

$$-d(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2\,,$$

$$t\in[0,T]\,. \tag{53}$$

Використовуючи властивості функції Гріна, з (51), знайдемо v_{y_1}, v_{y_2}:

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)=\ -\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^*_{21}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\Big(\xi_2\Big(h_2'(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2h_2(\tau)}-$$

$$-h_1'(\tau)\mu_{1\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_2h_1(\tau)}\Big)-\widetilde{a_{21}}(\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2h_2(\tau)}-\mu_{1\zeta\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_2h_1(\tau)}\Big)+$$

$$+\mu_{1\tau}(\xi_2h_2(\tau),\tau)-\mu_{1\tau}(\xi_2h_1(\tau),\tau)\Big)\,d\xi_2\,d\tau-$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^*_{21}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\Big(\xi_2\Big(h_2'(\tau)\times$$

$$\times\mu_{2\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2h_2(\tau)}-h_1'(\tau)\mu_{2\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_2h_1(\tau)}\Big)-$$

$$-\widetilde{a_{21}}(\tau)\Big(\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2h_2(\tau)}-$$

$$-\mu_{2\zeta\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_2h_1(\tau)}\Big)+$$

$$+\mu_{2\tau}(\xi_2h_2(\tau),\tau)-\mu_{2\tau}(\xi_2h_1(\tau),\tau)\Big)\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^*_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\widetilde{a_{21}}(\tau)\Big(l_2(\tau)\times$$

$$\times\mu_{3\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1l_2(\tau)}-l_1(\tau)\mu_{3\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_1l_1(\tau)}\Big)\times$$

$$\times d\xi_1\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^*_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\widetilde{a_{21}}(\tau)\times$$

$$\times\Big(l_2(\tau)\mu_{4\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1l_2(\tau)}-$$

$$-l_1(\tau)\mu_{4\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_1l_1(\tau)}\Big)\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G^*_{11y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\bigg(\Big(\xi_1 q_{11}(\tau)+\frac{b(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)}{l_1(\tau)}\Big)v_{\xi_1}+$$

$$+\Big(\xi_2 q_{21}(\tau)+\frac{c(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}\Big)v_{\xi_2}+$$

$$+d(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)\,v+b_1(\tau)v_{2\xi_1\xi_1}+$$

$$+b_2(\tau)v_{2\xi_2\xi_2}+\bigg(\frac{1}{l_1(\tau)}\,(b(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-b(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau))+\xi_1 q_1(\tau)+$$

$$+\Big(\frac{1}{l_2(\tau)}-\frac{1}{l_1(\tau)}\Big)b(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)\bigg)v_{2\xi_1}+$$

$$+\bigg(\frac{1}{h_1(\tau)}\,(c(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-c(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau))+\xi_2 q_2(\tau)+$$

$$+\Big(\frac{1}{h_2(\tau)}-\frac{1}{h_1(\tau)}\Big)c(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)\bigg)\times$$

$$\times v_{2\xi_2}+(d(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-d(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau))\,v_2+$$

$$+f(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-f(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)\Bigg)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,, \qquad (54)$$

$$v_{y_2}(y_1,y_2,t)=\ -\int_0^t\int_0^1 G^*_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\times$$

$$\times\Big(\xi_1\Big(l_2'(\tau)\mu_{3\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)}-$$

$$-l_1'(\tau)\mu_{3\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\Big)-\widetilde{a_{11}}(\tau)\times$$

$$\times\Big(\mu_{3\eta\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)}-\mu_{3\zeta\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\Big)+$$

$$+\mu_{3\tau}(\xi_1 l_2(\tau),\tau)-\mu_{3\tau}(\xi_1 l_1(\tau),\tau)\Big)\,d\xi_1\,d\tau-$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G^*_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\Big(\xi_1\Big(l_2'(\tau)\times$$

$$\times\mu_{4\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)}-l_1'(\tau)\mu_{4\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\Big)-$$

$$-\widetilde{a_{11}}(\tau)\Big(\mu_{4\eta\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)}-$$

$$-\mu_{4\zeta\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\Big)+$$

$$+\mu_{4\tau}(\xi_1 l_2(\tau),\tau)-\mu_{4\tau}(\xi_1 l_1(\tau),\tau)\Big)\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G^*_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\widetilde{a_{11}}(\tau)\Big(h_2(\tau)\times$$

$$\times\mu_{1\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)}-h_1(\tau)\mu_{1\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\Big)\times$$

$$\times d\xi_2\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G^*_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\widetilde{a_{11}}(\tau)\times$$

$$\times\Big(h_2(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)}-$$

$$-h_1(\tau)\mu_{2\zeta}(\zeta,\tau)|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\Big)\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G^*_{11y_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times\bigg(\Big(\xi_1 q_{11}(\tau)+\frac{b(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)}{l_1(\tau)}\Big)v_{\xi_1}+$$

$$+\Big(\xi_2 q_{21}(\tau)+\frac{c(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}\Big)v_{\xi_2}+$$

$$+d(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)\,v+b_1(\tau)v_{2\xi_1\xi_1}+$$

$$+b_2(\tau)v_{2\xi_2\xi_2}+\bigg(\frac{1}{l_1(\tau)}\,(b(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-b(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau))+\xi_1 q_1(\tau)+$$

$$+\Big(\frac{1}{l_2(\tau)}-\frac{1}{l_1(\tau)}\Big)b(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)\bigg)v_{2\xi_1}+$$

$$+\bigg(\frac{1}{h_1(\tau)}\,(c(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-c(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau))+\xi_2 q_2(\tau)+$$

$$+\Big(\frac{1}{h_2(\tau)}-\frac{1}{h_1(\tau)}\Big)c(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)\bigg)\times$$

$$\times v_{2\xi_2}+(d(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-d(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau))\,v_2+$$

$$+f(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau)-$$

$$-f(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)\bigg)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,, \qquad (55)$$

Визначимо $l_i(t)$, $h_i(t)$ через $q_1(t)$ та $q_2(t)$:

$$l_i(t) = l_0 \exp \int_0^t q_{1i}(\tau)\, d\tau \, , \; i = 1, 2 \, ,$$

$$h_i(t) = h_0 \exp \int_0^t q_{2i}(\tau)\, d\tau \, , \; i = 1, 2 \, .$$

Використовуючи рівності

$$e^x - e^y = (x - y) \int_0^1 e^{\,y + \tau\,(x-y)}\, d\tau \, ,$$

$$f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t) = y(h_1(t) - h_2(t)) \times$$

$$\times \int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))), t)\, d\sigma \, ,$$

отримаємо

$$h_2(t) - h_1(t) = h_0 \int_0^t q_2(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_0^1 \exp\Big(\int_0^t (q_{21}(\tau) + \sigma q_2(\tau))\, d\tau\Big)\, d\sigma \, ,$$

$$l_2(t) - l_1(t) = l_0 \int_0^t q_1(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_0^1 \exp\Big(\int_0^t (q_{11}(\tau) + \sigma q_1(\tau))\, d\tau\Big)\, d\sigma \, ,$$

$$\mu_i(y_2 h_2(t), t) - \mu_i(y_2 h_1(t), t) = y_2(h_2(t) -$$

$$-h_1(t)) \int_0^1 \mu_{ix}(y_2(h_1(t) + \sigma(h_2(t) - h_1(t))), t)\, d\sigma \, ,$$

$$\mu_{i\,t}(y_2 h_2(t), t) - \mu_{i\,t}(y_2 h_1(t), t) = y_2(h_2(t) -$$

$$-h_1(t)) \int_0^1 \mu_{i\,t\,x}(y_2(h_1(t) + \sigma(h_2(t) - h_1(t))), t)\, d\sigma \, ,$$

$$\mu_{iy_2}(y_2 h_2(t), t) - \mu_{iy_2}(y_2 h_1(t), t) = y_2(h_2(t) -$$

$$-h_1(t)) \int_0^1 \mu_{iy_2x}(y_2(h_1(t) + \sigma(h_2(t) - h_1(t))), t)\, d\sigma \, ,$$

$$i = 1, 2 \, ,$$

$$\mu_k(y_1 l_2(t), t) - \mu_k(y_1 l_1(t), t) = y_1(l_2(t) - l_1(t)) \times$$

$$\times \int_0^1 \mu_{kx}(y_1(l_1(t) + \sigma(l_2(t) - l_1(t))), t)\, d\sigma \, ,$$

$$\mu_{ky_1\,y_1}(y_1 l_2(t), t) - \mu_{ky_1\,y_1}(y_1 l_1(t), t) = y_1(l_2(t) -$$

$$-l_1(t)) \int_0^1 \mu_{ky_1\,y_1x}(y_1(l_1(t) + \sigma(l_2(t) - l_1(t))), t)\, d\sigma \, ,$$

$$k = 3, 4 \, ,$$

Підставимо (49), (50) в (51)-(55), отримаємо, що система рівнянь (51)-(55) є однорідною системою Вольтерра другого роду відносно невідомих $q_1(t)$, $q_2(t)$, $v(y_1, y_2, t)$, $v_{y_1}(y_1, y_2, t)$, $v_{y_2}(y_1, y_2, t)$. Внаслідок єдиності розв'язку таких систем одержимо: $q_1(t) \equiv 0$, $q_2(t) \equiv 0$, $v(y_1, y_2, t) \equiv 0$, $v_{y_1}(y_1, y_2, t) \equiv 0$, $v_{y_2}(y_1, y_2, t) \equiv 0$.

Отже, єдиність розв'язку задачі (8)-(14) доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ратыни А. К.* Условия корректности задачи определения матрицы коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференц. уравнения.— 1992.— 28. №8.— С.1419 - 1426.

2. *М. І. Іванчов* Обернена задача теплопровідності в анізотропному тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 2000.— 43, №1.— С.45 - 50.

3. *І. Є. Баранська* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 2007.— 50, №2.— С.17 - 28.

4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type.— VNTL Publishers, 2003.

5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.