УДК 517.51, 515.12

©2008 р. Л.Є. Базилевич

Національний університет "Львівська політехніка"

ГІПЕРПРОСТІР РОТОРІВ ТРИКУТНИКА, УТВОРЕНИХ КОЛОВИМИ ДУГАМИ

Доведено, що гіперпростір роторів правильного трикутника, межі яких є скінченними об'єднаннями дуг кіл, утворює псевдомежу для скінченновимірних компактів у гіперпросторі всіх роторів (останній, як відомо, гомеоморфний гільбертовому кубові).

It is proved that the hyperspace of rotors in perfect triangles with bounds that are finite unions of circle arches is a pseudo-bound for finite dimensional compacts in the hyperspace of all rotors (the last, as is well known, is homeomorphic to the Hilbert cube).

Вступ. У попередній праці автора [1] показано, що гіперпростір роторів правильного n-кутника на площині гомеоморфний гільбертовому кубові Q. Цей результат можна вважати аналогом теореми Надлера-Квінна-Ставрокаса [2] про те, що гіперпростір компактних опуклих тіл в n-вимірному евклідовому просторі (кубові), $n \geq 2$, гомеоморфний гільбертовому кубові з видаленою точкою (відповідно гільбертовому кубові).

Нагадаємо, що гільбертів куб Q – це зліченна степінь відрізка $[0,1]$, $Q = [0,1]^\omega$. Нехай $\sigma = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in Q \mid x_i = 0$ для всіх, крім скінченного числа $i\}$. Топологічну класифікацію пари (Q,σ) можна знайти в [3]. Нескладно показати, що пара $(\mathrm{cc}([0,1]^n), \mathrm{pcc}([0,1]^n))$, $n \geq 2$, де $\mathrm{cc}([0,1]^n)$ (відповідно $\mathrm{pcc}([0,1]^n)$) означає множину (поліедральних) непорожніх опуклих компактних множин в кубі $[0,1]^n$, гомеоморфна парі (Q,σ).

Аналогічне твердження доведено для поліедральних тіл сталої ширини для випадку $n = 2$ (див. [1]). При цьому поліедральність означає, що відповідне тіло має межу, утворену дугами кіл. Зауважимо, що тіла сталої ширини — це ротори квадрата, а тому природно формулювати відповідну задачу також і для випадку роторів довільного многокутника.

У статті розглянуто випадок роторів правильного трикутника. Для формулювання основного результату запровадимо деякі позначення.

Нехай маємо рівносторонній трикутник зі стороною R.

Означення 1. *Назвемо R-**ротором** замкнене опукле тіло U, яке можна вільно обернути у цьому трикутнику, причому так, що його положення при фіксованому куті повороту едине.*

Позначимо множину всіх R-роторів через $\mathcal{R}$. На множині $\mathcal{R}$ розглядають метрику Гаусдорфа d_H:

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\}$$

(тут і далі $O_r(C)$ означає r-окіл множини C).

Нехай $\mathcal{R}_p$ — множина усіх роторів, межі яких є скінченними об'єднаннями дуг кіл.

Основним результатом є таке твердження.

Теорема 1. *Пара $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_p)$ гомеоморфна парі (Q,σ).*

Опишемо стратегію доведення цієї теореми. Множина $\mathcal{R}$ допускає природну опуклу структуру, що задається опуклою комбінацією Мінковського:

$$tA + (1-t)B = \{ta + (1-t)b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

(див. [1]). Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\mathcal{R}$ лежить в локально опуклому просторі як опуклий компакт. Тоді, як нескладно переконатися, множина $\mathcal{R}_p$ є опуклою підмножиною в $\mathcal{R}$. Крім того, множина $\mathcal{R}_p$ є зліченним об'єднанням замкнених скінченновимірних множин.

Нагадаємо, що замкнена множина A в компактному метричному просторі X називається *Z-множиною*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує неперервне відображення $f_\varepsilon \colon X \to X$ таке, що $d(f_\varepsilon(x), x)) < \varepsilon$ для кожного $x \in X$ (тут через d позначають метрику в X).

Лема 1.1. *Множина $\mathcal{R}_p$ є зліченним об'єднанням Z-множин.*

Доведення. Вище зауважено, що множина $\mathcal{R}_p$ є зліченним об'єднанням замкнених множин. Нехай $\mathcal{K}$ — одна з таких множин. Розглянемо множину $A_0 \notin \mathcal{R}_p$ і нехай $\varepsilon > 0$. Означимо відображення $f \colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ формулою: $f(A) = (1 - (\varepsilon/2))A + (\varepsilon/2)A_0$, $a \in \mathcal{R}$. Легко бачити, що $d(f_\varepsilon(A), A)) < \varepsilon$ для кожного $A \in \mathcal{R}$ і що $f(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_p = \emptyset$. □

Скориставшись результатом Добровольського [4] приходимо до висновку, що для доведення теореми 1 досить показати, що множина $\mathcal{R}_p$ всюди щільна в $\mathcal{R}$. Це є предметом усіх наступних розділів статті; результат сформульовано як теорему 2.

Дотичні трикутники. Нехай маємо рівносторонній трикутник зі стороною R і множину всіх R-роторів.

Очевидно, що ротор торкається кожної сторони трикутника. Можна також вважати, що не ротор обертається всередині трикутника, а трикутник обертається навколо ротора. Іншими словами, навколо довільного R-ротора U обертається трикутник $S_\varphi T_\varphi Q_\varphi$ зі стороною R: $\varphi \in [0, 2\pi/3]$, $S_{2\pi/3} = Q_0$, $Q_{2\pi/3} = T_0$, $T_{2\pi/3} = S_0$.

Нам знадобиться такий простий геометричний факт.

Лема 1.2. *Нехай маємо рівносторонній трикутник ΔNKQ зі стороною p. Опишемо навколо нього коло і нехай O — довільна точка дуги $\smile NK$ цього кола. Тоді $\angle NOQ = \angle QOK = \pi/3$ і $\angle NOK = 2\pi/3$ і $|ON| + |OL| = |OQ|$.*

Доведення. Нехай D – центр описаного кола. Тоді трикутники ΔODK та ΔODN рівнобічні і $\angle DOK = \frac{1}{2}(\pi - \angle ODK)$, $\angle DON = \frac{1}{2}(\pi - \angle ODN)$. Тому $\angle NOK = \angle DOK + \angle DON = \frac{1}{2}(2\pi - \angle ODK - \angle ODN) = \frac{1}{2}(2\pi - 2\pi/3) = 2\pi/3$. Кути $\angle QOK$ та $\angle QON$ дорівнюють половині градусної міри дуги, на яку вони спираються, тобто $\pi/3$.

Нехай $\angle QOK = \varphi$, $\varphi \in [0, \pi/3]$. Тоді $\frac{|OK|}{\sin\varphi} = \frac{|OQ|}{\sin(2\pi/3 - \varphi)} = \frac{p}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|ON|}{\sin(\pi/3 - \varphi)}$. Маємо $|OK| = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\varphi p$, $|ON| = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\pi/3 - \varphi)p$ і $|OQ| = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(2\pi/3 - \varphi)p$. Оскільки $\sin\varphi + \sin(\pi/3 - \varphi) = \sin(2\pi/3 - \varphi)$, то лема доведена. □

Означення 2. *Нехай ΔNKM – довільний трикутник.* **Роторним центром** *трикутника ΔNKM назвемо точку O, яка визначається так.*

Нехай NK – найдовша сторона трикутника. На цій стороні будуємо рівносторонній трикутник ΔQNK з протилежного від точки M боку, і описуємо навколо нього коло. Перетин півпрямої QM, яка виходить з точки Q і проходить через точку M, з цим колом і буде роторним центром трикутника O ΔMNK.

Якщо $\angle NMK \le 2\pi/3$, то роторний центр O належить трикутнику і $\angle NOM = \angle MOK = \angle KON = 2\pi/3$. Якщо ж $\angle NMK > 2\pi/3$, то роторний центр O лежить між точками Q і M і є за межами трикутника (лема 1.2). Позначимо: $|ON| = a$, $|OK| = b$ та $|OM| = c$. *Число $a + b + c$ в першому випадку і число $a + b - c$ в другому випадку назвемо* **роторним числом** *трикутника.*

Зафіксуємо деяке положення трикутника $S' = S_\varphi$, $Q' = Q_\varphi$, $T' = T_\varphi$, який обертається навколо R-ротора U. Нехай M, N і K — точки дотику ротора U до сторін трикутника.

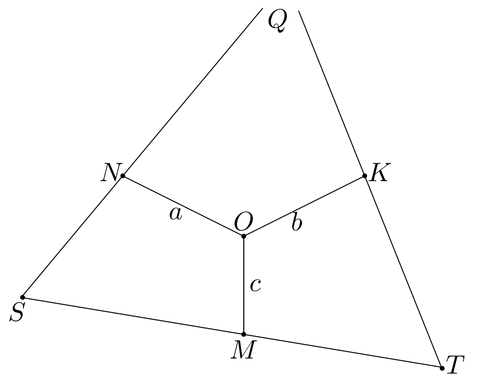

Рис. 1:

Означення 3. *Трикутник* $\Delta MNK = \Delta M_\varphi N_\varphi K_\varphi$ *назвемо* **дотичним трикутником**.

Нехай O – роторний центр трикутника ΔNKM і $|ON| = a$, $|OK| = b$ та $|OM| = c$. Оскільки U є R-ротором, то навколо дотичного трикутника ΔMNK можна описати рівносторонній трикутник зі стороною, не більшою R з будь-яким поворотом у площині. Нехай ΔSTQ — один з таких трикутників. Припустимо, що роторний центр O лежить всередині трикутника.

Нехай (див. рис. 1) кут між відрізком MO і його стороною ST рівний φ: $\angle SMO = \varphi$. Знайдемо довжину його сторони ST.

Нехай вісь ординат йде у напрямку вектора $\overrightarrow{MO}$. Позначимо через x і y довжини відрізків SM та SN відповідно. Тоді $\overrightarrow{MS} = (-x\sin\varphi, x\cos\varphi)$, $\overrightarrow{MO} = (0, a)$, $\overrightarrow{SN} = (y\cos(\varphi - \pi/6), y\sin(\varphi - \pi/6))$, $\overrightarrow{ON} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{1}{2}b)$.

Оскільки $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SN}$, то отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x\sin\varphi + y\cos(\varphi - \pi/6) = & -\frac{\sqrt{3}}{2}b \\ x\cos\varphi + y\sin(\varphi - \pi/6) = & a + \frac{1}{2}b \end{cases} \quad (1)$$

Отримуємо $x = |SM| = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\cos(\varphi - \pi/6) + b\sin\varphi)$. Аналогічним способом отримуємо, що $|MT| = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\cos(\pi - \varphi - \pi/6) + b\sin(\pi - \varphi))$.

Разом маємо $|SM| + |MT| = \frac{2}{\sqrt{3}}(a\cos(\varphi - \pi/6) + b\sin(\varphi) - a\cos(\varphi + \pi/6 + c\sin\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3}}(a + b + c)\sin\varphi$.

Очевидно, що сторона R описаного трикутника максимальна, якщо $\varphi = \pi/2$ і тоді $R = \frac{2}{\sqrt{3}}(a + b + c)$.

Випадок, коли роторний центр лежить за межами трикутника, повторює це доведення дослівно і дає нам $R = \frac{2}{\sqrt{3}}(a + b - c)$.

Таким чином, ми довели таку лему.

Лема 1.3. *Нехай M, N і K – точки дотику R-ротора U з трикутником ΔSTQ, в якому він обертається. Проведемо з цих точок перпендикуляри до сторін трикутника. Вони перетинаються в одній точці O, яка є роторним центром ΔSTQ, а роторне число цього трикутника рівне $R' = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.*

На кожне положення φ трикутника $S_\varphi T_\varphi Q_\varphi$ маємо свій дотичний трикутник $\Delta K_\varphi M_\varphi N_\varphi$. Очевидно, що R-ротор є об'єднанням дотичних трикутників з роторним числом R', $R = \frac{2}{\sqrt{3}}R'$, і не містить жодного трикутника з роторним числом s, де $s > R'$.

Поворот на кут α з двома нерухомими точками

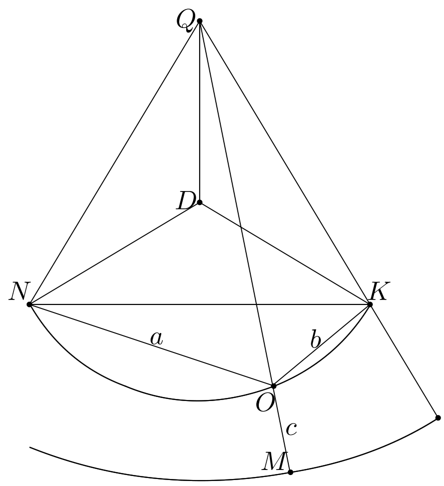

Рис. 2:

Лему можна перефразувати ще й так:

Лема 1.4. *Нехай маємо рівносторонній трикутник ΔNKQ зі стороною p. Опишемо навколо нього коло радіуса $\frac{p}{\sqrt{3}}$ з центром D. На цій дузі $\smile NK$ цього кола виберемо довільну точку O. З вершини Q проведемо коло радіуса R', де $R' \geq p$. Нехай M – точка* *перетину кола радіуса R' і півпрямої QO. Тоді трикутник ΔNKM є трикутником з роторним числом R'.*

Простим наслідком цієї леми є наступні дві леми.

Лема 1.5. *Нехай маємо два трикутники ΔNKM і $\Delta NKM'$ з роторним числом R' і з двома спільними вершинами (треті вершини розташовані по один бік від сторони NK). Нехай $|NK| = p$. Побудуємо рівносторонній трикутник ΔNKQ по іншу сторону від точок M і M' і опишемо навколо нього коло. Нехай D — центр цього трикутника.*

Тоді роторні центри трикутників O та O' можна з'єднати дугою $\smile OO'$ кола радіуса $\frac{p}{\sqrt{3}}$ з центром в точці D. Кожна точка O^* дуги $\smile OO'$ є роторним центром трикутника з роторним числом R' і з двома спільними вершинами N і K. Треті вершини M^* цих трикутників дугою кола радіуса R' з'єднують точки M і M'.

Лема 1.6. *Нехай R-ротор U містить два дотичні трикутники ΔNKM і $\Delta NKM'$ з двома спільними вершинами N і K. Тоді межа ротора U між точками M і M' є дугою кола радіуса R'.*

Лема 1.7. *Нехай ΔMNK — дотичний трикутник R-ротора U і O — роторний центр цього трикутника. На стороні NK побудуємо рівносторонній трикутник ΔNQK по інший бік від точки O (якщо роторний центр не належить трикутнику, то нехай NK — найдовша сторона). Тоді жодна точка ротора не лежить зовні сектора кола радіуса R' з центром в точці Q, який обмежений кутом $\angle NQK$.*

Доведення. Припустимо, що існує точка B, така що $|BQ| = s > R'$. З'єднаємо точки B та Q і нехай P — точка перетину цього відрізка з дугою кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ΔNKQ. Трикутник $PBNK$ матиме роторне число s і він теж належить ротору U. Але це неможливо, оскільки $s > R'$. □

Два трикутники

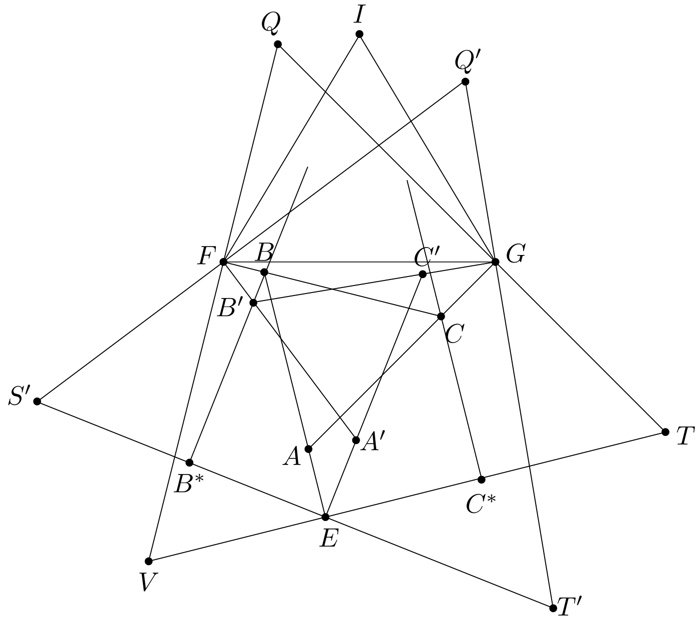

Рис. 3:

Нехай маємо R-ротор U і два трикутники ΔSTQ та $\Delta S'T'Q'$ навколо нього, сторони яких утворюють кут α, $\alpha < \pi/6$ (див. рис. 3). Через E, F та G позначимо точки перетину сторін трикутників: $\{E\} = ST \cap S'T'$, $\{F\} = SQ \cap S'Q'$, $\{G\} = TQ \cap T'Q'$.

З точок E, F, G проведемо прямі, перпендикулярні до сторін трикутника ΔSTQ. Перетинаючись, вони утворюють рівносторонній трикутник ΔABC. Перпендикуляри до сторін трикутника $\Delta S'T'Q'$ утворять рівносторонній трикутник $\Delta A'B'C'$. Легко бачити, що роторний центр O дотичного трикутника, породженого ΔSTQ, міститься в ΔABC, а центр O' дотичного трикутника, породженого $\Delta S'T'Q'$, міститься в $\Delta A'B'C'$.

Проведемо перпендикуляр CC^* з точки C до відрізка ST і перпендикуляр $B'B^*$ з точки B' до відрізка $S'T'$. Отримаємо два дотичні трикутники ΔGFC^* та ΔGFB^* з двома спільними вершинами. Кут між продовженнями відрізків CC^* та $B'B^*$ рівний α.

На стороні FG побудуємо рівносторонній трикутник ΔFGI. Тоді $B^*B' \subset B^*I$, $C^*C \subset C^*I$, $\angle B'IC = \alpha$.

Легко бачити, що $|B^*E| = R' \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r'$ є висота $\Delta A'B'C'$, а сторона

r цього трикутника рівна $r = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Трикутник ABC має таку ж довжину сторін.

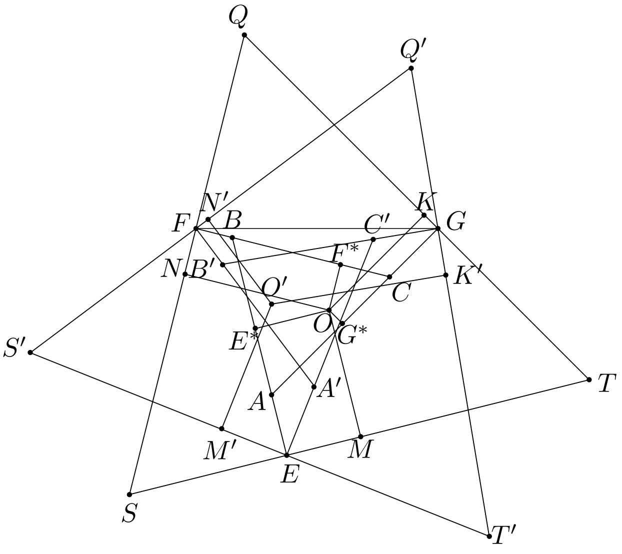

Рис. 4:

Розглянемо рис. 4. Нехай ΔMNK — довільний дотичний трикутник, породжений ΔSTQ. Його центр O, як було сказано , лежить у ΔABC. Спроектуємо його на сторони цього трикутника AB, BC і CA і позначимо через E^*, F^* та G^* відповідні проекції. Тоді $\Delta E^*F^*G^*$ є дотичним трикутником для ΔABC і $|OE^*| + |OF^*| + |OG^*| = r'$. А це означає, що

$$|EM| + |FN| + |GK| = r' = R'\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Якщо $\Delta M'N'K'$ — дотичний трикутник для $\Delta S'T'Q'$, то аналогічно

$$|EM'| + |FN'| + |GK'| = r' = R'\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

α-пара

Тепер розглянемо ситуацію біля однієї фіксованої точки перетину сторін трикутників ΔSTU та $\Delta S'T'U'$, наприклад, біля точки E. Присвоїмо цій точці індекс 1, точці F — індекс 2, а точці G — 3. Всі позначення, які появлятимуться з індексом 1, можуть бути проведені для точок F та G і мати індекси 2 та 3.

Продовжимо відрізки MO та $M'O'$ по іншу сторону від точок O (O') до відрізків довжини R' ML та $M'L'$ відповідно. Дані відрізки обов'язково перетнуться в деякій точці J.

Означення 4. *Пара відрізків ML та $M'L'$ довжини R', які перетинаються під кутом α, утворює α-пару, якщо всі чотири круги радіуса R' з центрами у кінцях цих відрізків, містять ці відрізки.*

Позначимо $|MJ| = e_1$, $|M'J| = f_1$, $|ME| = m_1$, $|M'E| = n_1$.

Ми довели, що $m_1 + m_2 + m_3 = n_1 + n_2 + n_3 = r' = R'\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Неважко переконатися також, що

$$\begin{array}{ll} e_i = \frac{m_i \cos\alpha + n_i}{\sin\alpha} & f_i = \frac{m_i + n_i \cos\alpha}{\sin\alpha} \\ m_i = \frac{f_i - e_i \cos\alpha}{\sin\alpha} & n_i = \frac{e_i - f_i \cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array} \qquad (2)$$

і тому

$$e_1 + e_2 + e_3 = f_1 + f_2 + f_3 = R' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,R \quad (3)$$

Якщо позначити $e_i' = R' - e_i$, $'f_i = R' - f_i$, $i = 1, 2, 3$, то

$$e_1' + e_2' + e_3' = f_1' + f_2' + f_3' = 2R' = \sqrt{3}\,R. \quad (4)$$

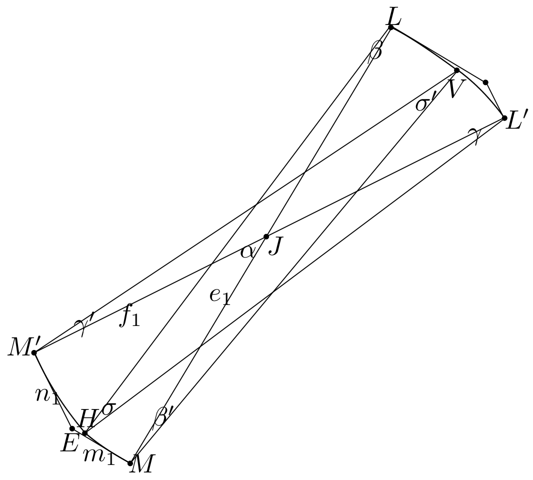

Рис. 5:

З точок L та L' проведемо кола радіуса R' і нехай H — точка їх перетину, яка розташована у куті MJM' (див. лему 1.7). Взагалі кажучи, точка H може збігатися з M чи M'.

Аналогічно, з точок M та M' проведемо кола радіуса R' і нехай V — точка їх перетину, розташована у куті LJL'.

З'єднаємо точку V з точками M та M', а точку H — з точками L та L' відрізками довжини R' і позначимо кути

$$\begin{aligned} \angle VM'L' = \gamma_1', \quad \angle M'L'H = \gamma_1, \\ \angle LMH' = \beta_1', \quad \angle MLH = \beta_1, \\ \angle M'VM = \sigma_1', \quad \angle LHL' = \sigma_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Легко бачити, що

$$\alpha = \gamma_1 + \beta_1 + \sigma_1 = \gamma_1' + \beta_1' + \sigma_1'. \tag{6}$$

Неважко показати, що при фіксованому e число f може змінюватися в межах від $R' - e\cos\alpha - \sqrt{(R')^2 - e^2 \sin^2\alpha}$ до $\sqrt{(R')^2 - (R'-e)\sin^2\alpha} - (R'-e)\cos\alpha$. Якщо f є максимально можливе, то $\gamma = \beta' = 0$, якщо f — мінімально можливе, то $\beta = \gamma' = 0$.

Довжини введених кутів природно можуть вимірюватися довжинами відповідних дуг кіл радіуса R': куту γ відповідає дуга $\smile M'H$, куту γ' — дуга $\smile L'V$, куту β — дуга $\smile MH$, а куту β' — дуга $\smile LH'$.

При фіксованому R' і α кут γ є функцією від пари чисел e f, тобто $\gamma = \varphi(e,f)$. Тоді $\beta = \varphi(f,e)$, $\gamma' = \varphi(e',f')$ і $\beta' = \varphi(f',e')$.

Легко бачити, що якщо $f < f'$, то $\varphi(e,f) > \varphi(e,f')$ і якщо $e < e'$, то $\varphi(e,f), \varphi(e',f)$.

Лема 1.8. *В попередніх позначеннях на дузі $\smile M'H$ виберемо точку M'', таку що $\angle M'L'M'' = \Delta\alpha$. Тоді відрізки ML і $M''L'$ утворюють $(\alpha - \Delta\alpha)$-пару.*

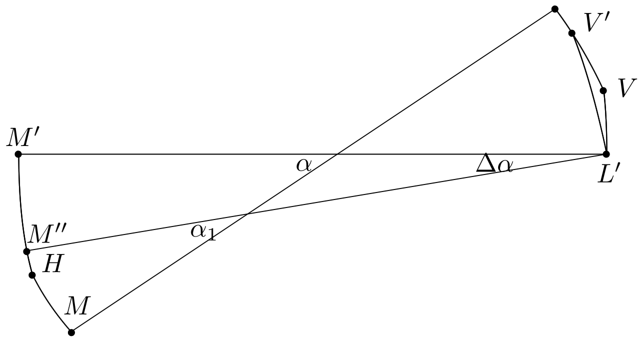

Рис. 6:

Доведення. Оскільки дуга $\smile HM'$ міститься в крузі радіуса R' з центром в точці L, то $|M''L| < R'$ і тому точка L міститься в крузі радіуса R' з центром в точці M''. □

Пари відрізків

Підсумуємо одержане. Нехай навколо фіксованого R-ротора U описано два трикутники, сторони яких утворюють між собою кут α. Біля кожної точки перетину сторін маємо таку картину (див. рис. 5). Два відрізки M_iL_i та $M_i'L_i'$ довжини R' перпендикулярні до сторін трикутників, перетинаються в точці J_i і утворюють α-пару. Довжини відрізків $|M_iJ_i| = e_i$ та $|M_i'J_i| = f_i$ задовольняють рівняння 5. Якщо f_i є максимально можливе, то $\gamma_i = \beta_i' = 0$, якщо f_i — мінімально можливе, то $\beta_i = \gamma_i' = 0$.

Позначимо $h_i = f_i - e_i$, $i = 1,2,3$. Маємо $h_1 + h_2 + h_3 = (f_1 - e_1) + (f_2 - e_2) + (f_3 - e_3) = 0$. Тому, якщо не всі числа h_i рівні нулю, то принаймні одне з них додатне і принаймні одне — від'ємне.

З точністю до позначень завжди має місце така ситуація: $e_1 \le e_2$, $e_1 \le f_1$, $e_2 \le f_2$, $f_3 \le e_3$.

Лема 1.9. *(Про дві пари).*

Нехай $e_1 < f_1$, $e_2 < f_2$, $e_1 < e_2$. Якщо $\gamma_1 > \gamma_2$, то $\beta_1' > \beta_2'$.

Тобто, якщо $\varphi(e_1,f_1) > \varphi(e_2,f_2)$, то $\varphi(R'-f_1, R'-e_1) > \varphi(R'-f_2, R'-e_2)$.

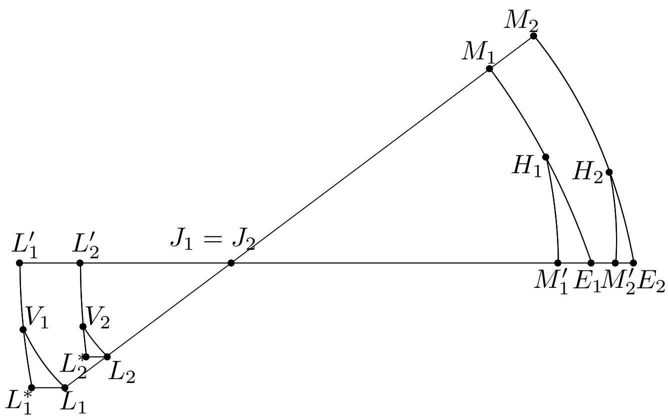

Рис. 7:

Доведення. Сумістимо дві пари відрізків так, щоб точки J_1 і J_2 збігалися, відрізки

L_1M_1 і L_2M_2 ($L_1'M_1'$ і $L_2'M_2'$) лежали на одній прямій і точки M_1 і M_2 (M_1' і M_2') розташувалися на цій прямій по один бік від точки J_1. З точок L_i проведемо прямі, паралельні до прямої $L_1'M_1'$, і нехай L_i^* — точки перетину цих прямих з колами радіуса R' з центрами в точках M_i'.

Маємо $|M_2'L_2'| = |M_2'L_2^*| = R'$ і $|M_2L_2| = |E_2L_2| = R'$. Тому $M_2'E_2L_2L_2^*$ є паралелограм і $|M_2'E_2| = |L_2L_2^*|$. Аналогічно $|M_1'E_1| = |L_1L_1^*|$.

Розглянемо криволінійні трикутники $H_1M_1'E_1$ і $H_2M_2'E_2$. Кут між відрізком $M_1'E_1$ і дугою $\smile H_1E_1$ є менший, ніж кут між відрізком $M_2'E_2$ і дугою $\smile H_2E_2$. Тому $|M_1'E_1| > |M_2'E_2|$. Значить, і $|L_1'L_1^*| > |L_2'L_2^*|$.

Тепер порівняємо криволінійні трикутники $V_1L_1^*L_1$ і $V_2L_2^*L_2$. Кут між відрізком $L_2^*L_2$ і дугою $\smile V_2L_2^*$ є менший, ніж кут між відрізком $L_1^*L_1$ і дугою $\smile V_1L_1^*$. Тому дуга $\smile V_1L_1$ довша, ніж дуга $\smile V_2L_2$, тобто $\beta_1' > \beta_2'$. □

Лема 1.10. *Завжди виконується принаймні одне з тверджень:*

$(*)$ *існує таке* i, *що* $\gamma_i \le \gamma_j'$ *при* $j \ne i$,

$(*)$ *існує таке* i, *що* $\beta_i \le \beta_j'$ *при* $j \ne i$.

Доведення. Нехай $f_1 > e_1$, $e_2 \ge f_2$ і $e_3 \ge f_3$. Якщо $\gamma_1 \le \gamma_2'$ і $\gamma_1 \le \gamma_3'$, то лема доведена. Якщо це не так, то, наприклад, $\gamma_1 > \gamma_2'$, тобто $\varphi(e_1, f_1) > \varphi(e_2', f_2') = \varphi(e_1 + e_3, f_1 + f_3)$. Тоді за лемою 1.9 маємо $\varphi(R' - f_1, R' - e_1) > \varphi(R' - f_1 - f_3, R' - e_1 - e_3)$, тобто $\varphi(f_2 + f_3, e_2 + e_3) > \varphi(f_2, e_2)$. Значить $\beta_1' > \beta_2$. Оскільки $e_2 \ge f_2$, а $f_1 + f_2 \ge e_1 + e_2$, то $\varphi(f_2, e_2) < \varphi(f_1 + f_2, e_1 + e_2)$, тобто $\beta_2 \le \beta_3'$. □

Лема 1.11. *Нехай пара* e_1, f_1, $e_1 < f_1$, *така, що* f_1 *— максимально можливе відносно* e_1. *Тоді* $\beta_2' > \beta_1$ *і* $\beta_3' > \beta_1$.

Доведення. Проведемо дві прямі l_1 і l_2, які перетинаються під кутом α в точці O. На прямій l_1 вибираємо точки A, C і E так, що $|OA| = e_1$, $|AC| = e_2$, $|OE| = e_3$. Нехай $|OB| = f_1$ і $\angle AOB = \alpha$. Через точку C проведемо дугу кола радіуса R' з центром в

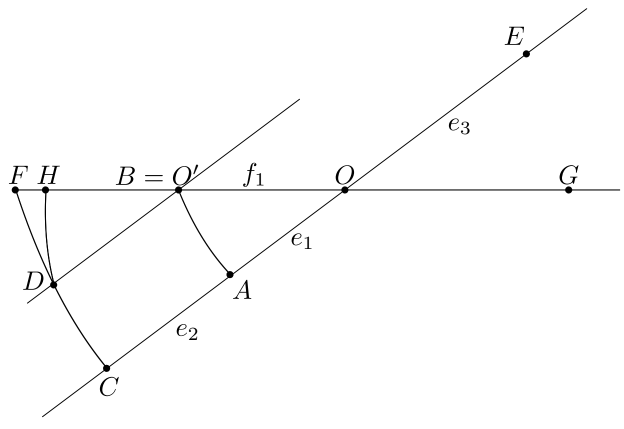

Рис. 8:

точці E. Ця дуга перетинає пряму l_2 в точці F і $|OF| - f_1$ — максимально можливе значення f_2 у цій ситуації.

Через точку $B = O'$ проведемо пряму $O'D$, паралельну прямій l_1 (D — точка перетину цієї прямої і вказаного кола). Нехай $G \in l_2$ — точка по іншу сторону від O' (відносно F), така що $|GD| = R'$. Проведемо коло радіуса R' з центром у точці G і нехай H — точка перетину цього кола з l_2: $|GH| = R'$. Тоді $|O'H| = R'$ — мінімальне значення f_2 у цій ситуації. Отже, f_2 може змінюватися "від H до F". Всі кола радіуса R', що проходять через точку відрізка HF, перетинають дугу $\smile CF$ тільки у точках дуги $\smile FD$, а тому $\beta_3' \ge \beta_1$. □

Основна конструкція

Теорема 2. *Довільний* R*-ротор* U *можна як завгодно близько наблизити ротором* U', *межа якого є об'єднанням кіл радіуса* $R' = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

Доведення. Залишаємося в позначеннях попереднього пункту. Для довільного α довільно вибираємо два описані навколо R-ротора U трикутники, кожен з яких породжує свій дотичний трикутник. Вершини дотичних трикутників з'єднуємо з роторним центром і продовжуємо до відрізків довжини R'. Отримаємо три α-пари відрізків M_iL_i та $M_i'L_i'$. Покажемо, що частина межі ротора між точками M_i та M_i' може бути замінена дугами кіл радіуса R' так, що новоутворене тіло U' теж буде R-ротором.

Випадок 1. Нехай дотичні трикутники мають одну спільну вершину, наприклад, нехай $M_1 = M'_1$. Тоді $e_1 = f_1 = 0$.

Нехай γ_2, наприклад, найменший з кутів γ_i, β_i, $i = 1, 2$. Оскільки $e'_2 = e_3$, $f'_2 = f_3$, $e'_3 = e_2$ і $f'_3 = f_2$, то $\gamma_3 = \gamma'_2$, $\gamma'_3 = \gamma_2$, $\beta_3 = \beta'_2$ і $\beta'_3 = \beta_2$. Легко бачити також, що $\beta_2 \le \gamma'_2 = \gamma_3$.

Здійснимо поворот на кут γ_2 з нерухомими точками $M'_1 = M_1$ і M'_3 так, що точка M'_2 перейде в точку H_2. Дуга $\smile M'_2H_2$ буде частиною межі шуканого ротора U'. При цьому повороті дотичний трикутник $\Delta M'_1M'_2M'_3$ перейде у дотичний трикутник $\Delta M'_1H_2M'_3$, який породить відрізки $M'_1L'^*_1$, M'_3V_3 і $H_2L'_2$ довжини R'. Тоді відрізки M_1L_1 і $M'_1L'^*_1$, M_2L_2 і $H_2L'_2$ та M_3L_3 і $M'_3N'_3$ утворюють $(\alpha-\gamma_2)$-пари (див. лему 1.8). Збережемо старі позначення для кутів, додаючи до них "зірочку".

Для пари M_2L_2 і $H_2L'_2$ будемо мати, що $\gamma^*_2 = \gamma'^*_3 = \beta'^*_2 = \beta^*_3 = 0$, $\beta^*_2 = \beta'^*_3 = \beta_2$ і $\gamma'^*_2 = \gamma^*_3 = \gamma_2$.

Здійснимо поворот на кут β_2 з нерухомими точками M_1 і M_3 так, що точка M_2 перейде в точку H_2. Дуга $\smile M_2H_2$ буде частиною межі шуканого ротора U'. При цьому повороті дотичний трикутник $\Delta M_1M_2M_3$ перейде у дотичний трикутник $\Delta M_1H_2M_3$. Але дані дотичні трикутники мають вже дві спільні точки M_1 та H_2 і нам залишається тільки з'єднати їх вершини M_3 та M'_3 дугою кола, проведеного з точки V_3.

Тепер, заміняючи частину межі ротора U між точками M_2 і M'_2 на дуги $\smile M_2H_2$ і $\smile M'_2H_2$, а між точками M_3 і M'_3 — на дугу $\smile M_3M'_3$, ми отримаємо новий ротор U'.

Випадок 2. Всі вершини дотичних трикутників різні. Ми зведемо цей випадок до першого. За лемою 1.10, з точністю до позначень, маємо $\gamma_1 \le \gamma'_2$ і $\gamma_1 \le \gamma'_3$.

Здійснимо поворот на кут $\gamma_1 \le \alpha$ з нерухомими точками M'_2 і M'_3 так, що точка M'_1 перейде в точку H_1. Дуга $\smile M'_1H_1$ буде частиною межі шуканого ротора U'. При цьому повороті дотичний трикутник $\Delta M'_1M'_2M'_3$ перейде у дотичний трикутник $\Delta H_1M'_2M'_3$. Він породжує відрізки $H_1L'_1$, $M'_2L'^*_2$, $M'_3L'^*_3$ довжини R'. Тоді пари відрізків M_1L_1 і M'_1H_1, M_2L_2 і $M'_2L'^*_2$ та M_3L_3 і $M'_3L'^*_3$ утворюють $(\alpha-\gamma_1)$-пари. Збережемо старі позначення для кутів, додаючи до них "зірочку".

За лемою 1.11, маємо, що $\beta^*_1 = \beta_1 < \beta'^*_2$ і $\beta_1 < \beta'^*_3$. Тому здійснимо поворот на кут β_1 з нерухомими точками M_2 і M_3 так, що точка M_1 перейде в точку H_1. Дуга $\smile M_1H_1$ буде частиною межі шуканого ротора U'. При цьому повороті дотичний трикутник $\Delta M_1M_2M_3$ перейде у дотичний трикутник $\Delta H_1M_2M_3$. Дотичні трикутники $\Delta H_1M'_2M'_3$ та $\Delta H_1M_2M_3$ мають одну спільну вершину H_1 і підпадають під випадок 1. $\square$

Висновки

Побудови попередніх розділів можна вважати аналогами при $n = 3$ результатів статті [5], де розглядаються апроксимації тіл сталої ширини (=роторів квадрата) многокутниками Рело.

Таким чином, для роторів у правильному трикутнику можна встановити результат, що є аналогом для гіперпростору поліедральних опуклих тіл. Залишається відкритим питання про перенесення теореми 1 на випадок роторів правильних n-кутників при $n \ge 5$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *L. Bazylevych, On the hyperspace of rotors in convex polygons*, Матем. студії. 2006. Т. 26, N 1. С. 49-54.

2. *S.B. Nadler, Jr., J. Quinn, N.M. Stavrokas, Hyperspace of compact convex sets*, Pacif. J. Math. **83**(1979), 441–462.

3. *C. Bessaga, A. Pełczyński*, Selected topics in infinite-dimensional topology.- Monografie Matematyczne, Tom 58. PWN, Warsaw, 1975. 353 pp.

4. *T. Dobrowolski, The compact Z-set property in convex sets*, Topol. Appl. **23**(1986), 163–172.

5. *Y. Kupitz, H. Martini, B. Wegner, A linear-time construction of Reuleaux polygons*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, **37** (1996), no 2, 415–427.