УДК 519.21+62

©2007 р. Я.М. Чабанюк

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ У МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто асимптотичну нормальність стрибкової процедури стохастичної апроксимації в умовах збіжності процедури. Використано розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора двокомпонентного марковського процесу з новою тест-функцією.

In this paper we consider the asymptotic normality of the stochastic approximation procedure in the conditions averaging the procedure. We utilized by a solution of the singular perturbation problem for the generator of a two-component Markov process with a new test-function.

Вступ. В нашій роботі [1] встановлено асимптотичну нормальність неперервної процедури стохастичної апроксимації (ПСА) в марковському середовищі в схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$. На відміну від [2,3], в згаданій статті для вирішення проблеми асимптотичності використовується розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора розширеного процесу марковського відновлення неперервної ПСА в умовах збіжності процедури.

В даній роботі асимптотична нормальність стрибкової ПСА досліджується аналогічним методом. Особливість даної задачі полягає в тому, що приріст нормованої стрибкової ПСА має дві компоненти: неперервну і стрибкову, в той час, як неперервна ПСА має тільки неперервну компоненту.

1. Постановка задачі. Стрибкова ПСА в схемі серій в марковському середовищі задається співвідношенням [4] (покладемо $\sum\limits_{k=0}^{-1} a(\tau_k^\varepsilon)C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} a(\tau_k^\varepsilon)C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), t \geq 0. \tag{1}$$

Тут $x_n := x(\tau_n), n \geq 0$, є вкладеним ланцюгом Маркова у рівномірно ергодичний марковський процес $x(t), t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$, що задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

а τ_n - моменти відновлення вкладеного ланцюга Маркова.

Генератор Q є зведено-оборотним з потенціалом R_0 таким, що

$$R_0 Q = Q R_0 = \Pi - \mathrm{I}.$$

Процес марковського відновлення $x_n, \tau_n, n \geq 0$, задається стохастичним ядром

$$P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B \,|x_n = x\}, x \in X,$$
$$B \in \boldsymbol{X},$$

а моменти відновлення задаються співвідношенням

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, n \geq 0,$$

в якому час θ_{n+1} перебування в станах x_n задається функцією розподілу

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t \,|x_n = x\} = 1 - e^{-q(x)t},$$
$$x \in X, t \geq 0,$$

тобто випадкові величини $\theta_x, x \in X$, мають показникові розподіли з інтенсивностями $q(x)$:

$$P\{\theta_x \geq t\} = e^{-q(x)t}, t \geq 0, x \in X.$$

Для моментів τ_n розглянемо лічильний процес

$$\nu(t) := \max\{n > 0 : \tau_n \leq t\}, t \geq 0,$$

а також стрибковий процес відновлення

$$\tau(t) := \tau_{\nu(t)}, t \geq 0.$$

Стаціонарний розподіл $\rho(B), B \in X$, вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, задається рівнянням

$$\rho(B) = \int\limits_X \rho(dx)P(x,B), \rho(X) = 1,$$

і зв'язаний з стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$, марковського процесу $x(t), t \geq 0$, співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int\limits_X \pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx) = \rho(dx)g(x)\frac{1}{m}, m = \int\limits_X \rho(dx)g(x) = \frac{1}{q},$$

з

$$g(x) = \frac{1}{q(x)}.$$

Стаціонарні розподіли $\pi(B)$ та $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\tilde{\Pi}$ відповідно:

$$\Pi\varphi(x) := \hat{\varphi}1(x), \hat{\varphi} := \int\limits_X \pi(dx)\varphi(x), 1(x) \equiv 1,$$

$$x \in X,$$

$$\tilde{\Pi}\varphi(x) := \tilde{\varphi}1(x), \tilde{\varphi} := \int\limits_X \rho(dx)\varphi(x), 1(x) \equiv 1,$$

$$x \in X.$$

В ПСА (1) мають місце вкладеності

$$u_n^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^2\tau_n,$$

$$a(\tau_n^\varepsilon) = \frac{a}{\tau_n^\varepsilon}, a > 0, n \geq 0.$$

Функція регресії $C(u,x)$, $u \in R$, $x \in X$, така, що $C(u,\cdot) \in C^3(R)$, тому має місце розклад

$$C(u,x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2C_2(u,x), \quad (2)$$

$$C^0(x) = C(0,x), C^1(x) = C_u^1(0,x), \quad (3)$$

$$C_2(u,x) = \frac{1}{2}C_u''(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Збіжність стрибкової ПСА (1) в умовах Теореми роботи [4]

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow 0, t \to \infty, \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (4)$$

означає, що має місце рівність

$$C(0) = 0 \quad (5)$$

і точка $u = 0$ є точкою рівноваги системи

$$du(t)/dt = C(u(t)), \quad (6)$$

де

$$C(u) = q\int\limits_X \rho(dx)C(u,x). \quad (7)$$

З (3), (5) і (7) маємо умову балансу

УБ: $\tilde{\Pi}C^0(x) = 0$.

З іншої сторони (4) означає, що флуктуації стрибкової ПСА доцільно вивчати з наступним нормуванням, як і в роботі [1], а саме

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}u^\varepsilon(t)/\varepsilon, \quad (8)$$

тобто має місце зворотній зв'язок

$$u^\varepsilon(t)=\varepsilon v^\varepsilon(t)/\sqrt{t}.$$

2. **Основний результат.** Асимптотична нормальність нормованої ПСА (8) встановлюється при умовах збіжності ПСА (1)

$C1: C(u)V'(u)\leq -c_0V(u),$

$C2: |\tilde{C}(u,x)V'(u)|\leq c_1(1+V(u)),$

$C3\ :\ |C(u,x)R_0[\tilde{C}(u,x)V'(u)]'|\ \leq\ c_2(1+V(u)),$

де $\tilde{C}(u,x):=C\ (u,x)$- $C(u)$, а $V(u)$ - функція Ляпунова усередненої системи (11), а також при додаткових умовах:

$$D1:\rho^2:=2\int\limits_X\pi(dx)\tilde{C}^0(x)R_0\tilde{C}^0(x)-$$

$$-2q\int\limits_X\rho(dx)(C^0(x))^2>0,$$

де

$$\tilde{C}^0(x):=q(x)C^0(x); \tag{9}$$

$D2: d_1<-1/2aq,$

де $d_1=\int\limits_X\rho(dx)C^1(x).$

Теорема (Асимптотична нормальність). В умовах $C1-C3$ збіжності стрибкової ПСА (1), та при додаткових умовах $D1,D2$ має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t)\Rightarrow\zeta(t),\varepsilon\to 0,$$

в кожному скінченому інтервалі $0<t_0\leq t\leq T$.

Граничний дифузійний процес $\zeta(t),t\geq 0$, є процесом типу Орнштейна- Уленбека [5], і визначається генератором

$$\boldsymbol{L}\varphi(v)=bv\varphi'(v)+\frac{1}{2}a^2\rho^2\varphi''(v), \tag{10}$$

де

$$b:=aqd_1+\frac{1}{2}.$$

Зауваження 1. Умова D2 забезпечує виконання умови $b<0$ звідки слідує стійкість граничного процесу $\zeta(t),t\geq 0$, а умова D1 забезпечує дифузійність процессу $\zeta(t),t\geq 0$.

Зауваження 2. Граничний процес Орнштейна - Уленбека [5] з генератором $\boldsymbol{L}$ в умовах теореми є ергодичним з стаціонарним нормальним розподілом $N(0,\sigma_0^2)$, де дисперсія обчислюється за формулою $\sigma_0^2=a^2\rho^2/2b$.

Висновок 1. В умовах теореми ПСА $v^\varepsilon(t)$ має асимптотично нормальний розподіл $N(0,\sigma_0^2)$, тобто $v^\varepsilon(t)\Rightarrow v$,$\varepsilon\to 0$, $t\to\infty$, де випадкова величина v має розподіл $N(0,\sigma_0^2)$.

3. Властивості нормованої ПСА. Основна проблема полягає в тому, щоб побудувати породжуючий оператор (генератор) двокомпонентного марковського процесу

$$v^\varepsilon(t),x_t^\varepsilon:=x(t/\varepsilon^2),t\geq 0. \tag{11}$$

Лема 1. Генератор марковського процесу (11) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot)\in C^2(R)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,x)=\varepsilon^{-2}q(x)\boldsymbol{P}[\varphi(v+\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x),y)-$$

$$-\varphi(v,x)]+\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,x), \tag{12}$$

де

$$\boldsymbol{P}\varphi(\cdot,y)=\int\limits_X P(y,dz)\varphi(\cdot,z).$$

Доведення. Спочатку обчислимо приріст $\Delta v^\varepsilon(t)$ нормованої ПСА (8) за малий проміжок часу $\Delta>0$ при умовах

$$v^\varepsilon(t)=v,x_t^\varepsilon=x.$$

Таким чином враховуючи (8) та розклад $\sqrt{t+\Delta}=\sqrt{t}(\Delta/2t+o(\Delta))$, маємо

$$\Delta v^\varepsilon(t):=v^\varepsilon(t+\Delta)-v^\varepsilon(t)=\frac{\Delta}{2t}v+$$

$$+\varepsilon^{-1}(t+\frac{\Delta}{2\sqrt{t}})\Delta u^{\varepsilon}(t)+o(\Delta).$$

Оскільки приріст $\Delta u^{\varepsilon}(t)$ ПСА (1) при наявності стрибка має вигляд

$$\Delta u^{\varepsilon}(t):=u^{\varepsilon}(t+\Delta)-u^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2\frac{a}{t}C(u^{\varepsilon}(t),x_t^{\varepsilon}),$$

то для умовного математичного сподівання

$$E[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta),x^{\varepsilon}_{t+\Delta})\,|v^{\varepsilon}(t)=v,x^{\varepsilon}_t=x,$$

$$\tau^{\varepsilon}(t)=t]=E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v^{\varepsilon}(t),x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$=E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v^{\varepsilon}(t),x^{\varepsilon}_{t+\Delta})][I(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta)+$$

$$+I(\theta_x\le\varepsilon^{-2}\Delta)]$$

з урахуванням того, що $I(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta)=1-\varepsilon^{-2}\Delta q(x))+o(\Delta)$ і $I(\theta_x\le\varepsilon^{-2}\Delta)=\varepsilon^{-2}\Delta q(x)+o(\Delta)$, маємо

$$E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v^{\varepsilon}(t),x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=\varphi(v,x)-$$

$$-\varepsilon^{-2}\Delta q(x)\varphi(v,x)+$$

$$+E_{v,x}[\varphi(v+\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x),x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]\varepsilon^{-2}\Delta q(x)+$$

$$+\Delta\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,x)+o(\Delta)].$$

З означення генератора [6] марковського процесу (11) отримуємо

$$\lim_{\Delta\to0}\Delta^{-1}E_{v,x}[\varphi(v+\Delta v^{\varepsilon}(t),x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(v,x)]=$$

$$=\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t\varphi(v,x),$$

де $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t$ має представлення (12).

Наслідок 1. Генератор марковського процесу (11) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot)\in C^2(R)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t\varphi(v,x)=\varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x)+\varepsilon^{-2}q(x)\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0\varphi(v,x),\tag{13}$$

де

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0\varphi(v,x)=\boldsymbol{P}[\varphi(v+\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x),y)-$$

$$-\varphi(v,y)]+\varepsilon^2g(x)\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,x).\tag{14}$$

Доведення. Представлення (13) отримуємо з (12) використовуючи доданок $\pm\varphi(v,y)$ в квадратних дужках.

Лема 2. Генератор (13) на тест-функціях $\varphi(v,\cdot)\in C^3(R)$ має асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_t\varphi(v,x)=\varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_1(x)Q_0\varphi(v,x)+$$

$$+\frac{1}{t}Q_2(x)\varphi(v,x)+\theta^{\varepsilon}_L\varphi(v,x),\tag{15}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v)=aC^0(x)\varphi'(v),\tag{16}$$

$$Q_0:=q(x)\boldsymbol{P},$$

$$Q_2(x)\varphi(v)=vb(x)\varphi'(v),\tag{17}$$

і

$$b(x)=aC^1(x)Q_0+1/2,\tag{18}$$

а залишковий член $\theta^{\varepsilon}_L\varphi(v,x)$ такий, що

$$\|\theta^{\varepsilon}_L\varphi(v,x)\|\to0,\varepsilon\to0,0<t_0<t<T<\infty.$$

Доведення. Виходячи з гладкості функцій $\varphi(v,x)$ маємо

$$\varphi(v+\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x),y)=$$

$$+\varphi(v,y)+\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x)\varphi'_v(v,y)+o(\varepsilon).\tag{19}$$

Згідно з (2) для $C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x)$ отримаємо розклад

$$C(\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}},x)=C^0(x)+\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}C^1(x)+o(\varepsilon).\tag{20}$$

Підставляючи (20) і (19) в (14) маємо

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0\varphi(v,x)=\varepsilon\frac{a}{\sqrt{t}}C^0(x)\boldsymbol{P}\varphi'_v(v,y)+$$

$$+\varepsilon^2\frac{v}{t}[aC^1(x)\boldsymbol{P}+\frac{g(x)}{2}]\varphi'_v(v,y)+o(\varepsilon).$$

На завершення, використовуючи останнє, з (13) отримуємо (15) в позначеннях (16)-(18).

4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (15) на збурених тест-функціях виду

$$\varphi^\varepsilon(v,x)=\varphi(v)+\varepsilon\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x)+\varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,x). \tag{21}$$

Лема 3. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (15) на тест-функціях (21) з $\varphi(v)\in C^3(R)$ має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,x)=\frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v)+\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v), \tag{22}$$

де оператор $\boldsymbol{L}$ має представлення (10), а залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v)$ такий, що $\|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v)\|\to 0, \varepsilon\to 0$.

Доведення. Спочатку розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного до (15) оператора, а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon\varphi(v,x)=\varepsilon^{-2}Q\varphi(v,x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}Q_1(x)Q_0\varphi(v,x)+$$
$$+\frac{1}{t}Q_2(x)\varphi(v,x).$$

Оскільки $\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon$ на функціях (21) має представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,x)=\varepsilon^{-2}Q\varphi(v)+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[Q\varphi_1(v,x)+$$
$$+Q_1(x)Q_0\varphi(v)]+$$

$$+\frac{1}{t}[Q\varphi_2(v,x)+Q_1(x)Q_0\varphi_1(v,x)+Q_2(x)\varphi(v)]+$$

$$+\theta_{L0}^\varepsilon(x)\varphi(v)=\frac{1}{t}\boldsymbol{L}\varphi(v)+\theta_{L0}^\varepsilon(x)\varphi(v), \tag{23}$$

то з умови (слідуючи [7], твердження 5.2)

$$Q\varphi_1(v,x)+Q_1(x)Q_0\varphi(v)=0$$

і умови балансу УБ маємо

$$\varphi_1(v,x)=R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v)=aR_0\tilde{C}^0(x)\varphi'(v), \tag{24}$$

де $\tilde{C}^0(x)$ обчислюємо за (9).

Далі з умови розв'язності (23) і представлення (24) маємо

$$Q\varphi_2(v,x)+Q_1Q_0(x)R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v)+$$
$$+Q_2(x)\varphi(v)=\boldsymbol{L}\varphi(v),$$

де оператор $\boldsymbol{L}$ такий, що

$$\boldsymbol{L}\Pi\varphi(v)=\Pi\boldsymbol{L}(x)\Pi\varphi(v), \tag{25}$$

а

$$\boldsymbol{L}(x)\varphi(v)=Q_1(x)Q_0R_0Q_1(x)Q_0\varphi(v)+$$
$$+Q_2(x)\varphi(v). \tag{26}$$

Обчислення правої частини (25), враховуючи (26) і (24), дає праву частину представлення (22).

На завершення зауважимо, що малий доданок в представленні (15) генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ не впливає на розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (22), тобто права частина розв'язоку проблеми сингулярного збурення для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має вигляд правої частини (23) (див. [7], висновок 5.1, с. 141).

5. Доведення Теореми опирається на результати Лем 1-3 і реалізується за схемою, що приведена при доведенні Теореми 6.6, [7].

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСА в R^d, $d>1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В.С. Королюку за увагу до викладеного матеріалу.

1. Чабанюк Я.М. Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі / / Доп. НАН України. – 2004. – сер. А, № 5. – С. 37-45.

2. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.:Наука, 1972. – 304с.

3 Ljung L., Pflug G., Walk H. Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. – Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1992. -113P.

4. Чабанюк Я.М. Дискретна стохастична процедура у марківському випадковому середовищі // Вісник Львів. ун-ту.–2000. – Серія мех-мат., **56**. – С. 179-184.

5. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука,1986.– 431с.

6. Hersh R. The birth of random evolution. // Mathematical Intelligencer. –2003.–**25**.– P.53-60.

7. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – World Scientific Publishing, 2005. – 330P.