УДК 517.95

©2007 р. Г.Р. Торган

Львівський національний університет імені Івана Франка

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ ЗА ЧАСОМ

Одержано достатні умови існування і єдності узагальненого розв'язку в класі типу Тихонова мішаної задачі для еволюційного рівняння в необмеженій області за часом.

We obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of a generalized solution in a Tykhonov type class for a mixed problem for an evolution equation in an unbounded on time domain.

У 1960 році С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін "$\overrightarrow{2b}$-параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу по відношенню до диференціювання за змінною t. За цей час було достатньо повно розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем вказаного типу (див. праці [2 – 21]).

У цій праці розглянуто нелінійне еволюційне рівняння з першою похідною за часом, четвертими похідними за однією групою просторових змінних і другими похідними за другою групою просторових змінних. Такі рівняння можна віднести до $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь типу Ейдельмана. Досліджено мішану задачу в необмеженій області за часом.

Нехай Ω_x – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1$, Ω_y – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^l$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, де $T < \infty$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1,\ t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in (-\infty, T]$, $S_{t_1,t_2} = \partial\Omega \times (t_1, t_2)$, $k+l = n$, $z = (x, y)$, $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$.

В області Q_T розглянемо рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{r-2}u_{x_ix_j})_{x_ix_j} -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(a_i(z,t)|u_{z_i}|^{p-2}u_{z_i})_{z_i} + \sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u_{x_i} +$$
$$+\sum_{i=1}^{l} b_i^0(z,t)u_{y_i} + b(z,t)u +$$
$$+g(z,t)|u|^{q-2}u = f(z,t), \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u\big|_{S_T} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (-\infty,T)} = 0, \tag{2}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (-\infty, T)$. Нехай $p > 1,\ q > 1\ r > 1$.

Ведемо простори:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{u:\ u \in W^{1,p}(\Omega),\ u\big|_{\partial\Omega} = 0\Big\},$$

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{z_i}|^p\,dz\right)^{1/p};$$

$$W_0^{2,r}(\Omega_x) = \Big\{u:\ u \in W^{2,r}(\Omega_x),\ u\big|_{\partial\Omega_x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega_x} = 0\Big\},$$

$$||u||_{W_0^{2,r}(\Omega_x)} = \left(\int_{\Omega_x} \sum_{i,j=1}^{k} \left|u_{x_ix_j}\right|^r dz\right)^{1/r};$$

$$L^q((t_1,t_2);B)=\left\{u:\int\limits_{t_1}^{t_2}||u(\cdot,t)||_B^q dt<\infty\right\},$$

$$||u||_{L^q((t_1,t_2);B)}=\left(\int\limits_{t_1}^{t_2}||u(\cdot,t)||_B^q dt\right)^{1/q},$$

де $q\in(1,+\infty)$, B – деякий банахів простір;

$$L^q_{loc}((-\infty,T];B)=\Big\{u:\ u\in L^q((t_0,T);B),$$

$$\forall\, t_0,\ t_0<T\Big\};$$

$$H^{i,j}(\Omega)=\big\{u:\ u\in L^2(\Omega_y;H^i(\Omega_x))\cap$$
$$\cap L^2(\Omega_x;H^j(\Omega_y)),\ i,j\in\mathbb{N}\big\},$$

Припустимо виконання таких умов:

(A)

$$a_{ij},\ a_{ijt}\in L^\infty(Q_T),\ i,j\in\{1,...,k\},$$
$$a_l,\ a_{lt}\in L^\infty(Q_T),\ l\in\{1,...,n\},$$
$$a_{ij}(z,t)\geq A_0>0,\ a_i(z,t)\geq A_1>0$$

майже всюди в Q_T;

(B)

$$b_i,\ b_{it},\ b_j^0,\ b_{jt}^0,\ b,\ b_t,\ b_{ix_i},\ b^0_{jy_j}\in L^\infty(Q_T),$$
$$i\in\{1,...k\},\ j\in\{1,...l\};$$
$$b(z,t)\geq B_0>0$$

для майже всіх $(z,t)\in Q_T$;

(G)

$$g,\ g_t\in L^\infty(Q_T),\ g(z,t)\geq g_0>0$$

майже всюди в Q_T.

Означення 1. *Функцію* $u\in C((-\infty,T];L^2(\Omega))\cap L^p_{loc}((-\infty,T];W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^r_{loc}((-\infty,T];L^r(\Omega_y;W_0^{2,r}(\Omega_x)))\cap L^q_{loc}((-\infty,T];L^q(\Omega))$ *називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau}uvdz+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{r-2}u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}-$$

$$-uv_t+\sum_{i=1}^k b_i(z,t)u_{x_i}v+\sum_{i=1}^l b_i^0(z,t)u_{y_i}v+$$

$$+b(z,t)uv+\sum_{i=1}^n a_i(z,t)|u_{z_i}|^{p-2}u_{z_i}v_{z_i}+$$

$$+g(z,t)|u|^{q-2}uv\Bigg]dzdt=\int\limits_{Q_\tau}f(z,t)vdzdt \quad (3)$$

для всіх $\tau\in(-\infty,T]$ *і для довільних* $v\in C^1((-\infty,T];C_0^2(\overline{\Omega}))$, *які мають обмежені носії в* Q_T.

Розглянемо рівняння (1) спочатку в області $Q_{t_0,T}$ з початковою умовою

$$u(z,t_0)=u_0(z),\ z\in\Omega \quad (4)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{S_{t_0,T}}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega_x\times\Omega_y\times(t_0,T)}=0, \quad (5)$$
$$t_0\in(-\infty,T).$$

Припустимо виконання умови **(F):**

$$f\in L^{q'}(Q_{t_0,T}),\ \text{де}\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ f_t\in L^2(Q_{t_0,T});$$

$$\frac{\partial a_{ij}(\cdot,t_0)}{\partial x_s},\ \frac{\partial a_{ij}(\cdot,t_0)}{\partial x_s x_m}\in L^\infty(\Omega),$$
$$i,j,s,m\in\{1,...,k\};$$
$$a_{iz_s}(\cdot,t_0)\in L^\infty(\Omega),\ i,s\in\{1,...,n\};$$
$$b_{ix_s}(\cdot,t_0)\in L^\infty(\Omega),\ i,s\in\{1,...,k\},$$
$$b^0_{jy_m}(\cdot,t_0)\in L^\infty(\Omega),\ j,m\in\{1,...,l\}.$$

Означення 2. *Функцію* $u\in L^p((t_0,T);W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^q(Q_{t_0,T})\cap C([t_0,T];L^2(\Omega))\cap L^r((t_0,T)\times\Omega_y;W_0^{2,r}(\Omega_x))$ *таку, що* $u_t\in L^2(Q_{t_0},T)$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (4), (5), якщо вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau}uvdz+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Bigg[\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{r-2}u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}+$$

$$-uv_t+\sum_{i=1}^k b_i(z,t)u_{x_i}v+\sum_{i=1}^l b_i^0(z,t)u_{y_i}v+$$

$$+b(z,t)uv+\sum_{i=1}^n a_i(z,t)|u_{z_i}|^{p-2}u_{z_i}v_{z_i}+$$

$$g(z,t)|u|^{q-2}uv\Bigg]dzdt=\int\limits_{\Omega_{t_0}}u_0(z)vdz+$$

$$+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}f(z,t)vdzdt \qquad (6)$$

для всіх $\tau\in(t_0,T]$ *і для довільних* $v\in C^1([t_0,T];C_0^2(\overline{\Omega}))$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (B), (G), (F) і* $|u_{0x_ix_j}|^{r-2}u_{0x_ix_j}\in L^2(\Omega_y;H^2(\Omega_x))$, $|u_{0z_i}|^{p-2}u_{0z_i}\in H^1(\Omega)$, $u_0\in H^1(\Omega)\cap L^{2(q-1)}(\Omega)$. *Тоді при* $p>2$, $r>1$, $q>1$ *існує узагальнений розв'язок задачі (1), (4), (5). Якщо, крім того,* $b_i=0$, $b_j^0=0$ *для майже всіх* $(z,t)\in Q_{t_0,T}$ *і всіх* $i\in\{1,...,k\}$, $j\in\{1,...,l\}$, *тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1), (4), (5) і при* $1<p<2$, $r>1$, $q>1$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (G),* $2b_0(z,t)-\sum\limits_{i=1}^{k}b_i(z,t)-\sum\limits_{i=1}^{l}b_i^0(z,t)\geq 0$ *для майже всіх* $(z,t)\in Q_T$, $f\in L^{q_0}_{loc}((-\infty,T);L^2(\Omega))$, *де* $q_0=\min\{q',2\}$. *Тоді при* $p>2$, $r>1$, $q>2$ *існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Якщо* $b_i(z,t)=0$, $b_j^0(z,t)=0$ *для майже всіх* $(z,t)\in Q_T$ *і всіх* $i\in\{1,...,k\}$, $j\in\{1,...,l\}$, *тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2) і при* $1<p<2$, $1<r<2$, $q>2$.

Доведення. В теоремі 1 доведено існування узагальненого розв'язку в обмеженій області при $t\in(t_0,T)$ з початковою умовою (4). Нехай u^s розв'язок задачі

$$A(u)=f^{s,s}(z,t),\ (z,t)\in Q_{t_s,T}$$

з крайовими умовами

$$u|_{S_{t_s,T}}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega_x\times\Omega_y\times(t_s,T)}=0$$

і початковою умовою

$$u(z,t_s)=0,$$

де $t_s=T-s-1,\ s=1,2,...,$ а вільний член

$$f^{s,s}(z,t)=\begin{cases}f^s(z,t), & (z,t)\in Q_{t_s}\\ 0, & (z,t)\notin Q_{t_s}\ .\end{cases}$$

Послідовність $\{f^s\}$ є такою, що

$$f^s,\ f_t^s\in L^2_{loc}((-\infty,T];L^2(\Omega)),$$

$$f^s\to f\ \text{ в }\ L^2_{loc}((-\infty,T];L^2(\Omega)).$$

Продовжимо u^s нулем на всю область Q_T поза областю Q_{t_s}:

$$u^s(z,t)=\begin{cases}u(z,t), & (z,t)\in Q_{t_s}\\ 0, & (z,t)\notin Q_{t_s}.\end{cases}$$

На підставимо (6), правильні такі рівності

$$\int\limits_{\Omega_\tau}u^svdz+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)|u^s_{x_ix_j}|^{r-2}u^s_{x_ix_j}v_{x_ix_j}-$$

$$-u^sv_t++\sum_{i=1}^{k}b_i(z,t)u^s_{x_i}v+\sum_{i=1}^{l}b_i^0(z,t)u^s_{y_i}v+$$

$$+b(z,t)u_sv+\sum_{i=1}^{n}a_i(z,t)|u^s_{z_i}|^{p-2}u^s_{z_i}v_{z_i}+$$

$$+g(z,t)|u_s|^{q-2}u_sv-f^{s,s}(z,t)v\Bigg]dzdt=0, \quad (7)$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau}u^mvdz+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)|u^m_{x_ix_j}|^{r-2}u^m_{x_ix_j}v_{x_ix_j}-$$

$$-u^mv_t+\sum_{i=1}^{k}b_i(z,t)u^m_{x_i}v+\sum_{i=1}^{l}b_i^0(z,t)u^m_{y_i}v+$$

$$+b(z,t)u^mv+\sum_{i=1}^{n}a_i(z,t)|u^m_{z_i}|^{p-2}u^m_{z_i}v_{z_i}+$$

$$+g(z,t)|u^m|^{q-2}u^mv-f^{m,m}(z,t)v\Bigg]dzdt=0, \quad (8)$$

для $\forall\tau\in(-\infty,T)$ і $\forall v\in L^q((-\infty,T);L^q(\Omega))\cap L^p((-\infty,T);W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^r((-\infty,T)\times\Omega_y;W_0^{2,r}(\Omega_x))\cap H_0^1((-\infty,T);L^2(\Omega))$ таких, що $supp\,v\subset Q_{T-s-1,T}$, $s,m\in\mathbb{N}$, $s\neq m$.

Віднімемо від (7) – (8) і приймемо $v = (u^s - u^m)\psi_{t_0} = u^{s,m}\psi_{t_0}$, де

$$\psi_{t_0}(t) = \begin{cases} (t-t_0)^\sigma, & t \ge t_0 \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

$$|t_0| < s,\ |t_0| < m,\ \sigma > 1.$$

Отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{s,m}|^2\psi_{t_0}dz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-\frac{1}{2}|u^{s,m}|^2\psi'_{t_0} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)\big(|u^s_{x_ix_j}|^{r-2}u^s_{x_ix_j} -$$

$$-|u^m_{x_ix_j}|^{r-2}u^m_{x_ix_j}\big)u^{s,m}_{x_ix_j}\psi_{t_0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u^{s,m}_{x_i}u^{s,m}\psi_{t_0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{l} b^0_i(z,t)u^{s,m}_{y_i}u^{s,m}\psi_{t_0} +$$

$$+g(z,t)\psi_{t_0}\left(|u_s|^{q-2}u_s - |u^m|^{q-2}u^m\right)u^{s,m} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\psi_{t_0}a_i(z,t)\left(|u^s_{z_i}|^{p-2}u^s_{z_i} -\right.$$

$$\left.-|u^m_{z_i}|^{p-2}u^m_{z_i}\right)u^{s,m}_{z_i} + b(z,t)|u^{s,m}|^2\psi_{t_0}\Big]dzdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\left(f^{s,s} - f^{m,m}\right)u^{s,m}\psi_{t_0}dzdt. \qquad (9)$$

Оцінимо доданки рівності (9) при $p > 2$, $q > 2$, $r > 2$. Використовуючи нерівності Гельдера і Юнга, одержимо

$$J_{26} := \int\limits_{Q_\tau} |u^{s,m}|^2\psi'_{t_0}dzdt \le$$

$$\le \left(\int\limits_{Q_\tau} |u^{s,m}|^q\psi_{t_0}dzdt\right)^{2/q} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_\tau}\left|\frac{\psi'_{t_0}}{\psi_{t_0}^{\frac{2}{q}}}\right|^{q/q-2}dzdt\right)^{1-2/q} \le$$

$$\le \frac{q\delta}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^{s,m}|^q\psi_{t_0}dzdt +$$

$$+\frac{q}{(q-2)\delta}\int\limits_{Q_\tau}\sigma|t-t_0|^{\sigma-\frac{q}{q-2}}dzdt,$$

де δ – довільне додатне число.
З умови (A) маємо

$$J_1 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)\big(|u^s_{x_ix_j}|^{r-2}u^s_{x_ix_j} -$$

$$-|u^m_{x_ix_j}|^{r-2}u^m_{x_ix_j}\big)u^{s,m}_{x_ix_j}\psi_{t_0}dzdt \ge$$

$$\ge A_0 2^{2-r}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u^{s,m}_{x_ix_j}|^r\psi_{t_0}dzdt,$$

$$J_2 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n} a_i(z,t)\big(|u^s_{z_i}|^{p-2}u^s_{z_i} -$$

$$-|u^m_{z_i}|^{p-2}u^m_{z_i}\big)u^{s,m}_{z_i}\psi_{t_0}dzdt \ge$$

$$\ge A_1 2^{2-p}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,m}_{z_i}|^p\psi_{t_0}dzdt.$$

З умови (B) будемо мати

$$J_3 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u^{s,m}_{x_i}u^{s,m}\psi_{t_0}dzdt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{k} b_{ix_i}(z,t)|u^{s,m}|^2\psi_{t_0}dzdt,$$

$$J_4 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l} b^0_i(z,t)u^{s,m}_{y_i}u^{s,m}\psi_{t_0} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l} b^0_{iy_i}(z,t)|u^{s,m}|^2\psi_{t_0}dzdt.$$

З умови (G) випливає

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} g(z,t)\psi_{t_0}\left(|u_s|^{q-2}u_s -\right.$$

$$\left.-|u^m|^{q-2}u^m\right)u^{s,m}dzdt \ge$$

$$\geq g_0 2^{2-q} \int\limits_{Q_\tau} \psi_{t_0} |u_{s,m}|^q dzdt.$$

З умови (F) одержимо

$$J_6 := \int\limits_{Q_\tau} \big(f^{s,s}(z,t) - f^{m,m}(z,t)\big) u^{s,m} \psi_{t_0} dzdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{q} \int\limits_{Q_\tau} \psi_{t_0} |u_{s,m}|^q dzdt +$$

$$+ \frac{1}{q'} \int\limits_{Q_\tau} \big(f^{s,s}(z,t) - f^{m,m}(z,t)\big)^{q'} \psi_{t_0} dzdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_6$, з (9) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[|u^{s,m}|^q \big(g_0 2^{3-q} - q\delta - \frac{2}{q}\big) +$$

$$+ A_0 2^{3-r} \sum_{i,j=1}^{k} |u^{sm}_{x_i x_j}|^r + A_1 2^{3-p} \sum_{i=1}^{n} |u^{sm}_{z_i}|^p +$$

$$+ \big(2b(z,t) - \sum_{i=1}^{k} b_{ix_i}(z,t) - \sum_{i=1}^{l} b^0_{iy_i}(z,t)\big) \times$$

$$\times |u^{s,m}|^2 \Big] \psi_{t_0} dzdt + \int\limits_{\Omega_\tau} |u^{s,m}|^2 \psi_{t_0} dz \leq$$

$$\leq \frac{2q}{(q-2)\delta} \int\limits_{Q_\tau} \sigma |t - t_0|^{\sigma - \frac{q}{q-2}} dzdt +$$

$$+ \frac{2}{q'} \int\limits_{Q_\tau} |f^{s,s}(z,t) - f^{m,m}(z,t)|^{q'} \psi_{t_0} dzdt.$$

Виберемо $\delta = \dfrac{g_0 2^{2-q}}{q} - \dfrac{1}{q^2}$. Оскільки за умовою теореми $2b(z,t) - \sum\limits_{i=1}^{k} b_{ix_i}(z,t) - \sum\limits_{i=1}^{k} b_{ix_i}(z,t) \geq 0$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, то з останньої нерівності матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[|u^{s,m}|^q + \sum_{i,j=1}^{k} |u^{sm}_{x_i x_j}|^r + \sum_{i=1}^{n} |u^{sm}_{z_i}|^p +$$

$$+ |u^{s,m}|^2 \Big] \psi_{t_0} dzdt + \int\limits_{\Omega_\tau} |u^{s,m}|^2 \psi_{t_0} dz \leq$$

$$\leq C_1 \int\limits_{Q_\tau} \sigma |t - t_0|^{\sigma - \frac{q}{q-2}} dzdt +$$

$$+ C_1 \int\limits_{Q_\tau} |f^{s,s}(z,t) - f^{m,m}(z,t)|^{q'} \psi_{t_0} dzdt.$$

При $t_0 < t_1 \leq t \leq \tau \leq T$ маємо

$$|t_1 - t_0|^\sigma \int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} |u^{sm}_{x_i x_j}|^r + \sum_{i=1}^{n} |u^{sm}_{z_i}|^p +$$

$$+ |u^{s,m}|^q + |u^{s,m}|^2 \Big] dzdt + |t_1 - t_0|^\sigma \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{t_1}} |u^{s,m}|^2 dz \leq \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[|u^{s,m}|^q + \sum_{i,j=1}^{k} |u^{sm}_{x_i x_j}|^r +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |u^{sm}_{z_i}|^p + |u^{s,m}|^2 \Big] |t - t_0|^\sigma dzdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} |u^{s,m}|^2 |\tau - t_0|^\sigma dz \leq C_2 |T - t_0|^{\sigma + 1 - \frac{q}{q-2}} +$$

$$+ C_2 |T - t_0|^\sigma \int\limits_{Q_\tau} |f^{s,s}(z,t) - f^{m,m}(z,t)|^{q'} dzdt.$$

Отже, при $p > 2$, $q > 2$, $r > 2$ з (9) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[|u^{s,m}|^q + \sum_{i,j=1}^{k} |u^{sm}_{x_i x_j}|^r + \sum_{i=1}^{n} |u^{sm}_{z_i}|^p +$$

$$+ |u^{s,m}|^2 \Big] dzdt + \int\limits_{\Omega_{t_1}} |u^{s,m}|^2 dz \leq$$

$$\leq C_3 \left| \frac{T - t_0}{t_1 - t_0} \right|^\sigma |T - t_0|^{1 - \frac{q}{q-2}} +$$

$$+ C_3 \left| \frac{T - t_0}{t_1 - t_0} \right|^\sigma \int\limits_{Q_\tau} |f^{s,s}(z,t) - f^{m,m}(z,t)|^{q'} dzdt.$$

Оцінимо доданки правої частини останньої нерівності.
При $t_0 \to -\infty$

$$I_1 := \left| \frac{T - t_0}{t_1 - t_0} \right|^\sigma |T - t_0|^{1 - \frac{q}{q-2}} \to 0,$$

якщо $q > 2$.
Оскільки за $f^s \to f$ в $L^2((-\infty, T]; L^2(\Omega))$, то

$$I_2 := \left|\frac{T-t_0}{t_1-t_0}\right|^{\sigma} \int\limits_{Q_\tau} |f^{s,s}(z,t)-$$

$$-f^{m,m}(z,t)|^{q'} dzdt < \varepsilon,$$

де ε – довільне достатньо мале число.

Отже, права частина останньої нерівності прямує до нуля при $t_0 \to -\infty$. Тоді послідовність $\{u^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ фундаментальна, а отже, сильно збіжна в просторі $C((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap L^q_{loc}((-\infty,T];L^q(\Omega)) \cap L^r_{loc}((-\infty,T];W_0^{2,r}(\Omega_x) \times \Omega_y) \cap L^p_{loc}((-\infty,T];W_0^{1,p}(\Omega))$.

Перейдемо до границі в рівності (7) при $s \to \infty$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} uvdz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{r-2}u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u_{x_i}v + \sum_{i=1}^{n} a_i(z,t)|u_{z_i}|^{p-2}u_{z_i}v_{z_i}+$$

$$+b(z,t)uv + g(z,t)|u|^{q-2}uv + \sum_{i=1}^{l} b_i^0(z,t)u_{y_i}v-$$

$$-uv_t\Big]dzdt = \int\limits_{Q_\tau} f(z,t)vdzdt.$$

Отож, існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2) у випадку $p > 2,\ q > 2,\ r > 2$ доведено.

Розглянемо рівність (9) у випадку, коли $p > 2,\ q > 2,\ 1 < r < 2$. Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_6$, будемо мати

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[|u^{s,m}|^q + \sum_{i=1}^{n}|u^{sm}_{z_i}|^p + |u^{s,m}|^2\Big]\psi_{t_0}dzdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{s,m}|^2\psi_{t_0}dz \le M_4\int\limits_{Q_\tau}\sigma|t-t_0|^{\sigma-\frac{q}{q-2}}dzdt+$$

$$+M_4\int\limits_{Q_\tau}|f^{s,s}(z,t)-f^{m,m}(z,t)|^{q'}\psi_{t_0}dzdt,$$

тобто правильна нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}}\Big[|u^{s,m}|^q + \sum_{i=1}^{n}|u^{sm}_{z_i}|^p + |u^{s,m}|^2\Big]dzdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{t_1}}|u^{s,m}|^2dz \le \varepsilon$$

при $t_0 < t_1 \le t \le \tau \le T$, де $\varepsilon \to 0$. Тому послідовність u^s фундаментальна в $C((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap L^q_{loc}((-\infty,T];L^q(\Omega)) \cap L^p_{loc}((-\infty,T);W_0^{1,p}(\Omega))$.

Розглянемо рівність (7) для послідовності розв'язків u^s, де $v = u^s\psi_{t_0}$:

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^s|^2\psi_{t_0}dz + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-u^su^s_t\psi_{t_0} - |u^s|^2\psi'_{t_0}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u^s_{x_ix_j}|^r\psi_{t_0} + \sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u^s_{x_i}u^s\psi_{t_0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{l} b_i^0(z,t)u^s_{y_i}u^s\psi_{t_0} + b(z,t)|u^s|^2\psi_{t_0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(z,t)|u^s_{z_i}|^p\psi_{t_0} + g(z,t)|u_s|^q\psi_{t_0}-$$

$$-f^{s,s}(z,t)u^s\psi_{t_0}\Big]dzdt = 0. \qquad (10)$$

Оцінивши доданки останньої рівності, будемо мати

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}}\Big[|u^s|^q + \sum_{i,j=1}^{k}|u^s_{x_ix_j}|^r + \sum_{i=1}^{n}|u^s_{z_i}|^p+$$

$$+|u^s|^2\Big]\psi_{t_0}dzdt + \int\limits_{\Omega_{t_1}}|u^s|^2\psi_{t_0}dz \le M_6.$$

Отже,

$$||u^s||_{L^2(Q_{t_0,T})} \le M_6,\ ||u^s||_{V(Q_{t_0,T})} \le M_6,$$

де $V(Q_{t_0,T}) = L^p((t_0,T);W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^q(Q_{t_0,T}) \cap L^r((t_0,T);\Omega_y \times W_0^{2,r}(\Omega_x))$.

Введемо оператор

$$B : L^r((t_0,T)\times\Omega_y; W_0^{2,r}(\Omega)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow L^{r'}((t_0,T)\times\Omega_y;W^{-2,r'}(\Omega))$$

формулою

$$< Bu,v >_1 = \int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{r-2}u_{x_ix_j}\times$$

$$\times v_{x_ix_j}\psi_{t_0}dzdt,$$

де $< \cdot,\cdot >_1$ – скалярний добуток між елементами простору $L^{r'}((t_0,T)\times\Omega_y;W^{-2,r'}(\Omega))$ і $L^{r}((t_0,T)\times\Omega_y;W_0^{2,r}(\Omega))$.

Розглянемо послідовність

$$y_s =< B(u^{N_s})-B(v),u^{N_s}-v >_1=$$

$$= \int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)\big(|u^{N_s}_{x_ix_j}|^{r-2}u^{N_s}_{x_ix_j}-$$

$$-|v_{x_ix_j}|^{r-2}v_{x_ix_j}\big)\big(u^{N_s}_{x_ix_j}-v_{x_ix_j}\big)\psi_{t_0}dzdt,$$

де $s=1,2,...$ Очевидно, що $y_s\geq 0$.

Враховуючи умову (A), легко показати, що

$$||Bu^N||_{L^{r'}((t_0,T)\times\Omega_y;W^{-2,r'}(\Omega))}\leq M_7,$$

причому стала M_7 не залежить від N. Отже, існує підпослідовність $\{u^{N_s}\}_{N_s\in\mathbb{N}}\subset\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ така, що

$$B(u^{N_s})\to\chi$$

слабко в

$$L^{r'}((t_0,T)\times\Omega_y;W^{-2,r'}(\Omega))$$

при $N_s\to\infty$.

Доведемо, що $B(u)=\chi$. Розглянемо

$$0\leq y_s =< B(u^{N_s})-B(v),u^{N_s}-v >_1=$$

$$=< B(u^{N_s}),u^{N_s} >_1 - < B(v),u^{N_s}-v >_1 -$$

$$- < B(u^{N_s}),v >_1= \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[f(z,t)u^{N_s}\psi_{t_0}-$$

$$-u^{N_s}_t u^{N_s}\psi_{t_0}-\sum_{i=1}^{k} b_i u^{N_s}_{x_i}u^{N_s}\psi_{t_0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{l} b_i^0 u^{N_s}_{y_i}u^{N_s}\psi_{t_0}-b|u^{N_s}|^2\psi_{t_0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(z)|u^{N_s}_{z_i}|^p\psi_{t_0}-g(z,t)|u^{N_s}|^q\psi_{t_0}\Big]dzdt-$$

$$- < B(u^{N_s}),v >_1 - < B(v),u^{N_s}-v >_1 .$$

Перейдемо в цій нерівності до верхньої границі. Використовуючи лему 5.3 [22], отримаємо

$$0\leq \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[f(z,t)u\psi_{t_0}-\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u_{x_i}u\psi_{t_0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{l} b_i^0(z,t)u_{y_i}u\psi_{t_0}-\sum_{i=1}^{n} a_i(z,t)|u_{z_i}|^p\psi_{t_0}-$$

$$-b(z,t)|u|^2\psi_{t_0}-g(z,t)|u|^q\psi_{t_0}\Big]dzdt-$$

$$- < \chi,v >_1 - < B(v),u-v >_1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u|^2\psi_{t_0}dz. \qquad (11)$$

У формулі (7) приймемо $v=u\psi_{t_0}$ і, враховуючи можливість інтегрування частинами, матимемо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u|^2\psi_{t_0}dz+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u_{x_i}u\psi_{t_0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{l} b_i^0(z,t)u_{y_i}u\psi_{t_0}+b(z,t)|u|^2\psi_{t_0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(z)|u_{z_i}|^p\psi_{t_0}-g(z,t)|u|^q\psi_{t_0}-$$

$$-f(z,t)u\psi_{t_0}\Big]dzdt+ < \chi,u >_1= 0. \qquad (12)$$

Додавши (11) і (12), отримаємо нерівність

$$< \chi-B(v),u-v >_1\geq 0.$$

Візьмемо $u-v=\lambda w$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda>0,\ w\in L^r((t_0,T)\times\Omega_y;W_0^{2,r}(\Omega_x))$, тоді отримаємо

$$< \chi-B(u-\lambda w),\lambda w >_1\geq 0.$$

Оскільки $\lambda>0$, то можемо поділити отриману нерівність на λ. Спрямуємо λ до нуля і, враховуючи семінеперервність оператора B, отримаємо

$$< \chi - B(u), w >_1 \geq 0.$$

Оскільки w довільне, можемо взяти w і додатне, і від'ємне, тому

$$\chi = B(u).$$

Отже, ми довели, що узагальнений розв'язок задачі (1), (4), (5) при $p > 2$, $1 < r < 2$, $q > 2$ існує.

Розглянемо випадок, коли $1 < p < 2$, $1 < r < 2$, $q > 2$. У цьому випадку нерівність (9) оцінюється так:

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[|u^{s,m}|^2 \psi_{t_0} + \psi_{t_0} |u^{s,m}|^q \Big] dzdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} |u^{s,m}|^2 \psi_{t_0} dz \leq M_8 \int\limits_{Q_\tau} |t - t_0|^{\sigma - \frac{q}{q-2}} dzdt.$$

Отже, правильна нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_1}} |u^{s,m}|^2 dz + \int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[|u^{s,m}|^q + |u^{s,m}|^2 \Big] dzdt \leq \varepsilon$$

при $t_0 < t_1 \leq t \leq \tau \leq T$, де $\varepsilon \to 0$. Тому послідовність u^s фундаментальна в $C((-\infty, T]; L^2(\Omega)) \cap L^q_{loc}((-\infty, T]; L^q(\Omega))$.

Оцінивши доданки рівності (10) у випадку $1 < p < 2$, $1 < r < 2$, $q > 2$, будемо мати

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[|u^s|^q + \sum_{i,j=1}^{k} |u^s_{x_i x_j}|^r + \sum_{i=1}^{n} |u^s_{z_i}|^p +$$

$$+ |u^s|^2 \Big] \psi_{t_0} dzdt + \int\limits_{\Omega_\tau} |u^s|^2 \psi_{t_0} dz \leq M_9.$$

Отже,

$$||u^s||_{L^2(Q_{t_0,T})} \leq M_9, \; ||u^s||_{V(Q_{t_0,T})} \leq M_9.$$

Введемо оператор

$$C : L^r((t_0, T) \times \Omega_y; W_0^{2,r}(\Omega)) \cap$$

$$\cap L^p((t_0, T); W_0^{1,p}(\Omega)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow L^{r'}((t_0, T) \times \Omega_y; W^{-2,r'}(\Omega)) +$$

$$+ L^{p'}((t_0, T); W^{-1,p'}(\Omega))$$

формулою

$$< Cu, v >_2 =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) |u_{x_i x_j}|^{r-2} u_{x_i x_j} v_{x_i x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(z,t) |u_{z_i}|^{p-2} u_{z_i} v_{z_i} \Big] \psi_{t_0} dzdt,$$

де $< \cdot, \cdot >_2$ – скалярний добуток між елементами простору $L^{r'}((t_0, T) \times \Omega_y; W^{-2,r'}(\Omega)) + L^{p'}((t_0, T); W^{-1,p'}(\Omega))$ і $L^r((t_0, T) \times \Omega_y; W_0^{2,r}(\Omega)) \cap L^p((t_0, T); W_0^{1,p}(\Omega))$.

Аналогічно як у поперерньому випадку показуємо, що $C(u) = \chi$.

Отже, ми довели, що узагальнений розв'язок задачі (1), (4), (5) при $1 < p < 2$, $1 < r < 2$, $q > 2$ існує.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (G), $2b_0(z,t) - \sum\limits_{i=1}^{k} b_i(z,t) - \sum\limits_{i=1}^{l} b_i^0(z,t) \geq 0$ *для майже всіх* $(z,t) \in Q_T$, $f \in L^{q_0}_{loc}((-\infty, T); L^2(\Omega))$, *де* $q_0 = \min\{q', 2\}$. *Тоді при* $p > 1$, $r > 1$, $q > 2$ *узагальнений розв'язок задачі (1), (2) єдиний.*

Доведення. Доведемо єдиність узагальненого розв'язку методом від супротивного. Припустимо, що задача (1), (2) має два різні розв'язки u^1 і u^2. Підставимо їх в (3), отримані рівності віднімемо і приймемо $v = u^{1,2} \psi_{t_0}$. У результаті матимемо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^{1,2}|^2 \psi_{t_0} dz + \int\limits_{Q_\tau} \Big[- \frac{1}{2} |u^{1,2}|^2 \psi'_{t_0} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) \big(|u^1_{x_i x_j}|^{r-2} u^1_{x_i x_j} -$$

$$- |u^2_{x_i x_j}|^{r-2} u^2_{x_i x_j} \big) u^{1,2}_{x_i x_j} \psi_{t_0} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u_{x_i}^{1,2}u^{1,2}\psi_{t_0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{l} b_i^0(z,t)u_{y_i}^{1,2}u^{1,2}\psi_{t_0}+b(z,t)|u^{1,2}|^2\psi_{t_0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(z,t)\big(|u_{z_i}^1|^{p-2}u_{z_i}^1-|u_{z_i}^2|^{p-2}u_{z_i}^2\big)u_{z_i}^{1,2}\psi_{t_0}+$$

$$+g(z,t)\big(|u^1|^{q-2}u^1-|u^2|^{q-2}u^2\big)u^{1,2}\psi_{t_0}\Big]dzdt=0$$

для всіх $\tau\in(-\infty,T]$.

З оцінок інтегралів J_1-J_6 випливає

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{1,2}|^2\psi_{t_0}dz+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|u^{1,2}|^2\big(2b(z,t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{k} b_{ix_i}(z,t)-\sum_{i=1}^{l} b_{iy_i}^0(z,t)\big)+$$

$$+|u^{1,2}|^q\big(g_0 2^{3-q}-q\delta\big)\Big]\psi_{t_0}dzdt<\varepsilon,$$

де ε – довільне достатньо мале число.

Оскільки δ довільне, а за умовою теореми $2b(z,t)-\sum\limits_{i=1}^{k} b_{ix_i}(z,t)-\sum\limits_{i=1}^{l} b_{iy_i}^0(z,t)\ \geq\ 0$ для майже всіх $(z,t)\in Q_T$, то можемо зробити підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності додатним. Права частина даної нерівності прамує до нуля при $t_0\to-\infty$. Тоді $u^1=u^2$ майже всюди в Q_T. Отже, розв'язок єдиний.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., Наука, 1964. – 443 с.

2. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини// Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.

3. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\vec{2b}$-параболічних систем довільного порядку// Мат. студії. – 2000. – Т. 14. – N 1. – С. 73-84.

4. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ, Ін-тут математики НАН України, 1999. – 176 с.

5. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $\vec{2b}$-параболические граничные задачи// Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – N 12. – С. 2212-2222.

6. *Балабушенко Т. М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування// Вісник національного ун-ту "Львівська політехніка". – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.

7. *Балабушенко Т. М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем// Мат. студії. – 2002. – Т. 17. – N 2. – С. 163-174.

8. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $\vec{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45. – N 4. – С. 19-26.

9. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем// Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 133. – N 1. – С. 40-43.

10. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\vec{2b}$-параболічних і $\vec{2b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера// Доповіді НА УРСР. – 1964. – N 8. – С. 1010-1013.

11. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\vec{2b}$-параболические системы// Труды семинара по функциональному анализу. – Киев. Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.

12. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$-параболических систем// Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 4. – С. 500-506.

13. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С. 7-12.

14. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\vec{2b}$-параболічні системи// Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С. 73-76.

15. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\vec{2b}$-параболічної системи// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці, ЧДУ. – 1999. – С. 13-18.

16. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, Рута. – 2000. – С. 5-10.

17. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18-22.

18. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем// Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех-мат. – 1999. – Вип 54. – С. 140-151.

19. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42. – N 3. – С. 61-65.

20. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52. – N 11. – С. 1484-1496.

21. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, Рута. – 2000. – С. 82-91.

22. *Гаевський Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.