УДК 517.95

©2007 р. Г. А. Снітко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, Львів

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для параболічного рівняння з невідомим залежним від часу коефіцієнтом при невідомій функції.

We establish conditions for the existence and uniqueness of solutions to inverse problems for a parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at unknown function.

В даній роботі досліджено обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при невідомій функції в параболічному рівнянні другого порядку загального вигляду з різними типами крайових умов та умов перевизначення. Для дослідження вказаної задачі застосовуються методи, один з яких базується на використанні функції Гріна для рівняння теплопровідності, а інший - функції Гріна для загального рівняння. Зазначимо, що в праці [1] досліджено обернені задачі для параболічного рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + q(t)u + f(x,t),$$
$$(x,t) \in (0,h) \times (0,T),$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$, $q(t)$ з умовами перевизначення, аналогічними до даної роботи. В [2, 3] розглянуто задачі визначення $q(t)$ в рівнянні, коли старший коефіцієнт відомий, $a(t) = 1$, а додаткові умови мали вигляд

$$u|_{x=x_0} = \psi(t), \quad x_0 \in (0,h),$$

$$\int\limits_0^{s(t)} u(x,t)dx = E(t),\ t \in [0,T],\ 0 < s(t) \le h,$$

відповідно.

В області $\Omega_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння з невідомим коефіцієнтом $c = c(t)$

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t), \quad (1)$$
$$(x,t) \in \Omega_T,$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,h], \qquad (2)$$

крайові умови та умову перевизначення

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T], \quad (3)$$

$$u(0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (4)$$

Будемо розглядати такі задачі:

Задача (A). Знайти функції $(c,u) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$, що задовольняють рівняння (1) та умови (2) - (4).

Задача (B). Знайти функції $(c,u) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$, що задовольняють рівняння (1), початкову умову (2), крайові умови (4),

$$u(h,t) = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (5)$$

та умову перевизначення

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (6)$$

1. Існування та єдиність розв'язку задачі (A).

Теорема 1. При виконанні умов:

A1) $\mu_i \in C^1[0,T],\ i = \overline{1,3}, \quad \varphi \in C^2[0,h],$
$a, b, f \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_T);$

A2) $a(x,t) > 0,\ (x,t) \in \overline{\Omega}_T, \quad \mu_3(t) \ne 0,$
$t \in [0,T];$

A3) $\varphi'(0)=\mu_1(0), \quad \varphi'(h)=\mu_2(0),$
$\varphi(0)=\mu_3(0)$

можна вказати число $t_1 : 0<t_1\leq T$, яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (A) існує при $(x,t)\in\overline{\Omega}_{t_1}$.

Доведення. Використовуючи рівняння (1) та умови (3), (4), зводимо задачу (A) до рівняння

$$c(t)=\frac{1}{\mu_3(t)}\Big[\mu_3'(t)-a(0,t)u_{xx}(0,t)-$$
$$-b(0,t)\mu_1(t)-f(0,t)\Big], \qquad (7)$$

де $u(x,t)$ - розв'язок прямої задачі (1)-(3). Зафіксуємо $y\in[0,h]$ і подамо рівняння (1) у вигляді

$$u_t=a(y,t)u_{xx}+(a(x,t)-a(y,t))u_{xx}+$$
$$+b(x,t)u_x+c(t)u+f(x,t). \qquad (8)$$

Позначимо

$$G_2(x,t,\xi,\tau;y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}}\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\right)\right),$$

$$\theta(t,y)=\int\limits_0^t a(y,\tau)d\tau.$$

Легко бачити, що $G_2(x,t,\xi,\tau;y)$ - функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$u_t=a(y,t)u_{xx}.$$

Пряма задача (8), (2), (3) у випадку довільної неперервної на $[0,T]$ функції $c(t)$ еквівалентна рівнянню

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau;y)\times$$
$$\times\Big((a(\xi,\tau)-a(y,\tau))u_{\xi\xi}(\xi,\tau)+b(\xi,\tau)u_\xi(\xi,\tau)+$$
$$+c(\tau)u(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau, \qquad (9)$$

де $u_0(x,t)$ визначається формулою

$$u_0(x,t)=\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0;y)\varphi(\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau;y)a(y,\tau)\mu_1(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau;y)a(y,\tau)\mu_2(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau;y)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Введемо позначення $u_x(x,t)=v(x,t)$, $u_{xx}(x,t)=w(x,t)$. Тоді (7), (9) перепишемо у вигляді

$$c(t)=\frac{1}{\mu_3(t)}\Big[\mu_3'(t)-a(0,t)w(0,t)-$$
$$-b(0,t)\mu_1(t)-f(0,t)\Big], \quad t\in[0,T], \qquad (10)$$

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau;y)\times$$
$$\times\Big((a(\xi,\tau)-a(y,\tau))w(\xi,\tau)+b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+$$
$$+c(\tau)u(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_T. \qquad (11)$$

Знайдемо другу похідну по x функції $u(x,t)$. Продиференціювавши (11) двічі по x і поклавши $y=x$, отримаємо

$$w(x,t)=w_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\times$$

$$\times(a(\xi,\tau)-a(x,\tau))w(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\Big(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+$$

$$+(b_\xi(\xi,\tau)+c(\tau))v(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau,\ (x,t)\in\overline{\Omega}_T,(12)$$

де $w_0(x,t)$ має вигляд

$$w_0(x,t)=\int_0^h G_2(x,t,\xi,0;x)\varphi''(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^t G_2(x,t,0,\tau;x)\mu_1'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t G_2(x,t,h,\tau;x)\mu_2'(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Зауважимо, що функцію $v(x,t)$ можна подати у вигляді

$$v(x,t)=\mu_1(t)+\int_0^x w(\xi,t)d\xi. \qquad (13)$$

Таким чином, враховуючи (13), задачу (A) зведено до системи рівнянь (10), (12) з невідомими $(c(t),w(x,t))$. Задача (A) та вказана система еквівалентні в тому сенсі, що, якщо пара функцій $(c(t),u(x,t))$ є розв'язком задачі (A), то $(c(t),w(x,t))$ є неперервним розв'язком системи (10), (12). Правильним є і обернене твердження: якщо $(c(t),w(x,t))$ є неперервним розв'язком системи (10), (12), то функції $(c(t),u(x,t))$ є розв'язком задачі (A). Припущення теореми дозволяють продиференціювати (11) двічі по x. Віднімаючи від отриманої рівності (12), одержимо $u_{xx}(x,t)=w(x,t)$. Тоді можемо зробити висновок, що $u(x,t)$ має потрібну гладкість і задовольняє рівняння (8) та умови (2), (3) для довільної неперервної на $[0,T]$ функції $c(t)$. Враховуючи це в (10), приходимо до умови (4). Отже, еквівалентність задачі (A) та системи рівнянь (10), (12) доведено.

Для дослідження системи (10), (12) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи. Позначимо

$$W(t)=\max_{x\in[0,h]}|w(x,t)|.$$

З (10) одержимо

$$|c(t)|\le C_1+C_2W(t). \qquad (14)$$

Використовуючи оцінки

$$|G_2(x,t,\xi,\tau;x)|\le C_3\left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\right),$$

$$\int_0^h|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)|d\xi\le\frac{C_4}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}},$$

$$\int_0^h|G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)||x-\xi|d\xi\le\frac{C_5}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}},$$

$$\theta(t,x)-\theta(\tau,x)\ge C_6(t-\tau),$$

з (12), враховуючи (13), (14), отримаємо

$$W(t)\le C_7+C_8\int_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Ввівши позначення $W_1(t)=W(t)+1$, останню нерівність подамо у вигляді

$$W_1(t)\le C_9+C_{10}\int_0^t\frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \qquad (15)$$

Метод роз'язування нерівності (15) подано в [4]. Таким чином, отримаємо оцінку

$$W(t)\le M_1<\infty,\qquad t\in[0,t_1],$$

де t_1, $0<t_1\le T$, визначається сталими C_9, C_{10}. Використовуючи встановлену оцінку, з (14) одержимо

$$|c(t)|\le C_{11}<\infty,\qquad t\in[0,t_1].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (10), (12) знайдено.

Подамо систему рівнянь (10), (12) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (c(t), w(x,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (10), (12). Позначимо

$$N = \{(c,w) \in C[0,t_1] \times C(\overline{\Omega}_{t_1}) :$$

$$|c(t)| \leq C_{11}, |w(x,t)| \leq M_1\}.$$

Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера. Доведення компактності оператора P проводиться аналогічно як і в [4].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок $(c(t), w(x,t))$ системи рівнянь (10), (12) з класу $C[0,t_1] \times C(\overline{\Omega}_{t_1})$, а, отже, і розв'язок задачі (A) $(c(t), u(x,t))$ з класу $C[0,t_1] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_{t_1})$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Припустимо, що виконуються умова A2) теореми 1 та $a, b \in H^{\alpha,0}(\overline{\Omega}_T)$. Тоді задача (A) не може мати більше одного розв'язку.

Доведення. Нехай $(c_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2,$ - два розв'язки задачі (A). Позначимо

$$c(t) = c_1(t) - c_2(t), \quad u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Функції $c(t), u(x,t)$ задовольняють задачу:

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c_1(t)u +$$

$$+c(t)u_2, \quad (x,t) \in \Omega_T, \qquad (16)$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \qquad (17)$$

$$u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (18)$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \qquad (19)$$

Використовуючи рівняння (16) та умови (18), (19), зводимо задачу (16)-(19) до рівняння стосовно $c(t)$

$$c(t) = -\frac{a(0,t)u_{xx}(0,t)}{\mu_3(t)}. \qquad (20)$$

За допомогою функції Гріна $G_2^*(x,t,\xi,\tau)$ другої крайової задачі для рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c_1(t)u \qquad (21)$$

з врахуванням умов (17), (18) функцію $u(x,t)$ подамо у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_2^*(x,t,\xi,\tau)c(\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Перепишемо рівняння (20) у вигляді

$$c(t) = \int_0^t K(t,\tau)c(\tau)d\tau, \qquad (22)$$

де

$$K(t,\tau) = -\frac{a(0,t)}{\mu_3(t)} \int_0^h G_{2xx}^*(0,t,\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi.$$

Отже, ми отримали однорідне рівняння Вольтери другого роду (22) з ядром, що має інтегровну особливість [5]. З єдиності розв'язків таких рівнянь випливає, що $c(t) = 0, \ t \in [0,T]$. Використовуючи це в задачі (16)-(18), знаходимо, що $u_1(x,t) = u_2(x,t), \ (x,t) \in \overline{\Omega}_T$.

Теорему 2 доведено.

2. Існування та єдиність розв'язку задачі (B).

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

$B1)$ $\mu_j \in C^1[0,T], \ j = \overline{3,5}, \quad \varphi \in C^2[0,h],$ $a \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_T), \quad b, f \in H^{\alpha,0}(\overline{\Omega}_T);$

$B2)$ $a(x,t) > 0, \ (x,t) \in \overline{\Omega}_T, \quad \mu_5(t) \neq 0,$ $t \in [0,T];$

$B3)$ $\varphi(0) = \mu_3(0), \quad \varphi(h) = \mu_4(0),$

$$\int_0^h \varphi(x)dx = \mu_5(0),$$

$$\mu_3'(0) = a(0,0)\varphi''(0) + b(0,0)\varphi'(0) +$$
$$+c(0)\varphi(0) + f(0,0),$$
$$\mu_4'(0) = a(h,0)\varphi''(h) + b(h,0)\varphi'(h) +$$
$$+c(0)\varphi(h) + f(h,0),$$

де

$$c(0) = \frac{1}{\mu_5(0)}\Big[\mu_5'(0) - \int_0^h (a(x,0)\varphi''(x) +$$

$$+b(x,0)\varphi'(x) + f(x,0))dx\Big].$$

Тоді можна вказати число $t_0 : 0 < t_0 \leq T$, яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (B) існує при $(x,t) \in \overline{\Omega}_{t_0}$.

Доведення. Ввівши нову функцію

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x) - \frac{x}{h}(\mu_4(t) - \mu_4(0)) +$$

$$+(\mu_3(t) - \mu_3(0))\left(\frac{x}{h} - 1\right),$$

задачу (B) зводимо до задачі з невідомими $(c(t), v(x,t))$:

$$v_t = a(x,t)v_{xx} + b(x,t)v_x + c(t)(v + d(x,t)) +$$

$$+F(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \quad (23)$$

$$v(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \qquad (24)$$

$$v(0,t) = v(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (25)$$

$$\int_0^h v(x,t)dx = \mu_6(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (26)$$

де $\quad d(x,t) = \varphi(x) + \dfrac{x}{h}(\mu_4(t) - \mu_4(0)) +$

$$+(\mu_3(t) - \mu_3(0))\left(1 - \frac{x}{h}\right),$$

$$F(x,t) = a(x,t)\varphi''(x) + b(x,t)\Big(\varphi'(x) +$$

$$+\frac{1}{h}(\mu_4(t) - \mu_4(0) - \mu_3(t) + \mu_3(0))\Big) +$$

$$+f(x,t) - \mu_3'(t)\left(1 - \frac{x}{h}\right) - \mu_4'(t)\frac{x}{h},$$

$$\mu_6(t) = \mu_5(t) - \mu_5(0) + \frac{h}{2}(\mu_3(0) -$$

$$-\mu_3(t) + \mu_4(0) - \mu_4(t)).$$

Замінимо задачу (23) - (26) еквівалентною системою рівнянь. Проінтегрувавши рівняння (23) від 0 до h за змінною x і використавши умову (26), одержимо

$$c(t) = \frac{1}{\mu_5(t)}\Big[\int_0^h (a_x(x,t) - b(x,t))v_x(x,t)dx -$$

$$-a(h,t)v_x(h,t) + a(0,t)v_x(0,t) + L(t)\Big], \qquad (27)$$

де

$$L(t) = \mu_5'(t) - \int_0^h \Big(a(x,t)\varphi''(x) + b(x,t)\Big(\varphi'(x) +$$

$$+\frac{1}{h}\Big(\mu_4(t) - \mu_4(0) - \mu_3(t) + \mu_3(0)\Big)\Big) + f(x,t)\Big)dx.$$

Тимчасово припустимо, що функція $c(t)$ відома. Тоді пряма задача (23)-(25) еквівалентна рівнянню

$$v(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(c(\tau)(v(\xi,\tau) +$$

$$+d(\xi,\tau)) + F(\xi,\tau))d\xi d\tau, \qquad (28)$$

де $G_1(x,t,\xi,\tau)$ - функція Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = a(x,t)v_{xx} + b(x,t)v_x.$$

Позначимо $v_x(x,t) = z(x,t)$ і рівняння (27) перепишемо у вигляді

$$c(t) = \frac{1}{\mu_5(t)}\Big[\int_0^h (a_x(x,t) - b(x,t))z(x,t)dx -$$

$$-a(h,t)z(h,t)+a(0,t)z(0,t)+L(t)\Bigg]. \quad (29)$$

Продиференціювавши (28) по x, отримаємо

$$z(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(c(\tau)(v(\xi,\tau)+$$

$$+d(\xi,\tau))+F(\xi,\tau))d\xi d\tau. \quad (30)$$

Зауважимо, що для функції $v(x,t)$, враховуючи (25), справджується рівність

$$v(x,t)=\int\limits_0^x z(\xi,t)d\xi. \quad (31)$$

Отже, беручи до уваги (31), задача (23) - (26) еквівалентна системі рівнянь (29), (30). Якщо пара функцій $(c(t),v(x,t))$ є розв'язком задачі (23) - (26), то $(c(t),z(x,t))$ є неперервним розв'язком системи (29), (30). І навпаки: якщо функції $(c(t),z(x,t))$ є неперервним розв'язком системи (29), (30), то функції $(c(t),v(x,t))$ є розв'язком задачі (23) - (26). Доведемо, що $(c,v)\in C[0,T]\times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$ і задовольняє задачу (23)-(26). Продиференціювавши рівність (28) по x і віднявши від отриманої рівності (30), одержимо $v_x(x,t)=z(x,t)$. Тоді можемо зробити висновок, що $v(x,t)$ має потрібну гладкість і задовольняє рівняння (23) та умови (24), (25) при довільній неперервній на [0,T] функції $c(t)$. Зведемо рівняння (29) до вигляду

$$c(t)\left(\mu_6(t)+\int\limits_0^h d(x,t)dx\right)=\mu_6'(t)-\int\limits_0^h(a(x,t)\times$$

$$\times u_{xx}(x,t)+b(x,t)u_x(x,t)+F(x,t))dx.$$

Враховуючи те, що функція $v(x,t)$ задовольняє рівняння (23), приходимо до умови (26).

Отже, еквівалентність задачі (23)-(26) і системи рівнянь (29), (30) доведено. Для дослідження системи (29), (30) використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Встановимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (29), (30).

Позначимо

$$Z(t)=\max_{x\in[0,h]}|z(x,t)|.$$

З (29) одержимо

$$|c(t)|\le C_{12}+C_{13}Z(t). \quad (32)$$

З (30), використовуючи (31), (32) та оцінки функції Гріна [6], отримаємо

$$Z(t)\le C_{14}+C_{15}\int\limits_0^t\frac{Z(\tau)+Z^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Останню нерівність зводимо до нерівності (15), метод роз'язування якої подано в [4]. Отже, отримаємо оцінку

$$Z(t)\le M_2<\infty, \qquad t\in[0,t_0],$$

де t_0, $0<t_0\le T$, визначається сталими C_{14}, C_{15}. Використовуючи вище встановлену оцінку, з (32) одержимо

$$|c(t)|\le C_{16}<\infty, \qquad t\in[0,t_0].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (29), (30) встановлено.

Подамо систему рівнянь (29), (30) у вигляді операторного рівняння

$$\nu=\rho\nu,$$

де $\nu=(c(t),z(x,t))$, а оператор ρ визначається правими частинами рівнянь (29), (30). Позначимо

$$M=\{(c,z)\in C[0,t_0]\times C(\overline{\Omega}_{t_0}):$$

$$|c(t)|\le C_{16},|z(x,t)|\le M_2\}.$$

Множина M задовольняє умови теореми Шаудера. Доведення цілком неперервності операторів, що утворюють ρ, проведемо на прикладі оператора ρ_2, де ρ_2 визначається правою частиною (30). Покажемо, що множина $\rho_2 M$ є компактною в $C(\overline{\Omega}_{t_0})$, або, згідно з теоремою Асколі-Арцела, $\rho_2 M$ є рівномірно обмеженою і одностайно неперервною.

Легко бачити, що множина $\rho_2 M$ є рівномірно обмеженою. Встановимо одностайну неперервність множини $\rho_2 M$. Для цього задамо $\varepsilon > 0$ і розглянемо різницю

$$\Delta = \left| \int_0^{t_2} \int_0^h G_{1x}(x_2, t_2, \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_1} \int_0^h G_{1x}(x_1, t_1, \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right|$$

з довільними точками $(x_i, t_i) \in \overline{\Omega}_{t_0}$, $i = 1, 2$, $(x_1, t_1) \neq (x_2, t_2)$.

Очевидно, що

$$\Delta \leq \left| \int_0^{t_2} \int_0^h (G_{1x}(x_2, t_2, \xi, \tau) - G_{1x}(x_1, t_2, \xi, \tau)) \times \right.$$

$$\left. \times F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| + \left| \int_0^{t_2} \int_0^h G_{1x}(x_1, t_2, \xi, \tau) \times \right.$$

$$\times F(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_0^{t_1} \int_0^h G_{1x}(x_1, t_1, \xi, \tau) \times$$

$$\left. \times F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Оцінимо перший доданок, зробивши заміну змінних $t_2 - \tau = \sigma$:

$$\Delta_1 \leq C_{17} \int_0^{t_2} \int_0^h |G_{1x}(x_2, t_2, \xi, t_2 - \sigma) -$$

$$- G_{1x}(x_1, t_2, \xi, t_2 - \sigma)| d\xi d\sigma.$$

Згідно з оцінками функції Гріна [6], для заданого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\bar{t} > 0$, що

$$\int_0^t \int_0^h |G_{1x}(x, t, \xi, \tau)| d\xi d\tau < \frac{\varepsilon}{6C_{17}}, \qquad (33)$$

коли $0 < t < \bar{t}$.

Якщо $t_2 \leq \bar{t}$, то з (33) маємо $\Delta_1 < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Якщо ж $t_2 > \bar{t}$, то, розбиваючи інтеграл на суму двох інтегралів і застосовуючи (33), отримуємо

$$\Delta_1 \leq \frac{\varepsilon}{3} + C_{17} \int_{\bar{t}}^{t_2} \int_0^h |G_{1x}(x_2, t_2, \xi, t_2 - \sigma) -$$

$$- G_{1x}(x_1, t_2, \xi, t_2 - \sigma)| d\xi d\sigma \leq \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$+ C_{17} \int_{\bar{t}}^{t_2} \int_0^h \left| \int_{x_1}^{x_2} G_{1xx}(x, t_2, \xi, t_2 - \sigma) dx \right| d\xi d\sigma.$$

Звідси, використовуючи оцінки функції Гріна [6], маємо

$$\Delta_1 \leq \frac{\varepsilon}{3} + C_{18} |x_2 - x_1|.$$

Вибираючи $\delta_1 < \dfrac{\varepsilon}{6C_{18}}$, встановлюємо оцінку $\Delta_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, коли $|x_2 - x_1| < \delta_1$.

Вважаючи для визначеності $t_2 > t_1$, оцінимо другий доданок

$$\Delta_2 \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^h G_{1x}(x_1, t_2, \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{t_1} \int_0^h (G_{1x}(x_1, t_2, \xi, \tau) - G_{1x}(x_1, t_1, \xi, \tau)) \times \right.$$

$$\left. \times F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}.$$

Використовуючи оцінки функції Гріна [6], робимо висновок про існування такого $\delta_2 > 0$, що $\Delta_{2,1} < \dfrac{\varepsilon}{6}$ при $|t_2 - t_1| < \delta_2$.

Для оцінки $\Delta_{2,2}$ зробимо заміну змінних $t_1 - \tau = \sigma$:

$$\Delta_{2,2} \leq C_{17} \int_0^{t_1} \int_0^h (G_{1x}(x_1, t_2, \xi, t_1 - \sigma) -$$

$$- G_{1x}(x_1, t_1, \xi, t_1 - \sigma)| d\xi d\sigma.$$

Беручи до уваги (33), приходимо до висновку про існування такого $\bar{t} > 0$, що $\Delta_{2,2} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при $t_1 \leq \bar{t}$, $t_2 \leq \bar{t}$. У випадку $t_1 > \bar{t}$ маємо

$$\Delta_{2,2} \leq \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$+C_{26}\int\limits_{\bar t}^{t_1}\int\limits_0^h\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}G_{1xt}(x_1,t,\xi,t_1-\sigma)dt\right|d\xi\,d\sigma.$$

Звідси слідує існування такого $\delta_3>0$, що при $|t_2-t_1|<\delta_3$ матимемо $\Delta_{2,2}<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Таким чином, $\Delta_2<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Об'єднуючи отримані оцінки, одержимо $\Delta<\varepsilon$.

За теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок $(c(t),z(x,t))$ системи рівнянь (29), (30) з класу $C[0,t_0]\times C(\overline{\Omega}_{t_0})$. З еквівалентності системи рівнянь (29), (30) і задачі (23)-(26) випливає, що існує розв'язок задачі (23)-(26), а, отже, і розв'язок задачі (В) $(c(t),u(x,t))$ з класу $C[0,t_0]\times C^{2,1}(\overline{\Omega}_{t_0})$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. При виконанні умови В2) теореми 3 та $a,b\in H^{\alpha,0}(\overline{\Omega}_T)$ розв'язок задачі (В) єдиний.

Доведення. Нехай $(c_i(t),u_i(x,t)),i=1,2,$ - два розв'язки задачі (В). Позначимо

$$c(t)=c_1(t)-c_2(t),\quad u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t).$$

Функції $c(t),u(x,t)$ задовольняють рівняння (16) та умови (17), (19),

$$u(h,t)=0,\quad t\in[0,T],\tag{34}$$

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx=0,\quad t\in[0,T].\tag{35}$$

Проінтегрувавши рівняння (16) від 0 до h за змінною x та використавши умову (35), одержимо

$$c(t)=\frac{1}{\mu_5(t)}\Bigg[\int\limits_0^h(a_x(x,t)-b(x,t))u_x(x,t)dx-$$

$$-a(h,t)u_x(h,t)+a(0,t)u_x(0,t)\Bigg].\tag{36}$$

Використовуючи функцію Гріна $G_1^*(x,t,\xi,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння (21) та умови (17), (19), (34), функцію $u(x,t)$ подамо у вигляді

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1^*(x,t,\xi,\tau)c(\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Підставляючи це в (36), отримаємо однорідне рівняння Вольтери другого роду з ядром, що має інтегровну особливість. З єдиності розв'язків таких рівнянь маємо $c(t)=0$, $t\in[0,T]$. Використовуючи це в задачі (16), (17), (19), (34), одержимо, що $u_1(x,t)=u_2(x,t),\quad(x,t)\in\overline{\Omega}_T$.

Теорему 4 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пабирівська Н. В. *Багатопараметричні коефіцієнтні обернені задачі для рівнянь параболічного типу*: Дис. на здобуття наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук.- Львів, 2001.
2. Мамаюсупов О. Ш. *Об определении коэффициента параболического уравнения* // Исслед. по интдифф. уравн. - Вып. 22. - Фрунзе. - 1989. - С. 157 - 160.
3. Cannon J. R., Lin Y., Wang S. *Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation* // J. Austral. Math. Soc. Ser. B.- 1991.- V.33.- P. 149 - 163.
4. Ivanchov M. *Inverse problems for equations of parabolic type*.- VNTL Publishers, 2003.
5. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа*.- М.: Мир, 1968.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*.- М.: Наука, 1967.