УДК 517.9

©2007 р. **В. Ю. Слюсарчук**

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ОБМЕЖЕНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Наведено твердження про обмежені розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь.

We obtain statements on bounded solutions of nonlinear differential equations.

Нехай $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел і E – дійсний повний скінченновимірний евклідовий простір зі скалярним добутком (x, y). Норма в E вводиться за допомогою рівності

$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}.$$

Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, E)$ банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через $C^1(\mathbb{R}, E)$ – банахів простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, похідна кожної з яких є елементом простору $\in C^0(\mathbb{R}, E)$, з нормою

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)} = \max\left\{ \|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \right\}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $f : E \longrightarrow E$ – неперервний обмежений оператор і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, та диференціальний оператор $L : C^1(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається рівністю

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Наведемо умови існування обмежених розв'язків диференціального рівняння (1) та оборотності оператора L.

1. Умови A і B.

Використовуватимемо наступні умови.

Умова A. *Справджується співвідношення*

$$\underline{\lim}_{\|x\|_E\to+\infty} \frac{(f(x),x)}{\|x\|_E} = +\infty \tag{3}$$

або

$$\overline{\lim}_{\|x\|_E\to+\infty} \frac{(f(x),x)}{\|x\|_E} = -\infty. \tag{4}$$

Умова B. *Справджується нерівність*

$$(f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2) \neq 0,$$

якщо $x_1 \neq x_2$.

2. Оцінка норми періодичного розв'язку.

Вважатимемо, що виконується умова A.

Для кожного числа $a \geq 0$ розглянемо множину

$$\Omega_a(f) = \{x \in E : |(f(x), x)| \leq a\|x\|_E\},$$

що завдяки умові A є обмеженою, і величину

$$\omega_a(f) = \sup_{x\in\Omega_a(f)} \|x\|_E.$$

Очевидно, що для кожного $a \geq 0$

$$\omega_a(f) < +\infty.$$

Лема 1. *Нехай виконується умова A і рівняння (1), де $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, має періодичний розв'язок $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$.*

Тоді

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f). \tag{5}$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y(t)) \equiv h(t),$$

то

$$\left(\frac{dy(t)}{dt}, y(t)\right) + (f(y(t)), y(t)) \equiv (h(t), y(t))$$

і, отже,

$$\frac{1}{2}\frac{d(y(t), y(t))}{dt} + (f(y(t)), y(t)) \equiv (h(t), y(t)).$$

Завдяки періодичності функції $(y(t), y(t))$ існує точка $t^* \in \mathbb{R}$, в якій ця функція досягає найбільше значення. Тоді на підставі диференційовності функції $(y(t), y(t))$

$$\left.\frac{d(y(t), y(t))}{dt}\right|_{t=t^*} = 0.$$

Тому

$$(f(y(t^*)), y(t^*)) = (h(t^*), y(t^*)).$$

Звідси та нерівності Коші–Буняковського [1] отримуємо, що

$$|(f(y(t^*)), y(t^*))| \le \|h(t^*)\|_E \|y(t^*)\|_E \le$$

$$\le \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \|y(t^*)\|_E.$$

Тому виконується нерівність (5).

Лему 1 доведено.

3. Існування періодичних розв'язків. Позначимо через $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ банахів простір всіх T-періодичних елементів простору $C^0(\mathbb{R}, E)$ з нормою $\|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R},E)}$.

Теорема 1. *Нехай*:

(I) *виконується умова* A;

(II) $h \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$.

Тоді диференціальне рівняння (1) *має розв'язок* $y \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$, *для якого*

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f).$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли виконується співвідношення (3).

Візьмемо довільні числа числа M_1 і M_2, для яких

$$M_2 > M_1 > \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f) \tag{6}$$

і

$$\inf_{\|x\|_E \ge M_1} (f(x), x) >$$

$$> \sup_{\|x\|_E \le \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)} (f(x), x). \tag{7}$$

Використаємо неперервний оператор $g : E \longrightarrow E$, що визначається рівністю

$$g(x) =$$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{якщо } \|x\|_E \le M_1, \\ F(x), & \text{якщо } M_1 < \|x\|_E \le M_2, \\ kx, & \text{якщо } \|x\|_E > M_2, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$F(x) = \frac{M_2 - \|x\|_E}{M_2 - M_1} f\left(\frac{M_1}{\|x\|_E} x\right) +$$

$$+ \frac{\|x\|_E - M_1}{M_2 - M_1}\left(\frac{M_2 k}{\|x\|_E} x\right)$$

і

$$k = \max\left\{\sup_{M_1 \le \|x\|_E \le M_2} \frac{\|f(x)\|_E}{\|x\|_E}, 1\right\},$$

а також диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) = h(t), \ t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Легко перевірити, що рівняння (9) рівносильне інтегральному рівнянню

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}(kx(s) - g(x(s)) + h(s))ds. \tag{10}$$

Розглянемо оператор

$$(\mathfrak{B}y)(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}(ky(s) - g(y(s)) + h(s))ds,$$

що діє із $C^0(\mathbb{R}, E)$ в $C^1(\mathbb{R}, E)$, і опуклу обмежену замкнену множину

$$B_R = \{x \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E) : \|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le R\},$$

де

$$R = \sup_{x \in E} \|kx - g(x)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}.$$

Множина B_R обмежена, оскільки

$$kx - g(x) = 0,$$

якщо

$$\|x\|_E \geq M_2,$$

і завдяки неперервності $kx - g(x)$ на E і скінченній розмірності простору E

$$\sup_{x\in E} \|kx - g(x)\|_E < +\infty.$$

Оператор $\mathfrak{B}$ має властивості:

(1) цей оператор неперервний;

(2) $\mathfrak{B}B_R \subset B_R \cap C^1(\mathbb{R}, E)$;

(3) множина $\mathfrak{B}B_R$ передкомпактна в просторі $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ (завдяки скінченній розмірності простору E та лемі Арцела–Асколі [1]).

Завдяки теоремі Шаудера про нерухому точку [2] оператор $\mathfrak{B}$ має нерухому точку $y^* \in B_R$. Ця точка є розв'язком рівнянь (10) і (9). За лемою 1

$$\|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(g).$$

Оскільки на підставі (6) – (8)

$$\omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(g) = \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)$$

і тому

$$g(y^*(t)) \equiv f(y^*(t)),$$

то розв'язок y^* рівняння (9) також є розв'язком рівняння (1).

Отже, у випадку, коли виконується співвідношення (3), теорему доведено.

Випадок, коли виконується співвідношення (4), заміною t на $-t$ зводиться до розглянутого випадку.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай*:

(I) *виконується умова* A;

(II) $(f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2) \neq 0$, *якщо* $x_1 \neq x_2$.

Тоді для кожного $h \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ *диференціальне рівняння* (1) *має єдиний розв'язок* $y \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$.

Доведення. Припустимо, що функції $y_i, y_2 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ є розв'язками рівняння (1) і

$$y_1 \neq y_2. \tag{11}$$

Тоді

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + f(y_1(t)) \equiv \frac{dy_2(t)}{dt} + f(y_2(t))$$

і, отже,

$$\frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv f(y_1(t)) - f(y_2(t)).$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{2}\frac{d(y_2(t) - y_1(t), y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv$$

$$\equiv -(f(y_2(t)) - f(y_1(t)), y_2(t) - y_1(t)). \tag{12}$$

Оскільки функція $(y_2(t) - y_1(t), y_2(t) - y_1(t))$ є диференційовною і T-періодичною, то існує точка $t^* \in \mathbb{R}$, в якій ця функція досягає найбільше значення, причому

$$(y_2(t^*) - y_1(t^*), y_2(t^*) - y_1(t^*)) > 0 \tag{13}$$

завдяки (11) і

$$\left.\frac{d(y_2(t) - y_1(t), y_2(t) - y_1(t))}{dt}\right|_{t=t^*} = 0.$$

Тоді на підставі (12)

$$(f(y_2(t^*)) - f(y_1(t^*)), y_2(t^*) - y_1(t^*)) = 0.$$

Це співвідношення разом із (13) суперечить умові (II) теореми.

Отже, припущення, що рівняння (1) має більше, ніж один T-періодичний розв'язок, хибне.

Теорему 2 доведено.

4. Локально збіжні послідовності.

Говоритимемо, що послідовність функцій $x_k \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, локально збігається до функції $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ при $k \to +\infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\cdot,\ C^0(\mathbb{R},E)} x \quad k \to +\infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\leq p} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$$

для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Аналогічно послідовність функций $x_k \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, локально збігається до функції $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ при $k \to +\infty$:

$$x_k \xrightarrow{\cdot,\ C^1(\mathbb{R},E)} x \quad k \to +\infty,$$

якщо

$$\sup_{k\geq 1} \|x_k\|_{C^1(\mathbb{R},E)} < +\infty$$

і для кожного $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\leq p} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\leq p} \left\| \frac{dx_k(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right\|_E = 0.$$

Далі розглянемо в просторах $C^0(\mathbb{R}, E)$ і $C^1(\mathbb{R}, E)$ замкнені кулі

$$S_r^i = \{x : \|x\|_{C^i(\mathbb{R},E)} \leq r\},\ i = \overline{0,1}.$$

Важливим для подальшого є наступне твердження.

Лема 3. *Для кожної послідовності функцій $x_n \in S_r^0 \cap S_R^1$, $n \in \mathbb{N}$, де r і R – довільні додатні числа, існують такі строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_k, $k \in \mathbb{N}$, і функція $x \in S_r^0$, що*

$$x_{n_k} \xrightarrow{\cdot,\ C^0(\mathbb{R},E)} x \quad k \to +\infty.$$

Доведення. З умов леми випливає, що функції $x_n = x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, рівномірно обмежені і одностайно неперервні на $\mathbb{R}$. Тому на підставі теореми Арцела–Асколі [1] та скінченної розмірності простору E існують такі підпослідовності

$$x_{n_{1,1}}, x_{n_{1,2}}, \ldots, x_{n_{1,p}}, \ldots,$$

$$x_{n_{2,1}}, x_{n_{2,2}}, \ldots, x_{n_{2,p}}, \ldots,$$

$$\vdots$$

$$x_{n_{m,1}}, x_{n_{m,2}}, \ldots, x_{n_{m,p}}, \ldots,$$

$$\vdots$$

послідовності $x_n,\ n \in \mathbb{N}$, що:

(1) послідовності чисел $n_{l,p},\ p \in \mathbb{N}$, є строго зростаючими для кожного $l \in \mathbb{N}$ і

$$\{n_{1,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{n_{2,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots \supset$$

$$\supset \{n_{m,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots;$$

(2) для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність $x_{n_{m,p}}(t), p \in \mathbb{N}$, є рівномірно збіжною на $[-m, m]$.

Тоді діагональна послідовність

$$x_{n_{1,1}}, x_{n_{2,2}}, \ldots, x_{n_{p,p}}, \ldots$$

буде рівномірно збіжною на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і тому функція

$$x(t) = \lim_{p\to\infty} x_{n_{p,p}}(t),\ t \in \mathbb{R},$$

буде неперервною і, очевидно, $x \in S_r^0$. Звідси випливає, що

$$x_{n_{p,p}} \xrightarrow{\cdot,\ C^0(\mathbb{R},E)} x \quad p \to +\infty.$$

Лему 3 доведено.

Зазначимо, що у випадку $E = \mathbb{R}$ лему 3 наведено в [3].

5. c-Неперервні оператори.

Оператор $F : C^i(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, де $i, j \in \{0, 1\}$, називатимемо c-неперервним, якщо для довільних функції $x \in X$ і послідовності $x_k \in X,\ k \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\cdot,\ X} x \quad k \to \infty,$$

випливає, що

$$Fx_k \xrightarrow{\cdot,\ Y} Fx \quad k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора уведено в розгляд Е. Мухамадієвим [4]. Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $A : C^0(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ називається c-неперервним за Мухамадієвим, якщо для довільних числа $\varepsilon > 0$ і відрізка $[a, b]$ існують такі число $\delta > 0$ і відрізок $[c, d]$, що справджується нерівність

$$\|(Ax)(t)\|_E < \varepsilon \quad \text{і } t \in [a, b]$$

для кожного елемента $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, для якого

$$\|x(t)\|_E < \delta \quad \text{і } t \in [c, d]$$

і

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = 1.$$

Означення c-неперервного оператора, що використовує локально збіжні послідовності, належить автору.

Прикладом c-неперервного оператора, що діє із $C^1(\mathbb{R}, E)$ в $C^0(\mathbb{R}, E)$, є, очевидно, оператор L, що визначається рівністю (2). Цей оператор, очевидно, також є неперервним.

Зазначимо, що не кожний нелінійний неперервний оператор є c-неперервним і не кожний c-неперервний оператор є неперервним [5].

6. Існування обмежених розв'язків.

Твердження, аналогічне теоремі 1, також справджується у випадку $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Теорема 3. *Нехай*:

(I) *виконується умова* A;

(II) $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Тоді рівняння (1) *має хоча б один розв'язок* $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$, *для якого*

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f) \tag{14}$$

і

$$\left\|\frac{dy}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq$$
$$\leq \sup_{\|x\|_E \leq \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)} \|f(x)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $(T_n)_{n\geq 1}$ – довільна строго зростаюча послідовність додатних чисел, для якої

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty.$$

Використаємо такі елементи $h_n \in \mathcal{P}_{T_n}(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, щоб

$$\|h_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \tag{16}$$

і

$$h_n \xrightarrow{\cdot,\ C^0(\mathbb{R},E)} h \quad n \to +\infty. \tag{17}$$

Елементи з такими властивостями існують завдяки умові (II). На підставі (16), умови (I) теореми та твердженню теореми 1 існують такі функції $y_n \in \mathcal{P}_{T_n}(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, що

$$\frac{dy_n(t)}{dt} + f(y_n(t)) =$$
$$= h_n(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

і

$$\|y_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \omega_{\|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f),\ n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

Завдяки неперервності оператора f, скінченній розмірності простору E та співвідношенням (16), (18) і (19)

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}} \left|\frac{dy_n(t)}{dt}\right| < +\infty.$$

Тому за лемою 3 (тутураховано також співвідношення (19)) для деякої строго зростаючої послідовності $(n_k)_{k\geq 1}$ натуральних чисел та елемента $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$

$$y_{n_k} \xrightarrow{\cdot,\ C^0(\mathbb{R},E)} y \quad k \to +\infty. \tag{20}$$

Використаємо співвідношення

$$y_n(t) - y_n(0) + \int_0^t f(y_n(s))ds =$$
$$= \int_0^t h_n(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

що випливають із (18). Звідси на підставі (17), (20) та неперервності оператора f отримуємо

$$y(t) - y(0) + \int_0^t f(y(s))ds =$$
$$= \int_0^t h(s)ds,\ t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Функції $\int_0^t f(y(s))ds$ і $\int_0^t h(s)ds$ є диференційовними, оскільки підінтегральні функції неперервні. Тому аналогічну властивість має функція $y(t)$ і на підставі (21)

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Звідси, з обмеженості та неперервності функцій $f(y(t))$ і $h(t)$ випливає, що

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{dy(t)}{dt}\right| < +\infty.$$

Отже, $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Нерівність (14) випливає із (19) і (20).

Нерівність (15) випливає із (14) і (22).

Теорему 3 доведено.

7. Умови єдиності обмежених розв'язків.

Спочатку наведемо допоміжні твердження.

Лема 4. *Нехай:*

(I) *оператор* $g : E \longrightarrow E$ *неперервний;*

(II) $(g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2) > 0$, *якщо* $x_1 \neq x_2$.

Тоді для довільних чисел $r > 0$ *і* $R > 0$ $(r < R)$ *існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що*

$$\inf_{\substack{r\le\|x_1-x_2\|_E\\ \|x_1\|_E\le R,\ \|x_2\|_E\le R}} (g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2) \geq \varepsilon.$$

Доведення. Припустимо, що твердження леми хибне. Тоді існують послідовності $(u_n)_{n\geq1}$ і $(v_n)_{n\geq1}$, для яких

$$\|u_n\|_E \leq R,\ n \geq 1,$$

$$\|v_n\|_E \leq R,\ n \geq 1,$$

$$\|u_n - v_n\|_E \geq r,\ n \geq 1,$$

і

$$\lim_{n\to+\infty}(g(u_n) - g(v_n), u_n - v_n) = 0. \qquad (23)$$

Завдяки скінченній розмірності простору E та обмеженості послідовностей $(u_n)_{n\geq1}$ і $(v_n)_{n\geq1}$ існують строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k\geq1}$ натуральних чисел та вектори $u, v \in E$, для яких

$$\|u\|_E \leq R,$$

$$\|v\|_E \leq R,$$

$$\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = u, \qquad (24)$$

$$\lim_{k\to+\infty} v_{n_k} = v \qquad (25)$$

і

$$\|u - v\|_E \geq r.$$

Тому на підставі умови (I) та співвідношень (23), (24) і (25)

$$(g(u) - g(v), u - v) = 0,$$

що суперечить умові (II) леми.

Отже, твердження леми не є хибним.

Лему 4 доведено.

Аналогічним чином встановлюється

Лема 5. *Нехай:*

(I) *оператор* $g : E \longrightarrow E$ *неперервний;*

(II) $(g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2) < 0$, *якщо* $x_1 \neq x_2$.

Тоді для довільних чисел $r > 0$ *і* $R > 0$ $(r < R)$ *існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що*

$$\sup_{\substack{r\le\|x_1-x_2\|_E\\ \|x_1\|_E\le R,\ \|x_2\|_E\le R}} (g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2) \leq -\varepsilon.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* A *і* B.

Тоді для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ *рівняння* (1) *має єдиний розв'язок* $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Доведення. Зазначимо, що завдяки теоремі 3 та умові A множина обмежених розв'язків рівняння (1) є непорожньою.

Припустимо, що функції $y_i, y_2 \in C^1(\mathbb{R}, E)$ є розв'язками рівняння (1) і

$$y_1 \neq y_2. \qquad (26)$$

Тоді

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + f(y_1(t)) \equiv \frac{dy_2(t)}{dt} + f(y_2(t))$$

і, отже,

$$\frac{d(y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv f(y_1(t)) - f(y_2(t)).$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d(y_2(t) - y_1(t), y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv$$

$$\equiv -2(f(y_2(t)) - f(y_1(t)), y_2(t) - y_1(t)). \quad (27)$$

Візьмемо довільну точку $t^* \in \mathbb{R}$, для якої

$$(y_2(t^*) - y_1(t^*), y_2(t^*) - y_1(t^*)) > 0. \qquad (28)$$

Така точка існує на підставі (26). Жодна з таких точок не може бути для функції $(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))$ точкою екстремуму, бо тоді

$$\left.\frac{d(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))}{dt}\right|_{t=t^*}=0$$

і тому на підставі (27)

$$(f(y_2(t^*))-f(y_1(t^*)), y_2(t^*)-y_1(t^*))=0,$$

що суперечить умові B.

Отже, якщо справджується співвідношення (28), то

$$\left.\frac{d(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))}{dt}\right|_{t=t^*}\neq 0.$$

Тому функція $(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))$ є строго зростаючою на $[t^*, +\infty)$ або є строго спадною на $(-\infty, t^*]$. Тоді

$$(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))>$$

$$>(y_2(t^*)-y_1(t^*), y_2(t^*)-y_1(t^*))>0 \quad (29)$$

для всіх $t>t^*$ або

$$(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))>$$

$$>(y_2(t^*)-y_1(t^*), y_2(t^*)-y_1(t^*))>0 \quad (30)$$

для всіх $t<t^*$.

Використаємо числа

$$R=\max\{\|y_1\|_E, \|y_2\|_E\}$$

і

$$r=\|y_2(t^*)-y_1(t^*)\|_E.$$

У випадку виконання співвідношення (29) існує таке число $\varepsilon>0$ (на підставі леми 4), що справджуватиметься нерівність

$$-2(f(y_2(t))-f(y_1(t)), y_2(t)-y_1(t))\geq\varepsilon$$

для всіх $t\geq t^*$. Тоді завдяки (27) для всіх $t\geq t^*$

$$(y_2(t)-y_1(t), y_2(t)-y_1(t))\geq$$

$$\geq(y_2(t^*)-y_1(t^*), y_2(t^*)-y_1(t^*))+\varepsilon(t-t^*).$$

Це співвідношення суперечить тому, що

$$\max\{\|y_1\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \|y_2\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\}<+\infty.$$

До аналогічної суперечності приходимо у випадку виконання співвідношення (30) (тут потрібно використовувати лему 5).

Теорему 4 доведено.

8. Умови оборотності оператора L.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови A і B.*

Тоді оператор $L: C^1(\mathbb{R},E)\longrightarrow C^0(\mathbb{R},E)$ має обернений обмежений неперервний і c-неперервний оператор.

Доведення. Оператор L має обернений оператор L^{-1} на підставі теореми 4.

Обернений оператор L^{-1} є обмеженим завдяки нерівностям (14) і (15).

Покажемо c-неперервність цього оператора. Припустимо, що ця властивість для L^{-1} не виконується. Тоді існують елементи $h\in C^0(\mathbb{R},E)$, $y\in C^1(\mathbb{R},E)$, $h_n\in C^0(\mathbb{R},E)$, $y_n\in C^1(\mathbb{R},E)$, $n\in\mathbb{N}$, відрізок $[a,b]$ і число $\varepsilon>0$, для яких

$$\frac{dy(t)}{dt}+f(y(t))=h(t),\ t\in\mathbb{R}, \quad (31)$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt}+f(y_n(t))=h_n(t),\ t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}, \quad (32)$$

$$h_n \xrightarrow{c,\ C^0(\mathbb{R},E)} h \quad n\to+\infty \quad (33)$$

і

$$\max_{t\in[a,b]}\left(\left|\frac{dy_n(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right|+\right.$$

$$\left.+|y_n(t)-y(t)|\right)\geq\varepsilon,\ n\in\mathbb{N}. \quad (34)$$

Послідовність $(h_n)_{n\geq1}$ є обмеженою (на підставі (33)). Тому завдяки обмеженості оператора L^{-1} послідовність $(x_n)_{n\geq1}$ також є обмеженою (у просторі $C^1(\mathbb{R},E)$). За лемою 3 існують функція $y^*\in C^0(\mathbb{R},E)$ і строго зростаюча послідовність $(n_k)_{n\geq1}$ натуральних чисел, для яких

$$y_{n_k} \xrightarrow{c,\ C^0(\mathbb{R},E)} y^* \quad k\to+\infty. \quad (35)$$

Оскільки на підставі (32)

$$y_{n_k}(t)-y_{n_k}(0)+\int_0^t f(y_{n_k}(s))ds=$$

$$= \int_0^t h_{n_k}(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

то завдяки (33), (35), неперервності оператора f та скінченній розмірності простору E

$$y^*(t) - y^*(0) + \int_0^t f(y^*(s))ds =$$

$$= \int_0^t h(s)ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо співвідношення

$$\frac{dy^*(t)}{dt} + f(y^*(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R},$$

і включення $y^* \in C^1(\mathbb{R}, E)$, що суперечать оборотності оператора L^{-1}, оскільки завдяки співвідношенням (31) – (34) та неперервності відображення $f : E \longrightarrow E$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \max_{t\in[a,b]} |y_n(t) - y(t)| > 0$$

і тому

$$y^* \neq y.$$

Отже, оператор L^{-1} є c-неперервним.

Покажемо неперервність оператора L^{-1}. Припустимо, що ця властивість для оператора L^{-1} не виконується. Ўснують елементи $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $h_n \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $y_n \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, і число $\gamma > 0$, для яких справджуються співвідношення (31), (32),

$$\lim_{n\to+\infty} \|h_n - h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = 0 \tag{36}$$

і

$$\|y_n - y\|_{C^1(\mathbb{R},E)} \geq \gamma,\ n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Послідовність $(h_n)_{n\geq1}$ є обмеженою (на підставі (36)). Тому завдяки обмеженості оператора L^{-1} для деякого числа $R > 0$

$$\sup_{n\geq1} \|y_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq R. \tag{38}$$

Вважатимемо, що також

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq R. \tag{39}$$

Завдяки співвідношенням (31), (32), (36) і (37) та неперервності відображення f існують такі число $r > 0$ і числова послідовність $(t_n)_{n\geq1}$, що

$$\|y_n(t_n) - y(t_n)\|_E \geq r,\ n \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що виконується співвідношення (3). За лемою 4 існує число $\varepsilon > 0$, для якого

$$\inf_{\substack{r\leq\|x_1-x_2\|_E \\ \|x_1\|_E\leq R,\ \|x_2\|_E\leq R}} (f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2) \geq \varepsilon.$$

Виберемо натуральне число n^* так, щоб

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |(h_{n^*}(t) - h(t), y_{n^*}(t) - y(t))| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{40}$$

Таке число існує на підставі (36), (38) і (39).

Оскільки завдяки (31) і (32)

$$\frac{d(y_{n^*}(t) - y(t), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt} +$$

$$+2(f(y_{n^*}(t)) - f(y(t)), y_{n^*}(t) - y(t)) \equiv$$

$$\equiv 2(h_{n^*}(t) - h(t), y_{n^*}(t) - y(t)),$$

то на підставі (38) – (40)

$$\left.\frac{d(y_{n^*}(t) - y(t), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt}\right|_{t=t_{n^*}} \leq -\varepsilon.$$

Із цієї нерівності та неперервності функцій $y_{n^*}(t)$, $y(t)$, $h_{n^*}(t)$, $h(t)$ на $(-\infty, t_{n^*}]$ і відображення f на E випливає, що функція $(y_{n^*}(t) - y(t), y_{n^*}(t) - y(t))$ є строго спадною на деякому проміжку $[T, t_{n^*}]$. Не існує такого числа $T < t_{n^*}$, щоб

$$\left.\frac{d(y_{n^*}(t) - y(t), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt}\right|_{t=T} = 0$$

і

$$\frac{d(y_{n^*}(t) - y(t), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt} < 0$$

для всіх $t \in (T, t_{n^*}]$, оскільки тоді

$$\varepsilon \leq (f(y_{n^*}(T)) - f(y(T)), y_{n^*}(T) - y(T)) =$$

$$= (h_{n^*}(T) - h(T), y_{n^*}(T) - y(T)) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

що неможливо. З наведених міркувань отримуємо, що функція $(y_{n^*}(t)-y(t), y_{n^*}(t)-y(t))$ є строго спадною на проміжку $(-\infty, t_{n^*}]$. Тоді

$$\frac{d(y_{n^*}(t)-y(t), y_{n^*}(t)-y(t))}{dt} \leq -\varepsilon$$

для всіх $t < t_{n^*}$. Звідси випливає, що

$$(y_{n^*}(t)-y(t), y_{n^*}(t)-y(t)) \geq$$

$$\geq (y_{n^*}(t_{n^*})-y(t_{n^*}), y_{n^*}(t_{n^*})-y(t_{n^*}))+$$
$$+\varepsilon|t-t^*|$$

для всіх $t < t_{n^*}$. Це співвідношення суперечить тому, що

$$\max\{\|y_{n^*}\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\} \leq R.$$

Отже, припущення, що оператор L^{-1} не є неперервним (у випадку виконання співвідношення (3)), хибне.

Аналогічним чином встановлюється неперервність оператора L^{-1} у випадку виконання співвідношення (4).

Теорему 5 доведено.

Зауваження. Результати цього підрозділу не випливають із відповідних результатів про обмежені розв'язки диференціальних рівнянь із монотонними нелінійностями [6]. Відображення f, що задовольняє умову A, може не належати ні класу монотонних відображень, ні класу дисипативних відображень. Це підтверджується простим прикладом відображення $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, що визначається рівністю

$$f(x) = x^3 - x.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

2. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.

3. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 523–539.

4. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.

5. *Слюсарчук В. Ю.* Неявні недиференційовні функції в теорії операторів. Рівне: Вид-во Національного ун-ту водного господарства та природокористування, 2007. – 221 с.

6. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.