УДК 517.51

©2007 р. **В.В. Нестеренко**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

СУКУПНА КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Показано, що многозначне замкненозначне відображення $F : X \times Y \to Z$, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і неперервне /квазінеперервне/ зверху та знизу відносно другої змінної буде сукупно квазінеперервним зверху та знизу, якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє першу /другу/ аксіому зліченності і Z – нормальний простір.

Let X be a Baire space, Y be a first /second/ countable space and Z be a normal space. We show that if a closed-valued multifunction $F : X \times Y \to Z$ is both lower and upper horizontally quasicontinuous and both lower and upper continuous /quasicontinuous/ with respect to the second variable, then it is jointly lower and upper quasicontinuous.

1. Поняття квазінеперервності, яке було введене С.Кемпістим в [1] для однозначних відображень, було перенесено на многозначні відображення і досліджувалось в працях багатьох математиків, зокрема в огляді Т.Нойбруна [2]. В [3] було встановлено, що однозначне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке горизонтально квазінеперервне і неперервне /квазінеперервне/ відносно другої змінної буде сукупно квазінеперервним, якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє першу /другу/ аксіому зліченності і Z – цілком регулярний простір. Остаточне покращення результату про сукупну квазінеперервність однозначних відображень, які горизонтально квазінеперервні і квазінеперервні відносно другої змінної подано в [4].

В цій роботі перенесено згаданий результат з [3] на випадок многозначних відображень.

2. Нехай X, Y, Z – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \to Z$ називається неперервним зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(x_0) \subseteq W$ /$F(x_0) \cap W \neq \emptyset$/ існує окіл U точки $x_0 \in X$, такий, що $F(x) \subseteq W$ /$F(x) \cap W \neq \emptyset$/ для всіх $x \in U$. Многозначне відображення $F : X \to Z$ називається квазінеперервним зверху /знизу/ в точці $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(x_0) \subseteq W$ /$F(x_0) \cap W \neq \emptyset$/ і довільного околу U точки $x_0 \in X$ існує відкрита непорожня множина U_1 в X, така, що $U_1 \subseteq U$ і $F(x) \subseteq W$ /$F(x) \cap W \neq \emptyset$/ для всіх $x \in U_1$. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається горизонтально квазінеперервним зверху /знизу/ в точці $p_0 \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(p_0) \subseteq W$ /$F(p_0) \cap W \neq \emptyset$/ і довільних околів U та V точок $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ відповідно, існують відкрита непорожня множина U_1 в X і точка y_1 в Y, такі, що $U_1 \subseteq U, y_1 \in V$ і $F(p) \subseteq W$ /$F(p) \cap W \neq \emptyset$/ для всіх $p \in U_1 \times \{y_1\}$. Многозначне відображення називається неперервним зверху /знизу/, квазінеперервним зверху /знизу/ чи горизонтально квазінеперервним зверху /знизу/, якщо воно є таким в кожній точці. Многозначне відображення називається замкненозначним, якщо образ кожної точки є замкненою множиною.

3. Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, Z – регулярний простір і $F : X \times Y \to Z$ многозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і виконується одна з наступних умов:*

(а) простір Y задовольняє першу аксіому зліченності і F^x неперервне знизу для кожного $x \in X$;

(б) простір Y задовольняє другу аксіому

зліченності і F^x квазінеперервне знизу для кожного $x \in X$.

Тоді F квазінеперервне знизу за сукупністю змінних.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F квазінеперервне знизу за сукупністю змінних в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \cap W \neq \emptyset$, і U та V – околи відповідно точок x_0 в X та y_0 в Y. Оскільки простір Z регулярний, то існує замкнена множина W_1, така, що $W_1 \subseteq W$ і $F(p_0) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \emptyset$. Відображення F горизонтально квазінеперервне знизу в точці p_0 тому існують точка $y_1 \in V$ і відкрита множина $U_1 \subseteq U$, такі, що $F(p) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \emptyset$ для кожного $p \in U_1 \times \{y_1\}$.

Припустимо спочатку, що виконується умова (а). Нехай $\{V_n' : n \in \mathbb{N}\}$ – база околів точки y_1 в Y. Розглянемо множини $A_n = \{x \in U_1 : (\forall y \in V_n')(F(x,y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \emptyset)\}$. Оскільки відображення F^x неперервне знизу для кожного $x \in X$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1$. Тоді існує номер n_1, такий, що A_{n_1} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2' \subseteq U_1$, тобто $U_2' \subseteq \overline{A_{n_1}}$ і $V_n' \subseteq V$.

Нехай тепер виконується умова (б) і $\{V_n'' : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Розглянемо множини $A_n = \{x \in U_1 : (\forall y \in V_n'')(F(x,y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \emptyset)\}$. З квазінеперервності знизу відносно другої змінної відображення F випливає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1$. Тоді існує номер n_2, такий, що A_{n_2} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2'' \subseteq U_1$, тобто $U_2'' \subseteq \overline{A_{n_2}}$ і $V_{n_2}'' \subseteq V$.

В першому і в другому випадку ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину A і відкриту непорожню множину V_1 в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, V_1 \subseteq V$ і $F(x,y) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \emptyset$ для всіх $(x,y) \in A \times V_1$.

Покажемо, що $F(p) \cap W_1 \neq \emptyset$ для кожного $p \in U_2 \times V_1$. Нехай це не так, і існує точка $p_1 \in U_2 \times V_1$, така, що $F(p_1) \cap W_1 = \emptyset$. Тоді множина $W_2 = Z \setminus W_1$ відкрита і $F(p_1) \subseteq W_2$. З горизонтальної квазінеперервності зверху маємо, що існують точка $y_2 \in V_1$ і відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$, такі, що $F(p) \subseteq W_2$ для кожного $p \in U_3 \times \{y_2\}$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \emptyset$, то існує точка $p_2 \in (U_3 \cap A) \times \{y_2\}$. Тоді $F(p_2) \subseteq W_2$ і $F(p_2) \cap \mathrm{int}W_1 \neq \emptyset$. Отримали суперечність. Отже, $F(p) \cap W_1 \neq \emptyset$ для кожного $p \in U_2 \times V_1$, а значить і $F(p) \cap W \neq \emptyset$. Це означає, що відображення F сукупно квазінеперервне знизу в точці p_0.

Теорема 2. *Нехай X – берівський простір, Z – нормальний простір і $F\colon X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і виконується одна з наступних умов:*

(а) простір Y задовольняє першу аксіому зліченності і F^x неперервне зверху для кожного $x \in X$;

(б) простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і F^x квазінеперервне зверху для кожного $x \in X$.

Тоді F квазінеперервне зверху за сукупністю змінних.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F квазінеперервне зверху за сукупністю змінних в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \subseteq W$ і $U \times V$ – окіл точки p_0. Оскільки простір Z нормальний, то існує замкнена множина W_1 і відкрита множина W_2, такі, що $F(p_0) \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq W$. Відображення F горизонтально квазінеперервне зверху в точці p_0 тому існують точка $y_1 \in V$ і відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$, такі, що $F(p) \subseteq W_2$ для кожного $p \in U_1 \times \{y_1\}$.

Припустимо, що виконується умова (а). Нехай $\{V_n' : n \in \mathbb{N}\}$ – база околів точки y_1 в Y. Розглянемо множини $A_n = \{x \in U_1 : (\forall y \in V_n')(F(x,y) \subseteq W_2)\}$. Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1$. Тоді існує номер n_1, такий, що A_{n_1} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2' \subseteq U_1$, тобто $U_2' \subseteq \overline{A_{n_1}}$ і $V_{n_1}' \subseteq V$.

Нехай тепер виконується умова (б) і $\{V_n'' : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Розглянемо множини $A_n = \{x \in U_1 : (\forall y \in V_n'') (F(x,y) \subseteq W_2)\}$. З квазінеперервності зверху відносно другої змінної відображення F випливає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1$. Тоді існує номер n_2, такий, що A_{n_2} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2'' \subseteq U_1$, тобто $U_2'' \subseteq \overline{A_{n_2}}$ і $V_{n_2}'' \subseteq V$.

В обох випадках ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину A і відкриту непорожню множину V_1 в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, V_1 \subseteq V$ і $F(x,y) \subseteq W_2$ для всіх $(x,y) \in A \times V_1$.

Покажемо, що $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times V_1$. Нехай це не так, тобто існує точка $p_1 \in U_2 \times V_1$ така, що $F(p_1) \not\subseteq W_1$. Тоді множина $W_3 = Z \setminus W_1$ відкрита і $F(p_1) \cap W_3 \neq \emptyset$. З горизонтальної квазінеперервності знизу маємо, що існують точка $y_2 \in V_1$ і відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$, такі, що $F(p) \cap W_3 \neq \emptyset$ для кожного $p \in U_3 \times \{y_2\}$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \emptyset$, то існує точка $p_2 \in (U_3 \cap A) \times \{y_2\}$. Тоді $F(p_2) \cap W_3 \neq \emptyset$ і $F(p_2) \subseteq W_2$. Отримали суперечність. Тоді $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times V_1$, а отже, і $F(p) \subseteq W$. Це і означає квазінеперервність зверху функції F.

Як наслідок з теорем 1 - 2 одержуємо наступні два твердження.

Теорема 3. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – нормальний простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і неперервне зверху та знизу відносно другої змінної. Тоді F квазінеперервне зверху та знизу за сукупністю змінних.*

Теорема 4. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – нормальний простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і квазінеперервне зверху та знизу відносно другої змінної. Тоді F квазінеперервне зверху та знизу за сукупністю змінних.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kempisty S. Sur les fuctions quasicontinues // Fund. Math. — 1932. — 19. — P. 184 - 197.
2. Neubrunn T. Quasi-continuity // Real Anal. Exch. — 1988. -1989. —14, №3. — P. 259 - 306.
3. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, №12. – С. 1711 - 1714.
4. Нестеренко В.В. Про одну характеризацію сукупної квазінеперераності // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 336 — 337. Математика. — Чернівці: Рута. — 2007, — С. 137 - 141.