УДК 517.51

©2007р. В.В. Михайлюк

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ НАРІЗНО НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ І МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

Доведено належність до першого класу Бера функцій двох змінних, які напівнеперервні зверху відносно однієї змінної і напівнеперервні знизу відносно іншої, і функцій, які монотонні відносно однієї змінної і неперервні відносно іншої.

We show that functions of two variables which are upper semi-continuous in the first variable and lower semi-continuous in the second variable, and functions which are monotonous in the first variable and continuous in the second variable belong to the first Baire class.

1. Відображення $f : X \to \mathbb{R}$, визначене на топологічному просторі X, називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Для довільного не більш ніж зліченного ординала α відображення $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією берівського класу* α, якщо існує послідовність (f_n) функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, які є функціями берівського класу, меншого, ніж α, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Функції берівського класу α, де α – деякий не більш, ніж зліченний ординал, називаються *вимірними за Бером*.

Р. Бер у своїй класичній праці [1] показав, що відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $E \subseteq \mathbb{R}$ звуження $f|_E$ функції f на множину E є точково розривним. В [2] було узагальнено цей результат на випадок відображень $f : X \to \mathbb{R}$, визначених на спадково берівському досконалому паракомпакті X.

З іншого боку, питання берівської класифікації нарізно неперервних функцій двох і більшої кількості змінних, чи функцій двох змінних, неперервних відносно однієї змінної і певного класу Бера відносно іншої, досить інтенсивно вивчалися в працях багатьох математиків (А. Лебеґа, Г. Гана, В. Морана, В. Рудіна, Г. Вери, В. Маслюченка, О. Собчука, Т. Банаха, М. Бурке та інших). Зокрема, в [3] показано, що для метризовного простору X і топологічного простору Y довільна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної і берівського класу α відносно другої, є функцією $(\alpha+1)$-го класу Бера за сукупністю змінних. Причому легко бачити, що, навіть, у випадку $X = Y = \mathbb{R}$ існує невимірне за Бером відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яке є функцією першого класу Бера відносно кожної змінної зокрема (для цього досить розглянути характеристичну функцію неборелівської підмножини діагоналі в $\mathbb{R}^2$).

У зв'язку з цим прородно виникають питання про берівську класифікацію функцій двох змінних, які відносно кожної змінної чи однієї із змінних замість умови неперервності задовольняють умову типу напівнеперервності зверху (знизу), монотонності, тощо.

В даній статті ми, використовуючи вищезгаданий результат з [2], доведемо належність до першого класу Бера функцій двох змінних, які напівнеперервні зверху відносно однієї змінної і напівнеперервні знизу відносно іншої, і функцій, які монотонні відносно однієї змінної і неперервні відносно іншої.

2. Спочатку нагадаємо деякі означення.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на топологічному просторі X, називається *точково розривною*, якщо множина точок неперервності функції f є всюди щільною в X.

Топологічний простір X називається *досконалим*, якщо кожна замкнена в X множина є множиною типу G_δ.

Топологічний простір X називається *спадково берівським*, якщо кожний замкнений його підпростір є берівським.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на топологічному просторі X, називається *напівнеперервною зверху (знизу) в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 такий, що $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ ($f(x) > f(x_0) - \varepsilon$) для довільного $x \in U$. Функція $f : X \to \mathbb{R}$, напівнеперервна зверху (знизу) в кожній точці $x \in X$, називається напівнеперервною зверху (знизу).

Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір з метрикою d, $f : X \to Y$ – відображення, $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$ – непорожні множини. Через $\omega_f(A)$ позначатимемо коливання відображення f на множині A, яке означається формулою $\omega_f(A) = \sup\limits_{x',x'' \in A} d(f(x'), f(x''))$. Якщо, крім того, $x \in X$ і $\mathcal{U}$ – система всіх околів точки x в просторі X, то число $\inf\limits_{U \in \mathcal{U}} \omega_f(U)$ називається *коливанням відображення* f *в точці* x і позначається $\omega_f(x)$.

Наступна теорема дає берівську класифікацію нарізно напівнеперервних функцій.

Теорема 1. *Нехай X, Y – метризовні простори такі, що простір $Z = X \times Y$ – спадково берівський (наприклад, повнометризовні простори), і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція, яка напівнеперервна зверху відносно змінної x і напівнеперервна знизу відносно змінної y. Тоді f є функцією першого класу Бера.*

Доведення. Згідно з [2, теорема 2] достатньо показати, що f точково розривна на кожній замкненій в Z множині.

Зафіксуємо довільні метрики $|\cdot - \cdot|_X$ і $|\cdot - \cdot|_Y$ на просторах X і Y відповідно, які породжують їхні топологічні структури, і для довільних $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in Z$ покладемо $|z_1 - z_2|_Z = \max\{|x_1 - x_2|_X, |y_1 - y_2|_Y\}$. Нехай F – довільна непорожня замкнена в Z множина, $g = f|_F$ і $\varepsilon > 0$. Достатньо довести, що множина $G_\varepsilon = \{z \in F : \omega_f(z) < \varepsilon\}$ є щільною в F.

Нехай $G \subseteq F$ – довільна відкрита в F непорожня множина. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через F_n множину всіх точок $(x, y) \in G$ таких, що

$$f(x', y) < f(x, y) + \frac{\varepsilon}{7} \quad \text{і} \quad f(x, y') > f(x, y) - \frac{\varepsilon}{7}$$

для довільних $x' \in X$ і $y' \in Y$ з $|x - x'|_X < \frac{1}{n}$ і $|y - y'|_Y < \frac{1}{n}$. Оскільки $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ і F – берівський простір, то існують відкрита в F непорожня множина $W \subseteq G$ і номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $W \subseteq \overline{F_{n_0}}$, причому без обмежень загальності ми можемо вважати, що $|z_1 - z_2|_Z < \frac{1}{n_0}$ для довільних $z_1, z_2 \in W$.

Покажемо, що $\omega_g(W) < \varepsilon$. Нехай $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in W \bigcap F_{n_0}$. Тоді $|x_1 - x_2|_X < \frac{1}{n_0}$ і $|y_1 - y_2|_Y < \frac{1}{n_0}$, тому $g(x_1, y_1) < f(x_1, y_2) + \frac{\varepsilon}{7} < g(x_2, y_2) + \frac{2\varepsilon}{7}$ і $g(x_2, y_2) < f(x_2, y_1) + \frac{\varepsilon}{7} < g(x_1, y_1) + \frac{2\varepsilon}{7}$. Отже, $|g(z_1) - g(z_2)| < \frac{2\varepsilon}{7}$.

Нехай $w = (x, y) \in W$ – довільна точка. Існує $\delta \in (0, \frac{1}{n_0})$ таке, що

$$f(x', y) < f(x, y) + \frac{\varepsilon}{7} \quad \text{і} \quad f(x, y') > f(x, y) - \frac{\varepsilon}{7}$$

для довільних $x' \in X$ і $y' \in Y$ з $|x - x'|_X < \delta$ і $|y - y'|_Y < \delta$. Оскільки множина F_{n_0} щільна в W, то існує $z \in F_{n_0} \bigcap W$ таке, що $|w - z|_Z < \delta$. Тоді, як і раніше, одержимо, що $|g(w) - g(z)| < \frac{2\varepsilon}{7}$.

Таким чином, для довільних точок $w_1, w_2 \in W$, вибравши відповідні точки $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in W \bigcap F_{n_0}$, одержимо

$$|g(w_1) - g(w_2)| \leq |g(w_1) - g(z_1)| +$$

$$+ |g(z_1) - g(z_2)| + |g(z_2) - g(w_2)| < \frac{6\varepsilon}{7}.$$

Отже, $\omega_g(W) < \varepsilon$.

3. Тепер розглянемо функції монотонні відносно однієї змінної і неперервні відносно іншої.

Зауважимо, що оскільки кожна монотонна на $\mathbb{R}$ функція є функцією першого класу Бера, то згідно з [3] кожна функція $f : \mathbb{R}^2 \to$

$\mathbb{R}$, монотонна відносно однієї змінної і неперервна відносно іншої, є функцією другого класу Бера.

Наступний результат уточнює класифікацію таких функцій.

Теорема 2. *Нехай X – лінійно впорядкований простір, Y – метризовний простір такі, що простір $Z = X \times Y$ – спадково берівський досконалий паракомпакт, і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція, монотонна відносно змінної x і неперервна відносно змінної y. Тоді f є першого класу Бера.*

Доведення. Нехай $|\cdot - \cdot|_Y$ – метрика на Y, яка породжує його топологічну структуру. Візьмемо довільну непорожню замкнену в Z множину F і $\varepsilon > 0$. Аналогічно, як при доведенні попередньої теореми, достатньо довести, що множина $G_\varepsilon = \{z \in F : \omega_g(z) < \varepsilon\}$ є щільною в F, де $g = f|_F$.

Зафіксуємо довільну відкриту в F непорожню множину G і довільне зліченне покриття $(I_n : n \in \mathbb{N})$ числової прямої $\mathbb{R}$ інтервалами I_n довжини меншої, ніж ε. Для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ позначимо через F_{mn} множину всіх точок $z = (x, y) \in G$ таких, що $g(x, y') \in I_n$ для кожного $y' \in Y$ з $|y - y'|_Y < \frac{1}{m}$. Оскільки $G = \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} F_{mn}$ і F – берівський простір, то існують відкрита в F непорожня множина $W \subseteq G$ і номери $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $W \subseteq \overline{F_{m_0n_0}}$. Візьмемо довільну відкриту непорожню кулю V радіуса $\frac{1}{2m_0}$ таку, що $C = G \bigcap (X \times V) \neq \emptyset$.

Припустимо, що $|\mathrm{pr}_X(C \bigcap F_{m_0n_0})| \leq 2$, де $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X(x, y) = x$. Оскільки множина $F_{m_0n_0}$ щільна у відкритій в F множині C, то $|\mathrm{pr}_X(C)| \leq 2$. Врахувавши, що f неперервна відносно змінної y, одержимо, що g неперервна в кожній точці множини C, зокрема, $C \subseteq G_\varepsilon \bigcap G$.

Нехай $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in C \bigcap F_{m_0n_0}$, причому $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді $f(\{x_1\} \times V) \subseteq I_{n_0}$ і $f(\{x_3\} \times V) \subseteq I_{n_0}$. Оскільки f монотонна відносно змінної x, то $f(U \times V) \subseteq I_{n_0}$, де $U = \{x \in X : x_1 < x < x_3\}$. Тому $\omega_f(U \times V) < \varepsilon$, зокрема, $\omega_g(z_2) < \varepsilon$. Отже, $G_\varepsilon \bigcap G \neq \emptyset$.

Наслідок 3. *Нехай X – повнометризовний простір і $f : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ – функція, монотонна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної. Тоді f є функцією першого класу Бера.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les fonctions de variebles reeles // Analli di Mat. pura ed appl., ser 3.- 1899.- T.3- P.1-123.

2. *Михайлюк В.В.* Берівська класифікація точково розривних функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 76. Математика. – Чернівці: ЧДУ, 2000. – С.77-79.

3. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії. - 1994. - **3**. - С. 95-101.