УДК 517.925

©2007 р. О.В. Матвій[1], Л.В. Стельмащук [2], І.М.Черевко[1]

[1] Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
[2] Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Досліджено апроксимацію елемента запізнення в R^n у випадку розривної вхідної функції. Обгрунтовано схему наближення системи різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

We investigate the approximation of a delay element in R^n in the case of a discontinuous driving-point function. The algorithm of the approximation for a system of difference equations by a system of ordinary differential equations is substantiated.

Вступ. У працях [1-5] вивчається апроксимація диференціально-різницевих рівнянь у різних функціональних просторах послідовністю звичайних динамічних систем. Перехід до систем звичайних диференціальних рівнянь дозволив побудувати алгоритми наближення розв'язків рівнянь із запізненням [1,3,4], а також одержати схеми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів.

У даній роботі досліджується апроксимація елемента запізнення в R^n у випадку розривної вхідної функції. Одержані результати застосовуються для обгрунтування схеми наближення системи різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі. Схема апроксимації. Розглянемо систему нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t) = g(t, x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)), \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \; t \in [a-\tau, a], \qquad (2)$$

де $x \in R^n$, $\tau_i, i = \overline{1,p}$, — запізнення, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $g(t, u_1, \ldots, u_p)$ — неперервна вектор-функція визначена для $t \in [a, T]$, $u_i \in R^n$, $i = \overline{1,p}$, $\varphi(t)$ — задана неперервна на $[a-\tau, a]$ вектор-функція.

Розв'язок задачі (1)-(2) можна знайти методом кроків. При виконанні умови "склейки"

$$\varphi(a) = g(a, \varphi(a-\tau_1), \ldots, \varphi(a-\tau_p)) \qquad (3)$$

цей розв'язок буде неперервною функцією на $[a-\tau, T]$. Якщо умова (3) не виконується, тоді розв'язок задачі (1)-(2) буде кусково неперервною функцією, що має на $[a-\tau, T]$ скінченне число точок розриву, в яких існують ліві та праві границі.

Розглянемо схему знаходження наближень розв'язку задачі (1)-(2) за допомогою розв'язків задачі Коші для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно як у випадку диференціально-різницевих рівнянь [4,5]. Відзначимо, що безпосереднє знаходження розв'язку задачі (1)-(2) методом кроків у випадку багатьох запізнень є достатньо складною задачею.

Нехай $m \in N$. Визначимо функції $z_i(t) = (z_{i1}(t), \ldots, z_{in}(t))$, $i = \overline{1,m}$, як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(g(t, z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t)) - \\ - z_1(t)),$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{i-1}(t) - z_i(t)), \qquad (4)$$
$$i = \overline{2,m}, \; t \in [a, T],$$

з початковими умовами

$$z_i(a) = \varphi\left(a - \frac{\tau i}{m}\right), \; i = \overline{1,m}, \qquad (5)$$

де індекси l_i однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_i}{m} \le \tau_i < \frac{\tau}{m}(l_i+1).$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (4)-(5) апроксимує систему рівнянь (1), якщо будуть виконуватись співвідношення

$$\int_a^T \sum_{j=1}^n |x_j(t-\frac{\tau i}{m}) - z_{ij}(t)|dt \to 0,$$
$$i=\overline{1,m}, \quad \text{при } m \to \infty.$$

2. Апроксимація елемента запізнення. Розглянемо m елементів запізнення, що породжені деякою вхідною функцією $x(t)$ і між собою послідовно з'єднані

$$y_1(t) = x(t-\frac{\tau}{m}),\ y_2(t) = x(t-\frac{2\tau}{m}),$$
$$\ldots,\ y_m(t) = x(t-\tau),\ x\in R^n,\ t\in[a,T].$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду [1]

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_1(t)}{dt} + z_1(t) = x(t), \tag{6}$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_i(t)}{dt} + z_i(t) = z_{i-1}(t),$$
$$i=\overline{2,m},\ t\in[a,T],$$
$$z_i(a) = x(a-\frac{i\tau}{m}),\ i=\overline{1,m}, \tag{7}$$

де $x(t)$ вхідна функція першого елемента запізнення. Будемо досліджувати відхилення між функціями $y_i(t)$ та $z_i(t)$, $t\in[a,T]$, $i=\overline{1,m}$, в залежності від гладкості функції $x(t)$.

Відзначимо, що система (6)-(7) досліджена в [1] у випадку, коли функція $x(t)$ скалярна і задовольняє умову Ліпшица або має обмежену сталою M похідну на $[a-\tau,T]$. При цьому встановлено справедливість нерівностей

$$|z_i(t) - y_i(t)| \le \frac{2M\tau}{\sqrt{m}}, t\in[a,T],\ i=\overline{1,m}. \tag{8}$$

Випадок, коли $x(t)\in C[a-\tau,T]$, розглянуто в роботах [4,6]. Там встановлено, що в цьому випадку справджуються нерівності

$$|z_i(t) - y_i(t)| \le 2\left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega(x,\frac{\tau}{m})\right), \tag{9}$$
$$t\in[a,T],\ i=\overline{1,m},$$

де стала $K>0$ незалежить від m, а $\omega(x,\frac{\tau}{m}) = \max\limits_{|t'-t''|<\frac{\tau}{m},t',t''\in[a-\tau,T]} |x(t')-x(t'')|$ модуль неперервності функції $x(t)$ на $[a-\tau,T]$ [7].

Дослідимо точність апроксимації елементів запізнення у випадку, коли вхідна функція $x:[a-\tau,T]\to R^n$ в системі (6)-(7) є неперервною та кусково-неперервною.

Нехай $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $z_i(t) = (z_{i1}(t),\ldots,z_{in}(t))$, $i=\overline{1,m}$. Тоді система (6)-(7) в координатній формі має вигляд

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}(t)}{dt} + z_{1j}(t) = x_j(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}(t)}{dt} + z_{ij}(t) = z_{i-1,j}(t), \tag{10}$$
$$i=\overline{2,m},\ j=\overline{1,n},\ t\in[a,T],$$
$$z_{ij}(a) = x_j(a-\frac{i\tau}{m}), \tag{11}$$
$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли вхідна функція $x(t)$, $t\in[a-\tau,T]$ є кусково неперервна. Введемо згладжені функції

$$x_{hj}(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x_j(s)ds, \tag{12}$$
$$t\in[a-\tau,T],\ j=\overline{1,n}$$

(функції $x_j(t)$ продовжуємо нулем поза $[a-\tau,T]$). Відомо [7], що якщо $q\ge 1$ і $x(t)\in L_q[a-\tau,T]$, то

$$\lim_{h\to 0}\int_{a-\tau}^{T} |x_{hj}(t) - x_j(t)|^q dt = 0, \tag{13}$$
$$j=\overline{1,n}.$$

Позначимо

$$\alpha_j(h) = \int\limits_{a-\tau}^{T} |x_{hj}(t) - x_j(t)|dt,\ j = \overline{1,n}.$$

Із співвідношень (13) випливає, що $\alpha_j(h) \to 0$, $j = \overline{1,n}$, при $h \to 0$.

Якщо в системі (6)-(7) вважати, що $x_j(t) = x_j^{(1)}(t) + x_j^{(2)}(t)$, де $x_j^{(1)}(t) = x_{hj}(t)$, $j = \overline{1,n}$ то згідно її лінійності розв'язок буде сумою функцій, які є розв'язками таких систем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(1)}(t) = x_j^{(1)}(t),\\
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(1)}(t) = z_{i-1,j}^{(1)}(t), \qquad (14)\\
&\quad i = \overline{2,m},\ j = \overline{1,n},\ t \in [a,T],\\
&z_{ij}^{(1)}(a) = x_j(a - \frac{i\tau}{m}), \qquad (15)\\
&\quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(2)}(t) = x_j^{(2)}(t),\\
&\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(2)}(t) = z_{i-1,j}^{(2)}(t), \qquad (16)\\
&\quad i = \overline{2,m},\ j = \overline{1,n},\ t \in [a,T],\\
&z_{ij}^{(2)}(a) = 0; \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Таким чином, враховуючи представлення функції $x(t)$ у вигляді суми двох доданків, маємо нерівності

$$\int\limits_a^T |z_{ij}(t) - y_{ij}(t)|dt \le$$

$$\int\limits_a^T |z_{ij}^{(1)}(t) + z_{ij}^{(2)}(t) - y_{ij}^{(1)}(t) - y_{ij}^{(2)}(t)|dt \le$$

$$\le \int\limits_a^T |z_{ij}^{(1)}(t) - y_{ij}^{(1)}(t)|dt + \int\limits_a^T |z_{ij}^{(2)}(t)|dt +$$

$$+ \int\limits_a^T |y_{ij}^{(2)}(t)|dt,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (18)$$

Для оцінки величини $|z_{ij}^{(1)}(t) - y_{ij}^{(1)}(t)|$ можна застосувати нерівність (8), так як $x_j^{(1)}(t)$, $j = \overline{1,n}$ — неперервні функції. Для другого і третього доданка в правій частині нерівності (18), аналогічно як в праці [8], використовуючи співвідношення (13), легко одержати оцінки

$$\int\limits_a^T |z_{ij}^{(2)}(t)|dt \le \alpha_j(h) \text{ і}$$

$$\int\limits_a^T |y_{ij}^{(2)}(t)|dt \le \alpha_j(h),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Отож, при $h = \dfrac{\tau}{m}$ маємо

$$\int\limits_a^T |z_{ij}(t) - y_{ij}(t)|dt \le$$

$$\le 2(T-a)(\frac{K_j\tau}{\sqrt{m}} + \omega(x_j^{(1)}, \frac{\tau}{m})) +$$

$$+2\alpha_j(\frac{\tau}{m}), i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (19)$$

Додаючи нерівності (19) та позначаючи $\overline{K} = \max\limits_j K_j$, $\overline{\omega}(\frac{\tau}{m}) = \max\limits_j \omega(x_j^{(1)}, \frac{\tau}{m})$, $\alpha(\frac{\tau}{m}) = \max\limits_j \alpha_j(\frac{\tau}{m})$ дістаємо

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_a^T |z_{ij}(t) - y_{ij}(t)|dt \le$$

$$\le 2n(T-a)\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}} + \overline{\omega}(\frac{\tau}{m}) + \alpha(\frac{\tau}{m})\right), \quad (20)$$

$$i = \overline{1,m}.$$

Відзначимо, що оскільки функції $x_j^{(1)}(t)$, $j = \overline{1,n}$, $t \in [a-\tau, T]$ є неперервними, то згідно теореми Кантора [7] $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\omega}(\frac{\tau}{m}) = 0$. Із останньої нерівності одержуємо оцінки апроксимації елемента запізнення для кусково-неперервної вхідної функції.

Якщо ж вхідна функція $x : [a-\tau, T] \to R^n$ є неперервною, то аналогічно можна дістати оцінку

$$\sum_{j=1}^{n}|z_{ij}(t)-y_{ij}(t)|\le 2n\Big(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}}+ \tag{21}$$

$$+\overline{\omega}(\frac{\tau}{m})\Big), i=\overline{1,m},\ t\in[a,T].$$

Підсумуємо наведені вище міркування про апроксимацію елементів запізнення у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай вхідна функція $x(t)$, $t\in[a-\tau,T]$, в системі (6) є кусково-неперервною. Тоді для розв'язків задачі Коші (6)-(7) справджуються нерівності*

$$\int_a^T\sum_{j=1}^{n}|z_{ij}(t)-y_{ij}(t)|dt\le$$

$$2n(T-a)\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}}+\overline{\omega}(\frac{\tau}{m})+\alpha(\frac{\tau}{m})\right)\equiv$$

$$\equiv\beta_1(\frac{\tau}{m}),\ i=\overline{1,m}.$$

Якщо ж вхідна функція $x(t)$, $t\in[a-\tau,T]$, є неперервною, тоді

$$\sum_{j=1}^{n}|z_{ij}(t)-y_{ij}(t)|\le$$

$$\le 2n\left(\frac{\overline{K}\tau}{\sqrt{m}}+\overline{\omega}(\frac{\tau}{m})\right)\equiv\beta_2(\frac{\tau}{m}),$$

$$i=\overline{1,m},\ t\in[a,T].$$

3. Обгрунтування схеми апроксимації. Наведемо спочатку одне допоміжне твердження, яке буде потрібне в подальшому.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dz_1(t)}{dt}=\mu(G(t)-z_1(t)),$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt}=\mu(z_{i-1}(t)-z_i(t)),\ i=\overline{2,m}, \tag{22}$$

$$z_i(a)=0,\ i=\overline{1,m},$$

де $G(t)$ — задана неперервна функція, $\mu>0$.

Лема. *Для розв'язків системи (22) справджуються рівності*

$$z_i(t)=\frac{\mu^i}{(i-1)!}\int_a^t e^{-\mu(t-s)}(t-s)^{i-1}\times$$

$$\times G(s)ds, i=\overline{1,m}. \tag{23}$$

Доведення. Методом матема- тичної індукції переконаємось, що рівності (23) мають місце. Для $n=1$, застосовуючи формулу варіації сталих, дістаємо

$$z_1(t)=\mu\int_a^t e^{-\mu(t-s)}G(s)ds.$$

Нехай рівність (23) справджується для $n=i$. Покажемо, що вона тоді буде вірною при $n=i+1$. Із системи (22), застосовуючи формулу варіації сталих і міняючи порядок інтегрування, маємо рівність

$$z_{i+1}(t)=\mu\int_a^t e^{-\mu(t-s)}z_i(s)ds=$$

$$\mu\int_a^t e^{-\mu(t-s)}\frac{\mu^i}{(i-1)!}\times$$

$$\times\int_a^s e^{-\mu(s-s_1)}(s-s_1)^{i-1}G(s_1)ds_1ds=$$

$$=\frac{\mu^{i+1}}{(i-1)!}\int_a^t\int_a^s e^{-\mu(t-s_1)}(s-s_1)^{i-1}\times$$

$$\times G(s_1)ds_1ds=\frac{\mu^{i+1}}{(i-1)!}\int_a^t e^{-\mu(t-s_1)}G(s_1)\times$$

$$\times\int_{s_1}^t(s-s_1)^{i-1}d(s-s_1)ds_1=$$

$$=\frac{\mu^{i+1}}{i!}\int_a^t e^{-\mu(t-s_1)}(t-s_1)^iG(s_1)ds_1.$$

Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай $(z_i(t), i=\overline{1,m})$ — розв'язок задачі Коші (4)-(5), а $x(t)$ —*

розв'язок початкової задачі (1)-(2). Припустимо, що справджуються нерівності

$$|g_k(t,u_1,\ldots,u_p)-g_k(t,v_1,\ldots,v_p)|\le \le \sum_{i=1}^{p} L_i \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}-v_{ij}|,\ k=\overline{1,n}, \quad L_i>0,\ L_{np}=np\max_{i=\overline{1,p}} L_i<1.$$

Тоді мають місце співвідношення

$$\int_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(t-\frac{\tau i}{m})-z_{ij}(t)|dt \le \le \beta_4(\frac{\tau}{m}), i=\overline{1,m}. \tag{24}$$

Якщо справджується умова "склейки"(3), тоді

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j(t-\frac{\tau i}{m})-z_{ij}(t)z_{ij}(t))|\le \beta_5(\frac{\tau}{m}), \tag{25}$$

$$i=\overline{1,m}, t\in[a,T].$$

Доведення. Перепишемо систему (4) – (5) у вигляді

$$\frac{dz_1(t)}{dt}=\mu(g(t,z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_p}(t))- g(t,x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_p))+x(t)- z_1(t)),$$
$$\frac{dz_i(t)}{dt}=\mu(z_{i-1}(t)-z_i(t)),\ i=\overline{2,m},$$
$$z_i(a)=\varphi(a-\frac{\tau j}{m}),\ i=\overline{1,m}.$$

Визначимо функції $u_i(t)$, $i=\overline{1,m}$ як розв'язки такої системи диференціальних рівнянь

$$\frac{du_1(t)}{dt}=\mu(x(t)-u_1),$$

$$\frac{du_i(t)}{dt}=\mu(u_{i-1}-u_i),\ i=\overline{2,m}, \tag{26}$$

$$u_i(a)=\varphi(a-\frac{\tau i}{m}),\ i=\overline{1,m}. \tag{27}$$

Для розв'язків системи (26)-(27) згідно теореми 1 справедливі оцінки

$$\int_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(t-\frac{\tau i}{m})-u_{ij}(t)|dt\le \beta_1(\frac{\tau}{m}), \quad i=\overline{1,m}.$$

Визначимо функції $v_i(t)=u_i(t)-z_i(t)$, $j=\overline{1,m}$, як розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dv_1(t)}{dt}=\mu(g(t,x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_p))- g(t,z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_p}(t))-v_1(t)), \tag{28}$$

$$\frac{dv_i(t)}{dt}=\mu(v_{i-1}(t)-v_i(t)),\ i=\overline{2,m},$$

$$v_i(0)=0,\ i=\overline{1,m}. \tag{29}$$

В подальшому будемо використовувати таку оцінку

$$\mu\int_a^t \frac{1}{(i-1)!}[\mu(t-s)]^{i-1}e^{-\mu(t-s)}ds = =-\int_a^t \frac{1}{(i-1)!}[\mu(t-s)]^{i-1}e^{-\mu(t-s)}d\mu(t-s)\le \le\int_a^{\infty}\frac{1}{(i-1)!}\lambda^{i-1}e^{-\lambda}d\lambda=1.$$

Одержимо оцінки для функцій $v_i(t)$, $j=\overline{1,m}$. Використовуючи властивості функції g та лему, маємо

$$|v_{ij}(t)|\le\mu\int_a^t \frac{1}{(i-1)!}(\mu(t-s)^{i-1}e^{-\mu(t-s)} |g_j(s,x(s-\tau_1),\ldots,x(s-\tau_p))- g_j(s,,z_{l_1}(s),\ldots,z_{l_p}(s))|ds\le \le\mu\int_a^t \frac{1}{(i-1)!}(\mu(t-s)^{i-1}e^{-\mu(t-s)}$$

$$\sum_{k=1}^{p} L_k \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - z_{l_k,j}(s)|ds \leq$$
$$\leq \mu \int\limits_a^t \frac{1}{(i-1)!}(\mu(t-s)^{i-1} e^{-\mu(t-s)} \sum_{k=1}^{p} L_k \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - u_{l_k,j}(s)| + |v_{l_k,j}(s)|ds.$$

Інтегруючи в межах від a до T та змінюючи порядок інтегрування одержимо

$$\int\limits_a^T |v_{ij}(t)|dt \leq \int\limits_a^T (\sum_{k=1}^{p} L_k \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) -$$
$$u_{l_k,j}(s)| + |v_{l_k,j}(s)|)\mu \int\limits_s^T \frac{1}{(i-1)!}$$
$$\mu(t-s)^{i-1} e^{-\mu(t-s)} dt ds \leq$$
$$\leq \int\limits_a^T \sum_{k=1}^{p} L_k \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - u_{l_k,j}(s)| +$$
$$+|v_{l_k,j}(s)|ds \leq$$
$$\leq L \sum_{k=1}^{p} \int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - u_{l_k,j}(s)| +$$
$$+|v_{l_k,j}(s)|ds.$$

Додаючи ці нерівності для $j = 1, 2, \ldots, n$, маємо

$$\int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |v_{ij}(t)|dt \leq$$
$$\leq Ln \sum_{k=1}^{p} \int\limits_a^T \sum_{i=1}^{n} |x_i(s-\tau_k) - u_{i,l_k}(s)| +$$
$$+|v_{i,l_k}(s)|ds, i = \overline{1,m}.$$

Позначивши
$$v = \max_{i=\overline{1,m}} \int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |v_{ij}(t)|dt,$$
одержимо нерівність

$$v \leq Ln \sum_{k=1}^{p} \int\limits_a^T \sum_{i=1}^{n} |x_i(s-\tau_k) - u_{i,l_k}(s)|ds$$
$$+L_{np} v,$$

яку, враховуючи, що $L_{np} < 1$, можна переписати у вигляді

$$v \leq \frac{Ln}{1-L_{np}} \times$$
$$\sum_{k=1}^{p} \int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - u_{l_k,j}(s)|ds. \quad (30)$$

Оцінюючи праву частину нерівності (30), маємо

$$\int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - u_{l_k,j}(s)|ds =$$
$$= \int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - x_j(s-\tau_{l_k}) +$$
$$+x_j(s-\tau_{l_k}) - u_{l_k,j}(s)|ds \leq$$
$$\leq \int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - x_j(s-\tau_{l_k})|ds +$$
$$+ \int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} x_j(s-\tau_{l_k}) - u_{l_k,j}(s)|ds.$$

Введемо до розгляду функцію

$$\gamma_0(r) = \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{a-\tau}^T |x(t+t_1) - x(t+t_2)|dt.$$

Очевидно, що $\gamma_0(r)$ монотонно зростаюча функція і $\lim\limits_{r\to 0} \gamma_0(r) = 0$. Тоді маємо нерівності

$$\int\limits_a^T \sum_{j=1}^{n} |x_j(s-\tau_k) - u_{l_k,j}(s)|ds \leq$$
$$\leq n\gamma_0(\frac{\tau}{m}) + \beta_2(\frac{\tau}{m}) \equiv \beta_3(\frac{\tau}{m}),$$

$$v \leq \frac{L_{np}}{1-L_{np}} \beta_3(\frac{\tau}{m}). \quad (31)$$

Враховуючи тепер оцінку (30) та умови

теореми 1, одержуємо оцінку (24)

$$\int\limits_a^T \sum_{j=1}^n |x_j(t-\frac{\tau i}{m}) - z_{ij}(t)|dt \leq$$
$$\int\limits_a^T \sum_{j=1}^n |x_j(t-\frac{\tau i}{m}) - u_{ij}(t)|dt +$$
$$\int\limits_a^T \sum_{j=1}^n |v_{ij}(t)|dt \leq$$
$$\leq \beta_1(\frac{\tau}{m}) + \beta_3(\frac{\tau}{m}) \equiv \beta_4(\frac{\tau}{m}),\ i = \overline{1,m}.$$

Аналогічно нескладно дістати оцінку (25).

Теорема 2 доведена.

Зауваження. Функції $\beta_i(r)$, $i = \overline{1,5}$ монотонно неспадні і $\lim\limits_{r\to 0} \beta_i(r) = 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. математика и механика.–1965.–29, N2.–C.226–245.

2. *Янушевский Р.Т.* Управление обьектами с запаздыванием.–М.:Наука, 1978.–416 с.

3. *Оболенський А.Ю., Чернецкая Л.Н.* Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики // Электр. моделирование.–1993.–15, N4.–C.8–13.

4. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.–1999.–N1.–C.42–50.

5. *Черевко І.М., Матвій О.В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. –2004.–Т.7, N2.–C.208–216.

6. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально- різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика.– Чернівці: Рута, 2002.–C.50–54.

7. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

8. *Черевко І. М.* Про наближену заміну різницевих і диференціально-різницевих рівнянь звичайними диференціальними рівняннями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика.– Чернівці: Рута, 2002.–C.107–111.