УДК 517.982.4

©2007р. В.Я. Лозинська[1], О.М. М'яус[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, Львів
[2]Національний університет "Львівська політехніка", Львів

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ В ЗГОРТКОВИХ АЛГЕБРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Побудовано функціональне числення в згорткових алгебрах лінійних неперервних функціоналів над деякими просторами цілих функцій експоненціального типу для генераторів сильно-неперервних груп обмежених лінійних операторів, що діють над довільним банаховим простором.

We construct a functional calculus in the convolution algebras of continuous functionals on the spaces of entire functions of exponential type for the generators of strongly continuous groups of bounded linear operators on arbitrary Banach spaces.

В даній роботі продовжується дослідження згорткових алгебр лінійних неперервних функціоналів над просторами цілих функцій експоненціального типу, розпочаті в роботі [2]. У Фур'є-образі таких згорткових алгебр узагальнених функцій експоненціального типу побудовано аналог функціонального числення від необмежених лінійних операторів, які є генераторами однопараметричних груп класу C_0 над банаховими просторами.

1. Простори основних функцій. Нехай $\omega(t)$ $(-\infty < t < \infty)$– ціла трансцендентна функція нульового роду, нулі якої лежать на уявній додатній півосі [3]:

$$\omega(t) = C\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t}{it_k}\Big),$$

де $C = const$, $C \geq 1$, $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k} < \infty$.

Розглянемо простір, який позначимо $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$-сумовних функцій $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathrm{R})} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t^m\omega(at)\varphi(t)|dt < \infty$$

при фіксованих m, a $(m = 0,1,2,\ldots; a > 0)$.

Для кожного $\nu > 0$ розглянемо підпростір в $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$

$$E_\nu^{(m,a)} := \Big\{\varphi(t) \in L_1^{(m,a)}(\mathbb{R}) :$$

$$\|\varphi\|_{E_\nu^{(m,a)}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|D^k\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\}.$$

Простори $E_\nu^{(m,a)}$ банахові та інваріантні відносно оператора диференціювання [1,5].

В класі цілих аналітичних функцій $\Phi(t+i\tau) \in \mathbb{C}$ розглянемо підпростір $\mathcal{M}_\nu^{(m,a)}(\mathbb{C})$ таких функцій Φ, що для кожного фіксованого $\tau \in \mathbb{R}$ відповідна функція дійсної змінної $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi(t+i\tau)$ належить до простору $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ і має скінченну норму

$$\|\Phi\|_{\mathcal{M}_\nu^{(m,a)}} = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} e^{-\nu|\tau|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t^m\omega(at)\Phi(t+i\tau)|dt.$$

Простори $\mathcal{M}_\nu^{(m,a)}$ складаються з функцій експоненціального типу [4].

Теорема1.[2] *(i) Відображення*

$$\mathcal{M}_\nu^{(m,a)}(\mathbb{C}) \ni \Phi(t+i\tau) \longrightarrow \varphi(t) := \Phi(t+i0) \in E_\nu^{(m,a)}$$

є ізометрією нормованих просторів.

(ii) Вкладення $E_\nu^{(m,a)} \subset L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ ізометричні.

Розглянемо об'єднання просторів з топологією індуктивної границі

$$E^{(m,a)} := \bigcup\nolimits_\nu E_\nu^{(m,a)} = \liminf_{\nu\to+\infty} E_\nu^{(m,a)}$$

відносно неперервних вкладень $E_\nu^{(m,a)} \subset E_\mu^{(m,a)}$, де $\nu \leq \mu$. Простір $E^{(m,a)}$ входить в область визначення оператора диференціювання D та є інваріантним відносно його дії.

Простір $E^{(m,a)}$ гаусдорфовий і квазіповний. Кожна обмежена підмножина S простору $E^{(m,a)}$ міститься і обмежена в деякому просторі $E_\nu^{(m,a)}$[2].

Розглянемо перетин просторів з топологією проективної границі

$$E := \Cap_{m,a} E^{(m,a)} = \lim_{m,a}\mathrm{pr}\ E^{(m,a)},$$

впорядкувавши m, a так, щоб вкладення $E^{(m+1,a+1)} \subset E^{(m,a)}$ були неперервні. Простір

E секвенціально повний. Простір E інваріантний відносно дії групи зсувів $T_s : \varphi(t) \to \varphi(t-s)$, де $s \in \mathbb{R}$.

2. Алгебри узагальнених функцій експоненціального типу. Спряжений з E простір позначимо через E' і наділимо слабкою топологією спряженого простору. Елементи спряженого простору E' називаємо узагальненими функціями експоненціального типу. Простір E' – це локально опуклий лінійний топологічний простір. Канонічну білінійну форму, яка ставить простори E' і E у двоїстість, позначаємо через $\langle f \mid \varphi\rangle$, а саму дуальну пару $\langle E' \mid E\rangle$.

Для довільних $f \in E'$ та $\varphi \in E$ співвідношення

$$\langle D^k f \mid \varphi\rangle = (-1)^k \langle f \mid D^k \varphi\rangle, \qquad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

коректно визначає операцію диференціювання узагальнених функцій.

Для довільної узагальненої функції $f \in E'$ та функції $\varphi \in E$ операцію згортки визначаємо співвідношенням

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s) \mid \varphi(t+s)\rangle = \langle f(s) \mid T_{-s}\varphi(t)\rangle =$$

$$= \langle f(s) \mid T_{-t}\varphi(s)\rangle.$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала f на функцію $T_{-s}\,\varphi(t)$ відносно змінної s.

Через $\mathcal{L}(E)$ позначаємо алгебру лінійних неперервних операторів над простором E з сильною операторною топологією.

Теорема2.[2] *Нехай $f, g \in E', \varphi \in E$. Простір E' є комутативною алгеброю відносно згортки, визначеної співвідношенням*

$$(f * g) \star \varphi = f \star (g \star \varphi).$$

Відображення $E' \ni f \longrightarrow K_f \in \mathcal{L}(E)$, де $K_f \varphi = f \star \varphi$, є алгебраїчним ізоморфізмом на комутант групи зсувів T_s в алгебрі $\mathcal{L}(E)$. Згортка має властивості

$$D^k(f \star \varphi) = f \star (D^k \varphi) = (-1)^k (D^k f) \star \varphi,$$

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g = f * (D^k g)$$

для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$.

3. Перетворення Фур'є. Далі позначимо

$$\widehat{E} := \left\{ \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\cdot\xi} \varphi(t)\, dt : \varphi(t) \in E \right\},$$

де $\xi \in \mathbb{R}$. Перетворення Фур'є здійснює лінійний ізоморфізм $\mathcal{F} : E \ni \varphi(t) \longrightarrow \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{E}$. Простір $\widehat{E}$ наділяємо топологією, перенесеною відображенням $\mathcal{F}$ з E на $\widehat{E}$.

Фур'є-образи функцій експоненціального типу є фінітними [4], тому обернене перетворення можна визначити формулою

$$\mathcal{F}^{-1} : \widehat{E} \ni \widehat{\varphi}(\xi) \longrightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \in E.$$

Двоїстість $\langle E' \mid E\rangle$ дозволяє визначити спряжене відображення до оберненого

$$\mathcal{F}^{\#} \equiv 2\pi(\mathcal{F}^{-1})' : E' \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}'.$$

Його образ $\widehat{E}'$, який породжує двоїстість вигляду $\langle \widehat{E}' \mid \widehat{E}\rangle$, наділяємо слабкою топологією. Відображення $\mathcal{F}^{\#}$ є розширенням перетворення Фур'є на простори узагальнених функцій E'.

Дуальні пари $\langle E' \mid E\rangle$ і $\langle \widehat{E}' \mid \widehat{E}\rangle$ пов'язані співвідношенням $\langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\rangle = 2\pi\langle f \mid \varphi\rangle$.

4. Фінітні функції від генераторів C_0-груп. Нехай у комплексному банаховому просторі $\{X, \|\cdot\|\}$ задана рівномірно обмежена однопараметрична C_0-група $U_t = e^{-itA} \in \mathcal{L}(X)$ з генератором $-iA$, де $\mathcal{L}(X)$ – алгебра лінійних обмежених операторів над X з рівномірною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$. Генератор цієї групи є неквазіаналітичним оператором в банаховому просторі, тобто інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ln\|U_t\|}{1+t^2} dt \qquad (1)$$

є збіжним [3]. З групової властивості випливає нерівність

$$\|U_{t+s}\| \le \|U_t\| \cdot \|U_s\| \qquad (2)$$

Збіжність інтеграла (1) і нерівність (2) забезпечують існування такої цілої трансцендентної функції $\omega(t)$ нульового роду з нулями на уявній додатній півосі, що

$$\|U_t\| \le |\omega(t)| \ \ (-\infty < t < \infty)$$

Візьмемо довільну функцію $\varphi(t) \in E$ і побудуємо лінійний оператор

$$\widehat{\varphi}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iAt}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_t \varphi(t)dt.$$

Інтеграл збігається сильно на всьому просторі і визначений ним оператор $\widehat{\varphi}(A)$ обмежений. Оскільки образ перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(\lambda)$ є фінітна функція, то оператори $\widehat{\varphi}(A)$ можна трактувати як фінітні функції від A.

Теорема 3. *Припустимо, що $\varphi \in E$. Тоді оператори $\widehat{\varphi}(A)$ задовольняють співвідношенням*

$$\widehat{(D^k\varphi)}(A) = i^k A^k \widehat{\varphi}(A),$$

$$\widehat{(it)^k\varphi}(A) = (D^k\widehat{\varphi})(A),$$

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(A) = \widehat{\varphi}(A)\cdot\widehat{\psi}(A),\ \big(\forall\,\widehat{\varphi},\widehat{\psi}\in\widehat{E}\big).$$

Д о в е д е н н я. Інтегруючи частинами і використовуючи замкненість генератора групи, отримуємо:

$$\widehat{(D^k\varphi)}(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_t(D^k\varphi)(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} D^kU_t\varphi(t)\,dt = i^kA^k\widehat{\varphi}(A),$$

$$\widehat{(it)^k\varphi}(A) = \int\limits_{\infty}^{\infty} U_t((it)^k\varphi)(t)\,dt = (D^k\widehat{\varphi})(A).$$

Визначеною є згортка функцій і виконуються рівності

$$\widehat{\varphi}(A)\cdot\widehat{\psi}(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}U_{s+t}\psi(s)\,ds\big]\,dt =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}U_r\varphi(r-s)\psi(s)\,ds\big]\,dr = \widehat{(\varphi*\psi)}(A).$$

5. Функціональне числення для генераторів C_0-груп. Відомо [6] наступне ізометричне зображення $L_1(\mathbb{R};X)\simeq X\widetilde{\otimes}L_1(\mathbb{R})$, де $L_1(\mathbb{R};X)$ є банаховий простір всіх X-значних сумовних функцій $\mathbb{R}\ni t\longrightarrow x(t)\in X$ з нормою $\|x\|_{L_1(X)} := \int_{\mathbb{R}}\|x(t)\|\,dt$.

Позначимо через

$$E(\mathbb{R};X) := X\widetilde{\otimes}E(\mathbb{R})$$

– поповнення проективного тензорного добутку просторів X та $E(\mathbb{R})$. Згортку довільної узагальненої функції $f\in E'(\mathbb{R})$ та вектор-функції $x(t)\in E(\mathbb{R};X)$ визначаємо співвідношенням

$$(f\star x)(t) := (I\otimes K_f)x(t),$$

де I – одиничний оператор в X.

З теореми Гротендіка [6] про зображення елементів проективного тензорного добутку випливає, що елемент $x(t)\in E(\mathbb{R};X)$ зображається абсолютно збіжним рядом вигляду

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\otimes\varphi_j(t),\ \text{де}\quad x_j\in X,\ \varphi_j(t)\in E(\mathbb{R}).\quad (3)$$

Використовуючи це зображення для довільної узагальненої функції $f\in E'(\mathbb{R})$ та вектор-функції $x(t)\in E(\mathbb{R};X)$, отримуємо

$$(f\star x)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\otimes(f\star\varphi_j)(t).$$

Лема 1. *Згортка має властивості:*

$$(f*g)\star x = f\star(g\star x),$$

$$D^k(f\star x) = f\star(D^kx) = (-1)^k(D^kf)\star x$$

для будь-яких $f,g\in E'(\mathbb{R})$, $x = x(t)\in E(\mathbb{R};X)$ та $k\in\mathbb{Z}_+$.

Д о в е д е н н я. З означення згортки та теореми випливають наступні рівності

$$(f*g)\star x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\otimes(f*g)\star\varphi_j =$$

$$= f\star\sum_{j=1}^{\infty} x_j\otimes(g\star\varphi_j) = f\star(g\star x),$$

$$D^k(f\star x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\otimes D^k(f\star\varphi_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} x_j\otimes(-1)^k(D^kf)\star\varphi_j = (-1)^k(D^kf)\star x.$$

Лема 2. *Кожен підпростір вигляду*

$$\widehat{E}(X) := \left\{\widehat{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(U_t\otimes I)x(t)\,dt:\ x(t)\in E(\mathbb{R};X)\right\}$$

є банаховим відносно норми, індукованої відображенням $x(t)\longrightarrow\widehat{x}$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що відображення $E(\mathbb{R};X)\ni x(t)\longrightarrow\widehat{x}\in\widehat{E}(X)$ є неперервним. Із (3) отримуємо

$$\widehat{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}U_tx_j\otimes\varphi_j(t)\Big]dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U_tx_j\otimes\varphi_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_j(A)x_j.$$

Оскільки $\|\widehat{\varphi}(A)x\| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\|U_tx\|\,|\varphi(t)|\,dt \le \|U_tx\|\,\|\varphi\|_E \le \|\varphi\|_E\|x\|\quad(\forall x\in X)$, то

$$\|\widehat{x}\| \le \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|\,\|\widehat{\varphi_j}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \le \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|\,\|\varphi_j\|_E.$$

Використовуючи довільність зображення $x(t)$ у вигляді абсолютно збіжного ряду, отримуємо $\|\widehat{x}\|\le\|x(t)\|_{E(\mathbb{R};X)}$ і неперервність доведено. Ядро неперервного відображення $E(\mathbb{R};X)\longrightarrow X$ є замкненим, тому відповідний фактор-простір по цьому ядру є банаховим. Згідно з означенням норми в просторі $\widehat{E}(X)$, він є ізометричний побудованому фактор-простору.

Лема 3. *Кожен підпростір $\widehat{E}(X)$ є інваріантний відносно оператора*

$$\widehat{K}_f : \widehat{E}(X) \ni \widehat{x} \longrightarrow \widehat{K}_f\widehat{x} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes K_f)x(t)\,dt.$$

Д о в е д е н н я. Враховуючи зображення (3) елементів $x(t) \in E(\mathbb{R}; X)$ для довільного $f \in E'(\mathbb{R})$, отримуємо

$$\|(I \otimes K_f)x(t)\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|\,\|K_f\varphi_j\|_E \le$$

$$\le \|K_f\|_{\mathcal{L}(E)} \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|\,\|\varphi_j\|_E,$$

або $\|(I \otimes K_f)x(t)\| \le \|K_f\|_{\mathcal{L}(E)}\,\|x(t)\|_{E(\mathbb{R};X)}$. Отже, простір $E(\mathbb{R}; X)$ є інваріантним відносно дії оператора $I \otimes K_f$.

Оскільки $U_t \otimes K_f = (U_t \otimes I)(I \otimes K_f)$ і $I \otimes K_f : E(\mathbb{R}; X) \longrightarrow E(\mathbb{R}; X)$, то згідно з лемою 2 для будь-якої вектор-функції $x(t) \in E(\mathbb{R}; X)$, маємо $\widehat{K}_f\widehat{x} \in \widehat{E}(X)$. Тобто $\widehat{K}_f : \widehat{E}(X) \longrightarrow \widehat{E}(X)$. Лема доведена.

Через $\mathcal{L}(\widehat{E}(X))$ позначаємо алгебру всіх лінійних неперервних операторів над простором $\widehat{E}(X)$ з сильною операторною топологією.

Теорема 4. *Відображення $\widehat{E'}(\mathbb{R}) \ni \widehat{f} \mapsto \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(\widehat{E}(X))$, де лінійний оператор $\widehat{f}(A)$ є визначений співвідношенням*

$$\widehat{f}(A) : \widehat{E}(X) \ni \widehat{x} \mapsto$$

$$\mapsto \widehat{f}(A)\widehat{x} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes K_f)x(t)\,dt \in \widehat{E}(X), \qquad (4)$$

здійснює неперервний гомоморфізм алгебри символів $\widehat{E'}(\mathbb{R})$ на підалгебру алгебри $\mathcal{L}(\widehat{E}(X))$ операторів вигляду

$$\widehat{K} : \widehat{E}(X) \ni \widehat{x} \mapsto \widehat{K}\widehat{x} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes K)x(t)\,dt\ ,$$

де оператор $K \in \mathcal{L}(E(\mathbb{R}))$ належить комутанту групи T_s. При цьому маємо

$$\widehat{(D^k f)}(A) = i^k A^k \widehat{f}(A), \quad \widehat{(it)^k f}(A) = (D^k \widehat{f})(A).$$

Д о в е д е н н я. За теоремою 2 довільний оператор, який належить комутанту групи T_s, має вигляд K_f, де $f \in E'$. З леми та означення простору $\widehat{E}(X)$ випливає, що $\widehat{K}_f : \widehat{E}(X) \longrightarrow \widehat{E}(X)$. За означенням норми в $\widehat{E(X)}$ маємо, що $\widehat{x}_m \to \widehat{x}$ тоді і тільки тоді, коли $x_m(t) \to x(t)$ в просторі $E(\mathbb{R}; X)$. Якщо ж $x_m(t) \to x(t)$, то з неперервності K_f випливає, що $(I \otimes K_f)x_m(t) \to (I \otimes K_f)x(t)$ в просторі $E(\mathbb{R}; X)$. Звідси знову за означенням норми в $\widehat{E}(X)$, отримуємо $(I \otimes K_f)x_m(t) \to (I \otimes K_f)x(t)$. Таким чином, $\widehat{K}_f \in \mathcal{L}(\widehat{E}(X))$. З рівності $K_{f*g} = K_f \cdot K_g$ для будь-яких $f, g \in \widehat{E}'$, випливає $\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \cdot \widehat{K}_g$. Тобто, функціональне числення реалізує алгебраїчний гомоморфізм із згорткової алгебри узагальнених функцій на алгебру неперервних операторів над простором $\widehat{E}(X)$.

Доведемо неперервність функціонального числення. Оскільки в просторі $\widehat{E}'$ топологія індукується з E', а в просторі E' задано слабку топологію, то досить показати неперервність відображення $E' \ni f \mapsto \widehat{f}(A)\widehat{x} \in \widehat{E}(X)$ для кожного $\widehat{x} \in \widehat{E}(X)$. Неперервність $E' \ni f \mapsto K_f \in \mathcal{L}(E)$ отримуємо з нерівності $\|f \star \varphi\|_E \le \|f\|\,\|\varphi\|_E$. Тому неперервним буде відображення $E' \ni f \mapsto (I \otimes K_f)x(t) \in E(\mathbb{R}; X)$ для кожного $x(t) \in E(\mathbb{R}; X)$. Нехай $f_m \to f$ в просторі $E'(\mathbb{R})$. Тоді $(I \otimes K_{f_m})x(t) \to (I \otimes K_f)x(t)$ в просторі $E(\mathbb{R}; X)$. За означенням норми в $\widehat{E}(X)$, маємо $\widehat{K}_{f_m}\widehat{x} \to \widehat{K}_f\widehat{x}$ в просторі $\widehat{E}(X)$. Отже, відображення $E'(\mathbb{R}) \ni f \longrightarrow \widehat{K}_f\widehat{x} \in \widehat{E}(X)$ є неперервним.

Решта тверджень теореми випливає з лем 1,3 та теореми 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.*Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 4.– С.502-513.

2.*Лозинська В. Я., М'яус О.М.* Про узагальнені функції експоненціального типу // Прикладні проблеми механіки і математики. Науковий збірник. Випуск 4. – 2006. –С. 48-53.

3.*Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром // Матем. сборник – 1962. – **56(98)**, № 4 – С. 433–468.

4.*Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

5.*Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9.– С. 1559-1569.

6.*Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. – 359 с.