УДК 517.983

©2007 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ, ЩО Є ЛІВИМИ ОБЕРНЕНИМИ ДО МНОЖЕННЯ НА НЕЗАЛЕЖНУ ЗМІННУ

У класі лінійних неперервних операторів, які діють у просторах аналітичних у довільних областях функцій, одержано зображення комутанта довільного оператора, який є лівим оберненим до множення на незалежну змінну, а також досліджені умови еквівалентності операторів вказаного вигляду.

We obtain representations of the commutant for any operator which is the left inverse to the multiplication by an independent variable and investigate conditions for equivalence of operators of an indicated form in the class of linear continuous operators acting in spaces of analytic functions with arbitrary domains.

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1], а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ – множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють у $\mathcal{H}(G)$. Якщо G – довільна область комплексної площини, яка містить точку $z = 0$ і є зірковою відносно цієї точки, то формулою $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$, де інтегрування здійснюється по відрізку, що з'єднує точки 0 та z, визначається лінійний неперервний оператор, який діє в просторі $\mathcal{H}(G)$. Загальний вигляд лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і є правими оберненими до диференціювання, дається формулою

$$A = \mathcal{J} + L, \tag{1}$$

де L – довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{H}(G)$. І.Х. Дімовський та його учні досконало вивчили різні властивості лінійних неперервних операторів, що є правими оберненими до диференціювання і діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. У випадку, коли область G є опуклою, для кожного з таких операторів у просторі $\mathcal{H}(G)$ побудована нетривіальна згортка (згортка Берга-Дімовского), знайдено зображення усіх неперервних згорток для операторів виду (1), описані усі мультиплікатори згортки Берга-Дімовського та комутант кожного оператора виду (1). Ці результати а також їхні застосування систематизовані в монографії [2]. Пізніше в [3] вивчені умови еквівалентності в просторі $\mathcal{H}(G)$ двох різних лінійних неперервних операторів, що є правими оберненими до диференціювання. В [4] деякі з цих результатів узагальнені на випадок операторів, які є правими оберненими до узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва.

Якщо G – довільна область комплексної площини, яка містить точку $z = 0$, то формулою $(\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ при $z \neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$ визначається оператор Помм'є Δ, який належить класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Оператор Помм'є є частинним випадком оператора узагальненого диференціювання і за своїми властивостями в певному сенсі близький до оператора диференціювання. В роботах [5], [6] задачі, аналогічні до перерахованих вище, розв'язані для операторів, що є правими оберненими до оператора Помм'є.

Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить початок координат. Тоді формулою

$$B = \frac{d}{dz} + U_{\varphi}\delta_0, \tag{2}$$

де U_φ – оператор множення на функцію $\varphi(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$, а $\delta_0(f) = f(0)$, описується множина всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і є лівими оберненими до оператора інтегрування $\mathcal{J}$. Тому цілком логічно виникає питання про розв'язання подібних задач для операторів виду (2). Але кожен оператор виду (2) еквівалентний у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора диференціювання. Звідси одразу випливає, що кожні два оператори, які є лівими оберненими до оператора інтегрування, є еквівалентними між собою в просторі $\mathcal{H}(G)$. Комутант оператора диференціювання в просторах $\mathcal{H}(G)$ описаний в [7]. Використовуючи ці твердження, легко одержати опис комутанта кожного оператора виду (2) в класі $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

У зв'язку зі сказаним вище цілком природно виникають аналогічні задачі для операторів, що є лівими оберненими до оператора множення на незалежну змінну у просторі $\mathcal{H}(G)$. Якщо G – довільна область комплексної площини, яка містить початок координат, то загальний вигляд лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і є лівими оберненими до оператора множення на незалежну змінну, дається формулою

$$C = \Delta + U_\varphi \delta_0, \tag{3}$$

де $\varphi(z)$ – довільна фіксована функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Комутант оператора Помм'є в просторах $\mathcal{H}(G)$ описано в [8], [9]. Оператор (3) буде еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора Помм'є Δ тоді і тільки тоді, коли функція $1 - z\varphi(z)$ не має нулів в області G. Тому скористатись властивостями оператора Помм'є для вивчення відповідних властивостей операторів (3) в загальному випадку неможливо.

В цій статті вивчається зображення операторів, які переставні з фіксованим оператором C, що визначається формулою (3). Досліджені також умови еквівалентності двох довільних операторів, які є лівими оберненими до оператора множення на незалежну змінну. Зауважимо, що основні результати цієї статті анонсовані в [10].

Теорема 1. *Нехай G – довільна область в $\mathbb{C}$, яка містить початок координат, а $\varphi(z)$ – фіксована функція з $\mathcal{H}(G)$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, був переставним з оператором $C = \Delta + U_\varphi \delta_0$, необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді*

$$(Tf)(z) = \underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z)\psi(\zeta) - \zeta f(\zeta)\psi(z)}{z - \zeta},\right] \tag{4}$$

де L – довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{H}(G)$, а $\psi(z) = 1 - z\varphi(z)$.

Доведення. Необхідність. Нехай лінійний неперервний оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z) = T\left[\frac{1}{\lambda - z}\right]$ [1], переставний з C, тобто виконується рівність:

$$TC = CT. \tag{5}$$

Подіявши рівністю (5) на функцію $\frac{1}{\lambda - z}$, одержимо, що на множині $\mathcal{F}$ [6] виконується співвідношення

$$\frac{1}{\lambda}(t(\lambda, z) + \varphi_1(z)) = \frac{t(\lambda, z) - t(\lambda, 0)}{z} + \varphi(z)t(\lambda, 0),$$

де $\varphi_1(z) = (T\varphi)(z)$, $\varphi_1 \in \mathcal{H}(G)$. Розв'язавши останнє рівняння відносно $t(\lambda, z)$, одержимо, що на множині $\mathcal{F}$

$$t(\lambda, z) = \frac{z\varphi_1(z)}{\lambda - z} + \frac{(1 - z\varphi(z))\lambda t(\lambda, 0)}{\lambda - z}. \tag{6}$$

Оскільки функція $t(\lambda, z)$ є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$, то функція $l(\lambda) = t(\lambda, 0)$ є аналітичною на множині $\complement G$. Тому існує лінійний неперервний функціонал L на просторі $\mathcal{H}(G)$, для якого функція $t(\lambda, 0)$ є характеристичною, тобто $t(\lambda, 0) = \underset{\zeta}{L}\left[\frac{1}{\lambda - \zeta}\right]$ [1].

Розглянемо оператор T_1, який діє за правилом: $(T_1 f)(z) = z\varphi_1(z)f(z) +$

$$+(1 - z\varphi(z))\underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z) - \zeta f(\zeta)}{z - \zeta}\right].$$

Зрозуміло, що $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і характеристична функція оператора T_1 збігається з функцією $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (6). Тому $T = T_1$. Для знаходження функції $\varphi_1(z)$ подіємо оператором T на $\varphi(z)$. Одержимо: $\varphi_1(z)(1-z\varphi(z))=$

$$=(1-z\varphi(z))\underset{\zeta}{L}\left[\frac{z\varphi(z)-\zeta\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\right].$$

Оскільки $1-z\varphi(z)\not\equiv 0$ в G, то з останньої рівності випливає, що при $z\in G$

$$\varphi_1(z)=\underset{\zeta}{L}\left[\frac{z\varphi(z)-\zeta\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\right].$$

Таким чином,

$$(Tf)(z)=z\underset{\zeta}{L}\left[\frac{z\varphi(z)-\zeta\varphi(\zeta)}{z-\zeta}\right]f(z)+$$

$$+(1-z\varphi(z))\underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z)-\zeta f(\zeta)}{z-\zeta}\right]=$$

$$=\underset{\zeta}{L}\left[\frac{zf(z)(1-\zeta\varphi(\zeta))-\zeta f(\zeta)(1-z\varphi(z))}{z-\zeta}\right].$$

Позначивши $\psi(z)=1-z\varphi(z)$, одержимо, що оператор T подається у вигляді (4).

Достатність умов теореми 1 є очевидною.

Дослідимо далі умови еквівалентності двох різних операторів, які є лівими оберненими до оператора множення на незалежну змінну.

Лема 1. *Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить початок координат і $\varphi\in\mathcal{H}(G)$, а $z_0\in G$, причому $z_0\neq 0$. Для того, щоб число $\lambda=\frac{1}{z_0}$ було власним значенням оператора $C=\Delta+U_\varphi\delta_0$, необхідно і достатньо, щоб $z_0\varphi(z_0)=1$. При виконанні останньої умови власний підпростір простору $\mathcal{H}(G)$, що відповідає власному значенню $\lambda=\frac{1}{z_0}$, є таким*

$$H_\lambda=\left\{\frac{c(1-z\varphi(z))}{z-z_0}:c\in\mathbb{C}\right\}. \qquad (7)$$

Доведення. Для того, щоб число $\frac{1}{z_0}$, де $z_0\in G\backslash\{0\}$, було власним значенням оператора C, необхідно і досить, щоб існувала ненульова функція $f\in\mathcal{H}(G)$, для якої $Cf=\frac{1}{z_0}f$. Останнє співвідношення рівносильне тому, що при $z\in G$

$$(z-z_0)f(z)=c(1-z\varphi(z)), \qquad (8)$$

де c – деяка стала, яка відмінна від нуля. З (8) випливає, що число $\lambda=\frac{1}{z_0}$ буде власним значенням для оператора C тоді і тільки тоді, коли точка z_0 буде нулем функції $1-z\varphi(z)$. При виконанні останньої умови, відповідне власне значення $\lambda=\frac{1}{z_0}$ буде однократним і множина функцій $\{f\in\mathcal{H}(G):Cf=\frac{1}{z_0}f\}$ збігається з (7).

Для оператора $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ через $KerT$ позначатимемо ядро оператора T, а через E – одиничний оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Лема 2. *Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить початок координат, $\varphi\in\mathcal{H}(G)$, а $z_0\in G$ і є n-кратним нулем функції $1-z\varphi(z)$. Тоді:*
а) $\forall k=\overline{1,n}$: $Ker(C-\frac{1}{z_0}E)^k=\{\sum\limits_{i=0}^{k-1}c_i\frac{z^{k-1-i}(1-z\varphi(z))}{(z-z_0)^{k-i}}:c_i\in\mathbb{C},i=\overline{0,k-1}\}$;
б) $\forall m\in\mathbb{N}$: $Ker(C-\frac{1}{z_0}E)^{n+m}=Ker(C-\frac{1}{z_0}E)^n$.

Доведення. Твердження а) доведемо індукцією по k. При $k=1$ його правильність випливає з леми 1. Допустимо, що твердження а) є правильним для деякого $k<n$ і перевіримо, що воно виконується для $k+1$.

Нехай $(C-\frac{1}{z_0}E)^{k+1}f=0$. Тоді $(C-\frac{1}{z_0}E)f\in Ker(C-\frac{1}{z_0}E)^k$ і тому існують сталі $\tilde{c}_i\in\mathbb{C}$, $i=\overline{0,k-1}$, для яких

$$\Delta f(z)+f(0)\varphi(z)-\frac{1}{z_0}f(z)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{c}_i\frac{z^{k-1-i}(1-z\varphi(z))}{(z-z_0)^{k-i}}.$$

Тому при $z\in G\backslash\{z_0\}$

$$(1-\frac{z}{z_0})f(z)=f(0)(1-z\varphi(z))+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{c}_i\frac{z^{k-i}(1-z\varphi(z))}{(z-z_0)^{k-i}}.$$

Звідси одержуємо, що при $z\in G\backslash\{z_0\}$

$$f(z)=\sum_{i=0}^{k}c_i\frac{z^{k-i}(1-z\varphi(z))}{(z-z_0)^{k+1-i}}, \qquad (9)$$

де c_i, $i = \overline{0,k}$, – деякі сталі. Навпаки, оскільки z_0 є n-кратним нулем функції $1 - z\varphi(z)$ і $k+1 \le n$, то для довільних сталих c_i, $i = \overline{0,k}$, формулою (9) визначається деяка функція f, яка аналітична на множині $G \setminus \{0\}$, і для якої точка z_0 є усувною особливістю. Тому ця функція належить до простору $\mathcal{H}(G)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що функція $f \in Ker(C - \frac{1}{z_0}E)^{k+1}$. Таким чином, твердження а) доведене.

Перевіримо правильність твердження б) при $m = 1$. Нехай $f \in Ker(C - \frac{1}{z_0}E)^{n+1}$. Тоді $(C - \frac{1}{z_0}E)f \in Ker(C - \frac{1}{z_0}E)^n$ і, використовуючи твердження а) при $k = n$, одержимо, що при $z \neq z_0$

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{z^{n-i}(1 - z\varphi(z))}{(z - z_0)^{n+1-i}}, \qquad (10)$$

де c_i, $i = \overline{0,n}$, – деякі сталі. Оскільки $f \in \mathcal{H}(G)$ і точка z_0 є n-кратним нулем функції $1 - z\varphi(z)$, то спрямувавши в рівності (10) z до z_0, одержимо, що $c_0 = 0$. Тому $f \in Ker(C - \frac{1}{z_0}E)^n$ і твердження б) виконується при $m = 1$. Правильність б) для довільного натурального m перевіряється методом математичної індукції, подібно до того, як це робилося при доведенні твердження а).

Теорема 2. *Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить початок координат і функції $\varphi_i \in \mathcal{H}(G)$, $i = 1, 2$. Для того, щоб оператор $C_1 = \Delta + U_{\varphi_1}\delta_0$ був еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора $C_2 = \Delta + U_{\varphi_2}\delta_0$, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувалися умови:*
а) на G множини нулів функцій $1 - z\varphi_1(z)$ та $1 - z\varphi_2(z)$ збігалися;
б) кратності однакових нулів функцій $1 - z\varphi_1(z)$ та $1 - z\varphi_2(z)$, які належать області G, були рівними.

Доведення. Необхідність. Нехай оператори C_1 та C_2 є еквівалентними в $\mathcal{H}(G)$. Тоді існує ізоморфізм $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, для якого

$$TC_1 = C_2T. \qquad (11)$$

Оскільки у еквівалентних операторів множини власних значень збігаються, то правильність твердження а) випливає з леми 1.

Нехай $z_0 \in G$ – спільний нуль функцій $1 - z\varphi_1(z)$ та $1 - z\varphi_2(z)$. З рівності (11) випливає, що для довільного натурального k

$$T(C_1 - \frac{1}{z_0}E)^k = (C_2 - \frac{1}{z_0}E)^k T. \qquad (12)$$

Оскільки T – ізоморфізм з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, то з (12) випливає, що для кожного натурального k розмірності підпросторів $Ker(C_1 - \frac{1}{z_0}E)^k$ та $Ker(C_2 - \frac{1}{z_0}E)^k$ збігаються. Звідси, використовуючи лему 2, одержуємо, що б) виконується.

Достатність. Нехай виконуються умови а) та б) теореми 2. Тоді функція $\psi(z) = \frac{1 - z\varphi_1(z)}{1 - z\varphi_2(z)}$ є аналітичною на множині G і не перетворюється в нуль на цій множині. Тому оператор множення $T = U_\psi$ є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що $(\Delta + U_{\varphi_1}\delta_0)T = T(\Delta + U_{\varphi_2}\delta_0)$.

Наслідок. *Нехай G – довільна область комплексної площини, яка містить початок координат і функція $\varphi \in \mathcal{H}(G)$. Для того, щоб оператор $\Delta + U_\varphi\delta_0$ був еквівалентним в $\mathcal{H}(G)$ до оператора Δ, необхідно і достатньо, щоб $1 - z\varphi(z) \neq 0$ при $z \in G$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.–1953.–**191**.– S.30–49.

2. *Dimovski I.* Convolutional Calculus. Series: Mathematics and its Applications. –1990.– Vol. 43.– 208p.

3. *Нагнибіда М.І., Лінчук С.С., Звоздецький Т.І.* Про деякі властивості операторів, які є правими оберненими до диференціювання, в просторі аналітичних функцій // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.– Київ, 1996.– Вип. 13.– С. 148-164.

4. *Zvozdetskyi T.I.* On the Equivalence of Some Operators Related to Generalized Gelfond-Leontiev Integration and Differentiation in Spaces of Analytic Functions. // Ukrainian Mathematical Bulletin.– 2005.– Vol.2, № 4.–P.495 - 506.

5. *Dimovski I., Mineff D.* Convolutions multipliers and commutants for the backward shift operator // Pliska studia math. bulgarica.–1981.–Vol.4.–P.128-136.

6. *Линчук Н.Е.* Свёрточное представление некоторых классов операторов, связанных с умножением на аналитические функции, и их применения. // Укр. матем. ж.–1984.–Т 36,№5.–С.626-631.

7. *Коробейник Ю.Ф.* Общий вид перестановочных с оператором дифференцирования линейных операторов в пространствах аналитических функций. // Функц. анализ и их прилож.– 1973.– Т.7,№1.–С.74–76.

8. *Линчук Н.Е.* Представление комутантов оператора Поммье и их приложения. // Матем.заметки.–1988.–Т44,№6.–С.794-802.

9. *Dimovski I.H., Hristov V.Z.* Commutants of the Pommiez operator. // Int. J. Math. Math. Sci. – 2005. – №.8. – P. 1239 – 1251.

10. *Лінчук Ю.С.* Деякі комутаційні властивості операторів, що є лівими оберненими до множення на незалежну змінну // Матеріали XI-ої Міжнародної наукової конференції імені академіка М.Кравчука (18-20 травня 2006 р., Київ) – К.: Тов."Задруга", 2006. – С.494.