УДК 517.51

©2007 р. С.С.Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ПОТОЧКОВА ЗАСТОСОВНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ДО ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Досліджені критерії поточкової застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами до простору $[\rho, \sigma]$.

Criterias of pointwise applicability of integral operators of an infinite order with constant factors to the space $[\rho, \sigma]$ are researched.

Для різних класів диференціальних операторів нескінченного порядку в працях Г. Мугглі, Р. Сіккеми, Р.П. Боаса, М.Г. Хапланова, Ю.Ф. Коробейніка, В.В. Моржакова та інших математиків вивчені необхідні та достатні умови їх застосовності для різних просторів аналітичних функцій (див. історичний огляд цих питань в [1]). Значно менше вивчені умови застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку до просторів аналітичних функцій. Деякі з таких досліджень проведені в працях [2]–[4]. Разом з тим практично не досліджені умови застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку до підпросторів простору цілих функцій. При розв'язуванні різноманітних задач комплексного аналізу природним чином виникає простір цілих функцій $[\rho, \sigma]$, $(\rho > 0, 0 \le \sigma < \infty)$, тобто простір функцій, порядок яких менший за ρ або дорівнює ρ, але в останньому випадку тип не перевищує σ. Цей простір і його позначення введені В.Л. Гончаровим при розв'язуванні інтерполяційних задач і грунтовно вивчається в монографіїі [5]. Простір $[\rho, \sigma]$ є лінійним простором і функція $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ належить до простору $[\rho, \sigma]$ тоді і тільки тоді, коли $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|f_n|} \le (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$. Топологія на просторі $[\rho, \sigma]$ задається системою норм $\{||\cdot||_\varepsilon : 0 < \varepsilon < \infty\}$, де

$$||f||_\varepsilon = \max_{0\le r<\infty} \left(\max_{|z|\le r} |f(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon) r^\rho} \right). \qquad (1)$$

В цій статті вивчаються умови поточкової застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку до простору $[\rho, \sigma]$. Система степенів $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ утворює базис у просторі $[\rho, \sigma]$ і $||z^0||_\varepsilon = 1$,

$$||z^n||_\varepsilon = \left(\frac{n}{\rho e(\sigma+\varepsilon)} \right)^{\frac{n}{\rho}}, \ n = 1, 2, \dots .$$

Наведемо деякі допоміжні твердження

Лема 1. *Якщо $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, то числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{||z^n||_\varepsilon}{||z^n||_{\varepsilon_1}}$ збігається.*

Лема 2. *Для кожного $\varepsilon > 0$ і довільних цілих невід'ємних чисел m та n виконується нерівність*

$$||z^m||_\varepsilon ||z^n||_\varepsilon \le ||z^{m+n}||_\varepsilon.$$

Лема 3. *Для довільного $\varepsilon > 0$ і для кожної функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ з простору $[\rho, \sigma]$ при $n = 0, 1, \dots$ виконуються нерівності*

$$|f_n| \le \frac{||f||_\varepsilon}{||z^n||_\varepsilon}. \qquad (2)$$

Доведення. Використовуючи формулу (1) і оцінки Коші для коефіцієнтів розкладу цілої функції $f(z)$ у степеневий ряд, одержуємо

$$|f_n|||z^n||_\varepsilon = |f_n| \max_{0\le r<\infty} \left(r^n e^{-(\sigma+\varepsilon)r^\rho}\right) =$$

$$= \max_{0\le r<\infty} \left(|f_n| r^n e^{-(\sigma+\varepsilon)r^\rho}\right) \le$$

$$\le \max_{0\le r<\infty} \left(\max_{|z|\le r} \left(|f(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon)r^\rho}\right)\right) = ||f||_\varepsilon,$$

звідки випливають нерівності (2).

Нехай $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ – деяка послідовність відмінних від нуля комплексних чисел. Оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$, що побудований за послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$, на елементах степеневого базису діє за правилом:

$$\mathcal{J}_\alpha z^n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z^{n+1},\ n = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для того, щоб оператор узагальненого інтегрування* $\mathcal{J}_\alpha$, *який на елементах степеневого базису визначається співвідношеннями* (3), *можна було лінійним і неперервним чином продовжити до лінійного неперервного оператора, що діє в просторі* $[\rho, \sigma]$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$а)\ \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|} \le 1,\ \text{при } \sigma > 0;$$

$$б)\ \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|} < \infty,\ \text{при } \sigma = 0.$$

Доведення. Необхідність. Допустимо, що оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ лінійно та неперервно діє в $[\rho, \sigma]$. Тоді для нього виконується умова неперевності, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon_1 > 0\ \exists C > 0\ \forall f \in [\rho, \sigma]$$

$$||\mathcal{J}_\alpha f||_\varepsilon \le C ||f||_{\varepsilon_1}.$$

Покладаючи тут $f(z) = z^n$, $n = 0, 1, \ldots$, одержимо, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon_1 > 0\ \exists C > 0\ \forall n \ge 0$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \le C \frac{||z^n||_{\varepsilon_1}}{||z^{n+1}||_\varepsilon}. \tag{4}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдені для нього $\varepsilon_1 > 0$ та $C > 0$ згідно (4). Добуваючи з обох частин нерівності (4) корінь n-го степеня і переходячи в одержаній нерівності до верхньої границі при $n \to \infty$ матимемо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|} \le \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{||z^n||_{\varepsilon_1}}{||z^{n+1}||_\varepsilon}} \le$$

$$\le \frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon_1}.$$

Звідси випливає правильність умов а) та б).

Достатність. Нехай умова а) або б) виконується. Тоді для довільної функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^\infty f_n z^n \in [\rho, \sigma]$ функція $\sum\limits_{n=0}^\infty f_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z^{n+1}$ належить простору $[\rho, \sigma]$. Тому формулою

$$(\mathcal{J}_\alpha f)(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z^{n+1} \tag{5}$$

визначається оператор $\mathcal{J}_\alpha$, який діє в просторі $[\rho, \sigma]$. Його лінійність є очевидною, а неперевність одержується за принципом рівномірної обмеженості, оскільки $\mathcal{J}_\alpha$ є поточковою границею в $[\rho, \sigma]$ послідовності скінченновимірних операторів.

Оператор звичайного інтегрування $\mathcal{J}$, що діє за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$, є частинним випадком оператора узагальненого інтегрування і за теоремою 1 $\mathcal{J}$ лінійно та неперевно діє в кожному з просторів $[\rho, \sigma]$.

Вивчимо далі умови поточкової застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку до простору $[\rho, \sigma]$. Нехай оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ побудований за послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$, яка задовольняє умови теореми 1. Допустимо, що послідовність комплексних чисел $(c_n)_{n=0}^\infty$ така, що ряд

$$\sum_{n=0}^\infty c_n (\mathcal{J}_\alpha^n f)(z) \tag{7}$$

збігається для довільної функції $f \in [\rho, \sigma]$ в кожній точці z комплексної площини. Тоді для кожної фіксованої точки $z \in \mathbb{C}$ і для довільної функції $f \in [\rho,\sigma]$ числова послідовність $(c_n(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z))_{n=0}^\infty$ є обмеженою. Це означає, що послідовність лінійних неперервних функціоналів $(L_n)_{n=0}^\infty$, які на просторі $[\rho,\sigma]$ діють за правилами: $L_n f = c_n(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)$, $n = 0,1,\ldots$, є поточково обмеженою. Оскільки $[\rho,\sigma]$ є простором Фреше, то ця послідовність функціоналів є одностайно неперервною, тобто

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall f \in [\rho,\sigma]\ \forall n = 0,1,\ldots,$$

$$|c_n(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)| \le C||f||_\varepsilon. \tag{8}$$

Покладаючи в (8) $f(z) = z^k$, $k = 0,1,\ldots$, і враховуючи, що $\mathcal{J}_\alpha^n z^k = \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k} z^{n+k}$, одержимо, що

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall n,k = 0,1,\ldots$$

$$|c_n|\left|\frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k}\right||z|^{n+k} \le C||z^k||_\varepsilon. \tag{9}$$

Таким чином, ми довели необхідність умови наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ неперервно діє в просторі $[\rho,\sigma]$, а $(c_n)_{n=0}^\infty$ – деяка послідовність комплексних чисел. Для того, щоб числовий ряд (7) збігався для довільної функції f з простору $[\rho,\sigma]$ в кожній точці z комплексної площини, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова (9).*

Доведення. Достатність. Допустимо, що умова (9) виконується. Візьмемо довільну функцію $f(z) = \sum\limits_{n=0}^\infty f_n z^n$ з простору $[\rho,\sigma]$ і довільну точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Оцінимо загальний член ряду (7) в точці $z = z_0$. Виберемо $z \in \mathbb{C}$ таким, щоб $|z_0| < |z|$, і нехай $\varepsilon > 0$ та $C > 0$ знайдені для вибраного z згідно умови (9). Тоді, використовуючи лему 3, одержимо, що при $n = 0,1,\ldots$

$$|c_n(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z_0)| = \left|c_n \sum_{k=0}^\infty f_k \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k} z_0^{n+k}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^\infty |f_k||c_n|\left|\frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k}\right||z|^{n+k}\left(\frac{|z_0|}{|z|}\right)^{n+k} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^\infty C|f_k|||z^k||_\varepsilon \left(\frac{|z_0|}{|z|}\right)^{n+k} \le$$

$$\le C||f||_\varepsilon \left(\frac{|z_0|}{|z|}\right)^n \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{|z_0|}{|z|}\right)^k.$$

Таким чином, $|c_n(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z_0)| \le C_1(\frac{|z_0|}{|z|})^n$, $n = 0,1,\ldots$, де C_1 – деяка стала. Тому ряд (7) збігається при $z = z_0$. Теорема 2 доведена.

Розглянемо випадок, коли $\mathcal{J}_\alpha$ є звичайним інтегруванням $\mathcal{J}$, тобто $\alpha_n = \frac{1}{n!}$, $n = 0,1,\ldots$. Тоді умова (9) набуває вигляду

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall n,k = 0,1,\ldots$$

$$|c_n|\frac{k!}{(n+k)!}|z|^{n+k} \le C||z^k||_\varepsilon. \tag{10}$$

Зокрема, при $k = 0$ з (10) випливає, що

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall n = 0,1,\ldots$$

$$\frac{|c_n|}{n!} \le \frac{C}{|z|^n}.$$

Звідси одержимо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!}} = 0. \tag{11}$$

Легко перевірити, що з (11) випливає (10) і є правильним наступне твердження.

Наслідок. *Для того, щоб ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty c_n(\mathcal{J}^n f)(z)$ збігався для довільної функції f з простору $[\rho,\sigma]$ в кожній точці z комплексної площини, необхідно і достатньо, щоб послідовність комплексних чисел $(c_n)_{n=0}^\infty$ задовольняла умову (11).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1983.— 154 с.

2. *Кирютенко Ю.А.* Операторы интегрирования и связанные с ними операторы бесконечного порядка.– Дис. канд. физ.-матем. наук.– Ростов н/Д.– 1977.– 105 с.

3. *Линчук С.С.* О применимости дифференциальных и интегральных операторов бесконечного порядка. // Черновицкий гос. ун-т. – 1982. – Деп. в ВИНИТИ 6.04.82. – 25 с.

4. *Лінчук С.С.* Про застосовність інтегральних операторів нескінченного порядку // International conference modern problems and new trends in probability theory. Abstract II.– 2005.– С. 12.

5. *Леонтьев А.Ф.* Обобщение рядов экспонент.– М.: Наука, 1981.–320 с.