УДК 517.51

©2007 р. Н.Є. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ПРО ОДИН КЛАС ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ ОПЕРАТОРИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

В класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах формальних степеневих рядів, які наділені нормальною топологією Кете, описані розв'язки деяких операторних рівнянь, що містять оператори узагальненого диференціювання.

Solutions of the operator equations, which contain operators of the generalized derivation, are described in a class of linear continuous operators which act in spaces of the formal power serieses allocated by the normal Köthe topology.

При вивченні різних класів лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, важливе значення має задача знаходження всіх лінійних неперервних операторів T, що задовольняють рівняння $TA = BT$, де A, B – фіксовані лінійні неперервні оператори, що діють у вказаних просторах. Найважливішими є операторні рівняння вказаного виду, що пов'язані з операторами узагальненого диференціювання. Для розв'язування таких рівнянь в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, використовувалися різні методи: матричний метод [1], інтегральне зображення лінійних неперервних операторів [2], перехід до спряжених операторів [3], характеристичні функції лінійних неперервних операторів [4], зображення лінійних неперервних операторів у вигляді диференціальних операторів нескінченного порядку [5], опис лінійних неперервних операторів за допомогою послідовностей лінійних неперервних функціоналів [6]. У цій статті останній метод розв'язування операторних рівнянь, що містять оператори узагальненого диференціювання, розповсюджується на аналогічні рівняння у класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах формальних степеневих рядів.

Через H позначимо векторний простір над полем комплексних чисел формальних степеневих рядів (ф.с.р.) виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

де $f_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \ldots$. Вважатимемо, що H містить усі многочлени. Через H^α позначимо двоїстий простір до H, тобто H^α – це простір таких ф.с.р. виду $v(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n z^n$, що числові ряди

$$p_v(f) = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n||f_n|$$

збігаються для кожного елемента $f \in H$. Система передноpм $\{p_v : v \in H^\alpha\}$ задає нормальну [7] топологію ν (топологію Кете) на просторі H. Вважатимемо, що простір H досконалий, тобто $H^{\alpha\alpha} = H$. Зауважимо, що умова досконалості простору H рівносильна повноті простору (H, ν).

Нехай (α_n) – така послідовність відмінних від нуля комплексних чисел, що оператор узагальненого диференціювання D_α, який визначається формулою $(D_\alpha f)(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} f_n z^{n-1}$, де $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in H$, діє в просторі H. Оператор D_α є лінійним. Оскільки H – досконалий, то D_α неперервно діє в (H, ν). Система (z^n) утворює базис у просторі (H,ν). Кожен ф.с.р. $f(z)\in H$ єдиним способом розкладається в (H,ν) у ряд виду $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(f)z^n$, де (c_n) – послідовність лінійних неперервних функціоналів на просторі (H,ν).

Нехай H_i – досконалі простори ф.с.р., які містять усі многочлени, $i=1,2$, і T – лінійний неперервний оператор, що діє з (H_1,ν) в (H_2,ν). Тоді для довільного ф.с.р. $f(z)\in H_1$:

$$(Tf)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(f)z^n, \qquad (1)$$

де (L_n) – послідовність лінійних неперервних функціоналів на просторі (H_1,ν), бо $L_n=c_n(T)$, $n=0,1,\ldots$, і ряд в правій частині (1) збігається до $(Tf)(z)$ для довільного ф.с.р. $f(z)\in H_1$ за топологією простору (H_2,ν).

Через $l(H_1,H_2)$ позначимо множину всіх таких послідовностей лінійних неперервних функціоналів (L_n) на просторі (H_1,ν), що довільний лінійний неперервний оператор $T:(H_1,\nu)\to(H_2,\nu)$ подається у вигляді (1), причому ряд в правій частині (1) збігається для кожного ф.с.р. $f(z)\in H_1$ за топологією простору (H_2,ν). У тому випадку, коли простір H_1 є бочковим, за принципом рівномірної обмеженості множина $l(H_1,H_2)$ збігається з множиною усіх послідовностей лінійних неперервних функціоналів (L_n) на просторі (H_2,ν), для яких ряд у правій частині (1) збігається для довільного ф.с.р. $f\in H_1$ за топологією простору (H_2,ν). Зауважимо, що у випадку, коли $H_1=H_2=A_\infty$, де A_∞– простір цілих функцій, що наділений топологією компактної збіжності, множина всіх лінійних неперервних операторів $T:A_\infty\to A_\infty$ описується формулою (1), де (L_n) – послідовність лінійних неперервних функціоналів на A_∞, яка задовольняє умову: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|L_n(f)|}=0$, $\forall f\in A_\infty$. Це зображення лінійних неперервних операторів використовувалося в [8] при побудові оператора перетворення для диференціальних операторів скінченого порядку.

Теорема 1. *Нехай H_i, $i=1,2$, – досконалі простори ф.с.р., які містять усі многочлени, D_α – оператор узагальненого диференціювання, що породжений послідовністю (α_n) і лінійно та неперервно діє в (H_2,ν), A – фіксований лінійний неперервний оператор, який діє в (H_1,ν), а m – деяке натуральне число. Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T:(H_1,\nu)\to(H_2,\nu)$ задовольняв рівність*

$$D_\alpha^m T=TA \qquad (2)$$

необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді

$$(Tf)(z)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\alpha_{qm+r}}{\alpha_r}L_r(A^qf)z^{qm+r}, \qquad (3)$$

де L_i, $i=\overline{0,m-1}$ – деякі лінійні неперервні функціонали на просторі (H_1,ν) для яких виконується умова:
B) $\forall r=\overline{0,m-1}$ послідовність функціоналів $(\alpha_{qm+r}L_r(A^q))_{q=0}^{\infty}$ належить до класу $l(H_1,H_2)$.

Доведення. Необхідність. Нехай лінійний неперервний оператор $T:(H_1,\nu)\to(H_2,\nu)$ задовольняє рівність (2). Тоді T подається у вигляді (1), де (L_n) – деяка послідовність лінійних неперервних функціоналів на (H_2,ν). Оскільки для довільного ф.с.р. $f(z)\in H_1$

$$(D_\alpha^m T)f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{n+m}(f)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}z^n,$$

то рівність (2) рівносильна тому, що

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_{n+m}(f)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(Af)z^n$$

для довільного ф.с.р. $f(z)\in H_1$. Тому

$$L_{n+m}(f)=\frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_n}L_n(Af),\ n=0,1,\ldots\,. \qquad (4)$$

З (4) випливає, що $\forall q=0,1,...,\forall r=\overline{0,m-1}$ виконується рівність:

$$L_{qm+r}(f)=\frac{\alpha_{qm+r}}{\alpha_r}L_r(A^qf).$$

Тому оператор T подається у вигляді (3). З неперервності оператора T випливає, що умова B) виконується.

Достатність. При виконанні умови B), формулою (3) визначається лінійний неперервний оператор $T:(H_1,\nu)\to(H_2,\nu)$. Для довільного ф.с.р. $f(z)\in H_1$ маємо

$$D_\alpha^m(Tf)(z)=$$

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\alpha_{qm+r}}{\alpha_r}L_r(A^qf)(D_\alpha^m z^{qm+r})=$$

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\alpha_{m(q-1)+r}}{\alpha_r}L_r(A^qf)z^{(q-1)m+r}=$$

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\alpha_{qm+r}}{\alpha_r}L_r(A^{q+1}f)z^{qm+r}=T(Af)(z).$$

Теорему 1 доведено.

При $m=1$ з теореми 1 одержуємо наступне твердження.

Наслідок. *Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T:(H_1,\nu)\to(H_2,\nu)$ був розв'язком операторного рівняння $D_\alpha T=TA$ необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді*

$$(Tf)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_0}L_0(A^nf)z^n, \tag{5}$$

де L_0 – деякий лінійний неперервний функціонал на (H_1,ν) для якого виконується умова:
C) послідовність лінійних неперервних функціоналів $(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}L_0(A^n))$ належить до класу $l(H_1,H_2)$.

Для застосування теореми та наслідку з неї до конкретних операторних рівнянь виду (2) та певних просторів ф.с.р. H_1 та H_2 потрібно в зручній формі описати множину $l(H_1,H_2)$ та знайти ті лінійні неперервні функціонали L_i, $i=\overline{0,m-1}$ на просторі (H_1,ν), для яких виконується одна з умов B) чи C).

Розглянемо застосування одержаних результатів для одного класу просторів ф.с.р. і деяких операторних рівнянь.

Нехай (λ_n) – послідовність додатних чисел, яка монотонно зростає і прямує до безмежності, причому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ln n}{\lambda_n}=0$. Для $\sigma\in\mathbb{R}$ розглянемо наступні простори послідовностей комплексних чисел:

$$\mathcal{D}_\sigma=\{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nz^n:\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}\le e^{-\sigma}\};$$

$$\overline{\mathcal{D}}_\sigma=\{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nz^n:\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}< e^{-\sigma}\},$$

(див. [9]). Зауважимо, що спряжений простір до $(\mathcal{D}_\sigma,\nu)$ ізоморфний до простору $\overline{D}_{-\sigma}$. Нехай (α_n) та (β_n) – послідовності відмінних від нуля комплексних чисел, що задовольняють умови:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right|^{\frac{1}{\lambda_n}}\le 1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right|^{\frac{1}{\lambda_n}}\le 1.$$

Тоді оператори узагальненого диференціювання D_α та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\beta$ лінійно та неперервно діють у кожному з просторів $\mathcal{D}_\sigma$ та $\overline{\mathcal{D}_\sigma}$. Дослідимо розв'язки операторного рівняння виду

$$D_\alpha T=T\mathcal{J}_\beta \tag{6}$$

в класі операторів $T:(\mathcal{D}_\sigma,\nu)\to(D_\sigma,\nu)$.

Теорема 2. *Нехай для деякого фіксованого $\sigma<0$ оператори узагальненого диференціювання D_α та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\beta$ лінійно та неперервно діють у просторі $\mathcal{D}_\sigma$, а послідовності комплексних чисел (α_n) та (β_n) задовольняють умови:*
1) $\exists C>0\ \forall k,n\ge 0:|\beta_{k+n}|\le C|\beta_k||\beta_n|$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n\beta_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}=0$.
Тоді загальний розв'язок операторного рівняння (6) в класі лінійних неперервних операторів операторів $T:(\mathcal{D}_\sigma,\nu)\to(\mathcal{D}_\sigma,\nu)$ дається формулою (5), в якій L_0 – довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $\mathcal{D}_\sigma$.

Доведення. За наслідком з теореми 1 достатньо перевірити, що при виконанні умов теореми 2 для довільного лінійного неперервного функціоналу L_0 на просторі $(\mathcal{D}_\sigma, \nu)$ послідовність лінійних неперервних функціоналів $(\frac{\alpha_n}{\alpha_0} L_0(\mathcal{J}_\beta^n))$ належить до класу $l(\mathcal{D}_\sigma, \mathcal{D}_\sigma)$. Нехай L_0 – довільний лінійний неперервний функціонал на просторі $(\mathcal{D}_\sigma, \nu)$. Тоді існує послідовність комплексних чисел (v_n), для якої $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |v_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} < e^\sigma$ і для довільного ф.с.р. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathcal{D}_\sigma$: $L_0 f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n v_n$. Для доведення теореми потрібно перевірити, що для довільного ф.с.р. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathcal{D}_\sigma$ виконується умова:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n L_0(\mathcal{J}_\beta^n f)|^{\frac{1}{\lambda_n}} < e^{-\sigma}. \tag{7}$$

Але $L_0(\mathcal{J}_\beta^n f) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{k+n}}{\beta_k} f_k v_{k+n}$, тому використовуючи умову 1), одержимо, що при $n = 0, 1, \ldots$

$$|L_0(\mathcal{J}_\beta^n f)| \le C|\beta_n| \sum_{k=0}^{\infty} |f_k||v_{n+k}|. \tag{8}$$

Виберемо $\varepsilon_1 > 0$ таким, щоб $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |v_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} < e^{\sigma-\varepsilon_1}$. Тоді існує стала $C_1 > 0$ така, що при $n \ge 0$: $|v_n| \le C_1 e^{(\sigma-\varepsilon_1)\lambda_n}$. Візьмемо $\varepsilon_2 : 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} < e^{-\sigma+\varepsilon_2}$. Тому існує стала $C_2 > 0$ така, що при $n \ge 0$: $|f_n| \le C_2 e^{(-\sigma+\varepsilon_2)\lambda_n}$. Тоді, використовуючи монотонність послідовності (λ_n) і те, що $\sigma < 0$ для довільного натурального n матимемо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k||v_{n+k}| \le C_1 C_2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\lambda_k}.$$

З умови $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$ випливає, що числовий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\lambda_k}$ збігається. Тому, використовуючи (8), одержимо, що при $n \ge 0$

$$|L_0(\mathcal{J}_\beta^n f)| \le C_3 |\beta_n|, \tag{9}$$

де C_3 – деяка стала. З (9) і умови 2) випливає, що (7) виконується.

Умова 1) теореми 2 виконується, наприклад, для послідовності $(\beta_n = \frac{1}{n!})$, яка породжує звичайне інтегрування.

Твердження, аналогічне до теореми 2 буде правильним також і для розв'язків операторного рівняння (6) в класі лінійних неперервних операторів $T : (\overline{\mathcal{D}_\sigma}, \nu) \to (\overline{\mathcal{D}_\sigma}, \nu)$. Як встановлено в [9], простори $\mathcal{D}_\sigma$ та $\overline{\mathcal{D}_\sigma}$, що наділені нормальною топологією, є ізоморфними до просторів аналітичних v_σ та $\overline{v}_\sigma$, що зображаються рядами Діріхле.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фаге М.К., Нагнибида Н.И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов . – Новосибирск; "Наука", 1987. – 280 с.

2. *Коробейник Ю.Ф.* Об одном классе линейных операторов // Годишник на ВТУЗ.Математика. – 1973. – Т. IX. Книга 3. – С. 23-30.

3. *Царьков Ю.М.* Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора дифференцирования. // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1970. – Вып. 2. – С. 86-92.

4.*Подпорин В.П.* О решениях операторного уравнения $p_1(D)A = Ap_2(D)$ в некоторых классах линейных операторов. // Докл. АН СССР.– 1978.–Т.240,N 1.– С.28–31.

5.*Подпорин В.П.* О представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка. // Сиб. матем. ж.– 1976.– Т.17,N 1.– С.148–159.

6.*Лінчук Н.Є.* Про один клас операторних рівнянь, що містять оператори узагальненого диференціювання . // Наук. вісник Чернівецького ун-ту.– 2004.–Вип. 228.– С.42–44.

7. *Köthe G.* Topologische lineare Räume. Bd.1.- Berlin, 1960.- 307 p.

8. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe //Comment. Math. Helv. – 1957. – 32, №2. – p.113-128.

9. *Хапланов М.Г.* О пространстве аналитических функций, представимых одним классом рядов Дирихле // Сиб. матем. журн.— 1976.— **17**, N 5.— С.1141—1159.