УДК 517.96

©2007 р. О.М. Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДО-БЕССЕЛЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним оператором, побудованим за негладким у точці 0 однорідним символом та початковою умовою, яка є узагальненою функцією типу розподілів.

We establish the correct solvability of the Cauchy problem for an evolution equation with an initial condition, the right hand side of which is a generalized function of a distribution type.

У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) на теперішній час добре відомі результати про будову та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК), за допомогою яких одержані інтегральні зображення розв'язків. Псевдодиференціальні оператори (ПДО), які входять до таких рівнянь, формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a – функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. Якщо символ не залежить від t, x (тобто $a=a(\sigma)$), то задача Коші коректно розв'язна в просторі узагальнених функцій типу розподілів; при цьому розв'язок подається у вигляді згортки ФРЗК з початковою умовою, яка є узагальненою функцією.

До псевдодиференціальних рівнянь формально можна віднести і сингулярні еволюційні рівняння з оператором Бесселя (B-параболічні рівняння), який вироджується по певній просторовій змінній, а саме рівняння при цьому вироджується на межі області, оскільки оператор Бесселя

$$B_\nu=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx},\quad \nu>-\frac{1}{2},$$

можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu\varphi=-F^{-1}_{B_\nu}[\sigma^2F_{B_\nu}[\varphi]]$, де F_{B_ν} – перетворення Бесселя, φ – елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для сингулярних параболічних рівнянь побудована в працях М.І.Матійчука, В.В.Крехівського, І.А.Кіпріянова, В,В.Катрахова, С.Д.Івасишена, В.П.Лавренчука, І.І.Веренич та інших математиків. Задача Коші для сингулярних параболічних рівнянь у класах розподілів та у класах узагальнених функцій типу S' та W' вивчалась Я.І.Житомирським, В.В.Городецьким, І.В.Житарюком, В.П.Лавренчуком, О.В.Мартинюк.

До класу псевдодиференціальних рівнянь природно віднести еволюційні рівняння з оператором $A=F^{-1}_{B_\nu}[a\cdot F_{B_\nu}]$, де a – однорідний негладкий у точці 0 символ. Для таких рівнянь задача Коші не вивчена. Оператор A надалі називатимемо псевдо-Бесселевим оператором. Отже, актуальним є питання про розвиток теорії задачі Коші для еволюційного рівняння вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+Au(t,x)=0,\quad t\in(0,T],x\in\mathbb{R}_+,\tag{1}$$

одержання для такого рівняння результатів, подібних до відомих у теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь зі сталим символом $a=a(\sigma)$ (тобто символом, не залежним від t, x). У цій роботі вивчається вказане питання для рівняння (1) в класах початкових даних, які є узагальненими функціями типу розподілів.

1. Простори основних та узагальне-

них функцій. Нехай γ – фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\dots\}$, ν – фіксоване число з множини $\{3/2;5/2;7/2;\dots\}$, $p_0:=2\nu+1$, $\gamma_0:=1+[\gamma]+p_0$, $M(x):=1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$. Елементами простору Φ, за означенням, є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції φ, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k\varphi(x)|\le\frac{c_k}{(1+|x|)^{\gamma_0+k}},$$
$$x\in\mathbb{R}, c_k>0,\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

У Φ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою норм:

$$\|\varphi\|_p:=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\gamma_0+k}|D_x^k\varphi(x)|\right\},$$
$$\varphi\in\Phi, p\in\mathbb{Z}_+.$$

Позначимо через Φ_p поповнення Φ за p-ою нормою. Φ_p – банаховий простір, при цьому, як доведено в [1], вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$, є неперервним, щільним і компактним, $\Phi=\bigcap\limits_{p=0}^{\infty}\Phi_p$, Φ – повний досконалий зліченно нормований простір. Зазначимо, що збіжність послідовності $\{\varphi_j, j\ge1\}\subset\Phi$ у просторі Φ до функції $\varphi\in\Phi$ можна охарактеризувати так [1]: $\{\varphi_j, j\ge1\}\subset\Phi$ збігається за топологією простору Φ до функції $\varphi\in\Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall p\in\mathbb{Z}_+\ \exists c=c(p)>0\ \forall j\ge1:\ \ \|\varphi_j\|_p\le c;$$

2) правильно збігається в Φ, а саме, для довільного $\alpha\in\mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_j-\varphi), j\ge1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожній обмеженій замкненій множині $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}$.

У просторі Φ визначені і неперервні операції зсуву аргументу та диференціювання. Оскільки Φ – досконалий простір, то на підставі загальних результатів теорії досконалих просторів (див. [2]) твердимо, що операція зсуву аргументу в просторі Φ не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна, тобто граничні співвідношення

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to0]{}\varphi'(x)$$

виконуються у розумінні збіжності в просторі Φ.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору Φ. Оскільки $\overset{\circ}{\Phi}$ утворює підпростір Φ, то в $\overset{\circ}{\Phi}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями.

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя F_{B_ν} [3]:

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi)=\int\limits_0^\infty\varphi(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx,\quad \varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$$

(тут j_ν – нормована функція Бесселя). При цьому $F_{B_\nu}[\varphi]$ – парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Наведемо ще деякі властивості функції $F_{B_\nu}[\varphi]$, встановлені в [4]:

1) якщо $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$, то $F_{B_\nu}[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функція;

2) у функції $D_\xi^kF_{B_\nu}[\varphi]$, $\xi\ne0$, $k\in\mathbb{Z}_+$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi\to\pm0}D_\xi^kF_{B_\nu}[\varphi](\xi)$, $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$; при цьому функція $D_\xi^{2k}F_{B_\nu}[\varphi]$, $\xi\ne0$, $k\in\mathbb{N}$, у точці $\xi=0$ має усувний розрив;

3) функції з простору $\overset{\circ}{\Psi}=F_{B_\nu}[\overset{\circ}{\Phi}]$ задовольняють умову:

$$\forall s\in\mathbb{Z}_+\ \exists c_s>0:$$
$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}|\xi^sD_\xi^s\psi(\xi)|\le c_s,\quad \psi\in\overset{\circ}{\Psi}.$$

4) $\xi^sD_\xi^sF_B[\varphi]\in L_1(\mathbb{R})$, $s\in\mathbb{Z}_+$, для довільної функції $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$.

На підставі властивості 3) в праці [4] у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою системи норм

$$\|\psi\|_p:=\sup_{\xi\in(0,\infty)}\left\{\sum_{k=0}^{p}\xi^{2k}|D_\xi^{2k}\psi(\xi)|\right\},$$
$$\psi\in\overset{\circ}{\Psi}, p\in\mathbb{Z}_+.$$

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя [3]:

$$T_x^\xi\varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$.

Говоритимемо, що оператор T_x^ξ визначений у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $T_x^\xi\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ для кожного $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$. У праці [5] доведено, що оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ визначений і неперервний у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi\varphi$ диференційовна у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ (навіть нескінченно диференційовна).

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ введена топологія проективної границі просторів $\overset{\circ}{\Phi}_p$ ($\overset{\circ}{\Phi}_p$ складається з парних функцій простору Φ_p), причому вкладення $\overset{\circ}{\Phi}_{p+1} \subset \overset{\circ}{\Phi}_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні та компактні, то

$$(\overset{\circ}{\Phi})' = (\lim_{p\to\infty} \mathrm{pr}\, \overset{\circ}{\Phi}_p)' = \lim_{p\to\infty} \mathrm{ind}\, (\overset{\circ}{\Phi}_p)'.$$

Отже, якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$, то $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_p)'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ має скінченний порядок.

Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_p)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f*\varphi)(x) =< f_\xi, T_x^\xi\varphi(x) >=< f_\xi, T_\xi^x\varphi(\xi) >,$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, бо операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Оскільки $F_{B_\nu}^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$< F_{B_\nu}[f], \varphi >=< f, F_{B_\nu}^{-1}[\varphi] >, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Звідси, з властивостей лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_{B_\nu}[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{\Psi}$. У праці [5] встановлено, що якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_{B_\nu}[f*\varphi] = F_{B_\nu}[f]\cdot F_{B_\nu}[\varphi]$, при цьому $F_{B_\nu}[f]$ є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.

2. Задача Коші. Нехай a: $\mathbb{R} \to [0,+\infty)$ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma \in (1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\dots\}$, тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$, яка:

1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$;

2) похідні функції a задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists c_k > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} :$$

$$|D_x^k a(x)| \leq c_k |x|^{\gamma-k};$$

3) $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$: $a(x) \geq \delta|x|^\gamma$.

Із властивостей 1) – 3) випливає, що a є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$. У зв'язку з цим розглянемо оператор A: $\overset{\circ}{\Phi} \to \overset{\circ}{\Phi}$, який визначимо за допомогою співвідношення:

$$A\varphi = F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}[\varphi]], \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}.$$

Із властивостей перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає, що a – лінійний і неперервний оператор, який, як ми і домовлялись раніше, називатимемо псевдо-Бесселевим оператором.

Перейдемо до дослідження еволюційного рівняння (1). *Під розв'язком (1) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T],\overset{\circ}{\Phi})$, яка задовольняє це рівняння.*

Передусім дослідимо властивості функції

$$G(t,\sigma) = F^{-1}_{B_\nu}[e^{-ta(x)}](\sigma) \equiv c_\nu \int\limits_0^\infty e^{-ta(x)} \times$$

$$\times j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad t \in (0,T], \sigma \in \mathbb{R}.$$

Із властивостей нормованої функції Бесселя випливає, що G – парна функція аргументу σ при фіксованому $t \in (0,T]$ і нескінченно диференційовна по σ. Отже,

$$D^m_\sigma G(t,\sigma) = \int\limits_0^\infty e^{-ta(x)} D^m_\sigma j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\nu \equiv n + 1/2, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Розглянемо випадок $m = 0$ і скористаємося зображенням бесселевих функцій напівцілого аргументу [6]:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \right\}, \quad x > 0,$$

де $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ – многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ – многочлен степеня $n-1$; при цьому $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$. Оскільки нормована функція Беселя j_ν пов'язана з функцією Бесселя J_ν формулою

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{x^\nu} J_\nu(x), \quad x > 0,$$

то маємо наступне зображення для функції $j_{n+1/2}$:

$$j_{n+1/2}(x) = \frac{c_n}{x^{n+1}} \left\{ \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, x > 0. \tag{2}$$

Урахувавши (2) подамо $G(t,\sigma)$, $\sigma \neq 0$, у вигляді:

$$G(t,\sigma) = \Lambda_1(t,\sigma) + \Lambda_2(t,\sigma),$$

де

$$\Lambda_1(t,\sigma) = \frac{c_n}{\sigma^{n+1}} \int\limits_0^\infty e^{-ta(x)} x^{n+1} \sin\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) \times$$

$$\times P_n\left(\frac{1}{\sigma x}\right) dx,$$

$$\Lambda_2(t,\sigma) = \frac{c_n}{\sigma^{n+1}} \int\limits_0^\infty e^{-ta(x)} x^{n+1} \cos\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) \times$$

$$\times Q_n\left(\frac{1}{\sigma x}\right) dx.$$

Введемо позначення:

$$P_n\left(\frac{1}{\sigma x}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{(\sigma x)^k}, \quad Q_n\left(\frac{1}{\sigma x}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{(\sigma x)^k}.$$

Тоді

$$\Lambda_1(t,\sigma) = c_n \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\sigma^{n+k+1}} I_{1,k}(t,\sigma),$$

$$I_{1,k}(t,\sigma) = \int\limits_0^\infty e^{-ta(x)} x^{n-k+1} \sin\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) dx,$$

$$\Lambda_2(t,\sigma) = c_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{\sigma^{n+k+1}} I_{2,k}(t,\sigma),$$

$$I_{2,k}(t,\sigma) = \int\limits_0^\infty e^{-ta(x)} x^{n-k+1} \cos\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) dx.$$

У подальшому нам потрібні будуть оцінки похідних функції $\exp\{-a(\xi)\}$. Скориставшись формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D^s_x(F(g(x))) = \sum_{m=1}^s \frac{d^m}{dg^m} F(g) \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+\dots+m_l=m \\ m_1+2m_2+\dots+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1! \dots m_l!} \times$$

$$\times\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)^{m_1}\dots\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}g(x)\right)^{m_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $s = m_1 + 2m_2 + \dots + lm_l$, $m = m_1 + \dots + m_l$) та поклавши тут $F = e^g$, $g = -a(x)$ знайдемо, що

$$|D_x^s e^{-a(x)}| \le e^{-\delta|x|^\gamma}\sum_{m=1}^{s} c(m,s)|x|^{\gamma m - s} \qquad (3)$$

(якщо $s = 0$, то сума відсутня, якщо $s = 1$, то $m = 1$ і т.д.).

Оцінимо $I_{1,k}(t,\sigma)$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $x = t^{-1/\gamma}y$ та врахувавши властивість однорідності функції $a(x)$ знайдемо, що

$$I_{1,k}(t,\sigma) = t^{-(n-k+2)/\gamma} I^0_{1,k}(z),$$

де

$$I^0_{1,k}(z) = \int\limits_0^\infty e^{-a(y)}y^{n-k+1}\sin\left(zy - \frac{n\pi}{2}\right)dy,$$

$$z = t^{-1/\gamma}\sigma.$$

Оскільки, за припущенням, $z \ne 0$, то інтегруючи $s = n - k + 2 + [\gamma]$ разів частинами подамо $I^0_{1,k}(z)$ у вигляді:

$$I^0_{1,k}(z) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^{+\infty} e^{-a(y)}y^{n-k+1}\times$$

$$\times\sin\left(zy - \frac{n\pi}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{z^s}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_\varepsilon^{+\infty} D_y^s(e^{-a(y)}y^{n-k+1})\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(zy - \frac{n\pi}{2} + s\frac{\pi}{2}\right)dy + \Phi(\varepsilon,z)\right].$$

Символом $\Phi(\varepsilon,z)$ позначається позаінтегральний вираз, який складається з доданків вигляду $c(y^{n-k+l})^{(l)}(e^{-a(y)})^{(s-1-l)}\cdot\Lambda$, якщо $0 \le l \le n-k$, та доданку $c(e^{-a(y)})^{(s-1-l)}\cdot\Lambda$, якщо $l = n - k + 1$ (c – сталі, конкретні значення яких на даний момент не важливі; $\Lambda = \sin\left(zy - \frac{n\pi}{2} + s\frac{\pi}{2}\right)$ із значеннями в точці $y = \varepsilon$ та у нескінченності). Зазначимо, що якщо $l = n-k+1$, то $s-1-l = [\gamma]$. Звідси та з оцінки (3) випливає, що для $0 < y < 1$ справджується нерівність

$$|D_y^{(s-1-l)}e^{-a(y)}| \equiv |D_y^{[\gamma]}e^{-a(y)}| \le cy^{\gamma-[\gamma]} = cy^{\{\gamma\}}.$$

Якщо $0 \le l \le n-k$, то $(y^{n-k+1})^{(l)} = \mathrm{const}\cdot y^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,z) = 0$ для кожного z. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль за рахунок спадання на нескінченності функції $\exp\{-a(y)\}$ та її похідних.

Отже, врахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій дістанемо, що оцінка $|I^0_{1,k}|$ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду:

$$|I^0_{1,k}(z)| \le \frac{1}{|z|^s}\int\limits_0^\infty |D_y^s(e^{-a(y)})y^{n-k+1}|dy \le$$

$$\le \frac{1}{|z|^s}\left[\int\limits_0^\infty |D_y^s(e^{-a(y)})|\cdot y^{n-k+1}dy +\right.$$

$$+s(n-k+1)\int\limits_0^\infty |D_y^{s-1}(e^{-a(y)})|y^{n-k}dy + \dots +$$

$$+\frac{(n-k+1)!}{(n-k+1-j)!}C_s^{s-j}\int\limits_0^\infty |D_y^{s-j}(e^{-a(y)})|\times$$

$$\times y^{n-k+1-j}dy + \dots +$$

$$\left.+(n-k+1)!\int\limits_0^\infty |D_y^{1+[\gamma]}(e^{-a(y)})|dy\right]. \qquad (4)$$

Із оцінок похідних функції $\exp\{-a(y)\}$ випливає, що всі інтеграли є збіжними. Справді, розглянемо один з інтегралів у сумі (4), який відповідає індексу $n-k+1-j$. В околі точки $y = 0$ ($0 < y < 1$) підінтегральна функція внаслідок (3), допускає оцінку

$$y^{n-k+1-j}|D_y^{s-j}(e^{-a(y)})| \le cy^{n-k+1-j}\cdot y^{\gamma-(s-j)} =$$

$$= cy^{\{\gamma\}-1} = \frac{c}{y^{1-\{\gamma\}}},$$

звідки і випливає збіжність відповідного інтеграла, бо $0 < 1 - \{\gamma\} < 1$.

Отже, якщо $\sigma \neq 0$, то

$$|\Lambda_1(t,\sigma)| \leq c_{n,\nu} \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot t^{-(n+k+1)/\gamma} \cdot t^{-(n-k+2)/\gamma} \times$$

$$\times z^{-(n+k+1)} |I^0_{1,k}(z)| \leq c_{n,\nu} \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k t^{-(2n+3)/\gamma} \times$$

$$\times |z|^{-(n+k+1)} \cdot |z|^{-(n-k+2+[\gamma])} =$$

$$= t^{-(2n+3)/\gamma} \cdot |z|^{-(2n+3+[\gamma])} c_{n,\nu} \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k, z = t^{-1/\gamma}\sigma.$$

Зауважимо, що

$$|I^0_{1,k}(z)| \leq \int_0^\infty e^{-a(y)} y^{n-k+1} dy \equiv c_k, \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{z\to 0} I^0_{1,k}(z) = -\sin\frac{n\pi}{2} \int_0^\infty e^{-a(y)} y^{n-k+1} dy \equiv \alpha_k,$$

$$|\alpha_k| \leq c_k.$$

Звідси дістаємо, що

$$|\Lambda_1(t,\sigma)| \leq c_1 t^{-(2n+3)/\gamma} \cdot t^{(2n+3+[\gamma])/\gamma} \times$$

$$\times (t^{1/\gamma} + |\sigma|)^{-(1+\tilde{\gamma}_0)} =$$

$$= c_1 t^{[\gamma]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |\sigma|)^{-(1+\tilde{\gamma}_0)}, \tilde{\gamma}_0 = [\gamma] + p_0,$$

$$p_0 = 2\nu + 1 \equiv 2n + 2.$$

Аналогічно оцінюємо $|\Lambda_2(t,s)|$. Таким чином, правильною є нерівність

$$|G(t,\sigma)| \leq ct^{[\gamma]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |\sigma|)^{-(1+\tilde{\gamma}_0)}, \sigma \in \mathbb{R},$$

де стала c не залежить від t.

За наведеною вище схемою розглядаємо випадок $m \in \mathbb{N}$.

В результаті прийдемо до нерівності:

$$|D^m_\sigma G(t,\sigma)| \leq \alpha_m t^{[\gamma]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |\sigma|)^{-(m+1+\tilde{\gamma}_0)}, \tag{5}$$

$$t \in (0,T], \sigma \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \tilde{\gamma}_0 = [\gamma] + p_0,$$

де стала α_m не залежить від t.

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *При кожному $t \in (0,T]$ $G(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Для функції G та її похідних правильними є оцінки (5).*

Оскільки $j_\nu(0) = 1$, $a(0) = 0$,

$$e^{-ta(\xi)} = F_{B_\nu}[G(t,\sigma)](\xi) =$$

$$= \int_0^\infty G(t,\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

то звідси дістаємо, що має місце формула

$$\int_0^\infty G(t,\sigma)\sigma^{2\nu+1} d\sigma = 1.$$

Функція G є розв'язком рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}_{B_\nu}[e^{-ta(\xi)}] = F^{-1}_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-ta(\xi)}\right].$$

З іншої сторони,

$$AG(t,\sigma) = F^{-1}_{B_\nu}[a(\xi) F_{B_\nu}[G(t,\sigma)]] =$$

$$= F^{-1}_{B_\nu}[a(\xi) e^{-ta(\xi)}] = -F^{-1}_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-ta(\xi)}\right].$$

Звідси вже випливає, що функція G задовольняє рівняння (1).

Теорема 2. *$G(t,\cdot) \to \delta$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$.*

Доведення. Урахувавши, що $\int_0^\infty G(t,x) x^{2\nu+1} dx = 1$, для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ маємо:

$$| < G(t,\cdot), \varphi > - < \delta, \varphi > | =$$

$$= \left| \int_0^\infty G(t,x) x^{2\nu+1} \varphi(x) dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty G(t,x) x^{2\nu+1} \varphi(0) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty |G(t,x)|x^{2\nu+1}|\varphi(x)-\varphi(0)|dx \equiv I(t).$$

Для доведення твердження досить показати, що

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists t_0 = t_0(\varepsilon) \;\; \forall t :$$

$$0 < t < t_0 \Rightarrow I(t) < \varepsilon.$$

Оскільки $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, то застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x| \leq M \cdot |x|$, де $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|$. Візьмемо тепер ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta = t_0^{1/(2\gamma)}$. Тоді $|\varphi(x)-\varphi(0)| < M \cdot \varepsilon^{1/(2\gamma)}$, якщо тільки $|x| < t_0^{1/(2\gamma)}$. Отже,

$$I(t) < M\cdot\varepsilon^{1/(2\gamma)} \cdot \int_0^{t_0^{1/(2\gamma)}} |G(t,x)|x^{2\nu+1}dx +$$

$$+ \int_{t_0^{1/(2\gamma)}}^{+\infty} |G(t,x)|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|x^{2\nu+1}dx \equiv$$

$$\equiv M\cdot\varepsilon^{1/(2\gamma)} I_1(t) + I_2(t).$$

Оцінимо $I_1(t)$. Легко бачити, що

$$I_1(t) \leq \int_0^\infty |G(t,x)|x^{2\nu+1}dx.$$

Поклавши $x = t^{1/\gamma}y$ дістанемо, що

$$\int_0^\infty |G(t,x)|x^{2\nu+1}dx = t^{(2\nu+2)/\gamma}\times$$

$$\times \int_0^\infty |G(t,t^{1/\gamma}y)|y^{2\nu+1}dy.$$

Але, внаслідок однорідності функції a маємо, що

$$G(t,t^{1/\gamma}y) =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty e^{-ta(\xi)} j_\nu(t^{1/\gamma}y\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \overset{t^{1/\gamma}\xi=\eta}{=}$$

$$= c_\nu t^{-(2\nu+2)/\gamma} \int_0^\infty e^{-a(\eta)} j_\nu(\eta y) y^{2\nu+1}dy =$$

$$= t^{-(2\nu+2)/\gamma} G_0(y),$$

де

$$G_0(y) = F_{B_\nu}^{-1}[e^{-a(\eta)}](y).$$

Отже,

$$I_1(t) \leq \int_0^{+\infty} |G_0(y)|y^{2\nu+1}dy = b < +\infty, \quad \forall t > 0.$$

Далі, врахувавши обмеженість функції φ на $\mathbb{R}$, а також оцінку

$$|G(t,x)| \leq \frac{\alpha_0 t^{[\gamma]/\gamma}}{(t^{1/\gamma}+|x|)^{1+[\gamma]+2\nu+1}},$$

для кожного t: $0 < t < t_0 = \varepsilon$ прийдемо до нерівності:

$$I_2(t) \leq 2\alpha_0 c t^{[\gamma]/\gamma} \int_{t_0^{1/(2\gamma)}}^\infty \frac{dx}{x^{1+[\gamma]}} = \frac{2\alpha_0 c}{[\gamma]} t^{[\gamma]/\gamma}\times$$

$$\times t_0^{-[\gamma]/(2\gamma)} < \frac{2\alpha_0 c}{[\gamma]} t_0^{[\gamma]/(2\gamma)} \equiv b_1 \cdot \varepsilon^{[\gamma]/(2\gamma)},$$

$$c = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon \in (0,T) \;\; \exists t_0 = \varepsilon \;\; \forall t :$$

$$0 < t < \varepsilon \Rightarrow I(t) < Mb\varepsilon^{1/(2\gamma)} + b_1\varepsilon^{[\gamma]/(2\gamma)}.$$

Аналогічна оцінка встановлюється для довільного $\varepsilon \geq T$; при цьому за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Цим доведено, що

$$< G(t,\cdot), \varphi > \longrightarrow < \delta, \varphi >, \quad t \to +0,$$

для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай* $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$,

$$\omega(t,x) = (f * G)(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}.$$

Тоді граничне співвідношення $\omega(t,\cdot) \to f$, $t \to +0$, *виконується у просторі* $(\overset{\circ}{\Phi})'$.

Зауваження 1. *Надалі функцію $G(t,\cdot)$ називатимемо фундаментальним розв'язком задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1).*

Символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$ позначатимемо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Для рівняння (1) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \tag{6}$$

де $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. *Під розв'язком задачі Коші (1), (6) розумітимемо розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкову умову (6) у тому сенсі, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$.* Правильним є наступне твердження.

Теорема 3. *Задача Коші (1), (6) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. Розв'язок подається у вигляді згортки:*

$$u(t,x) = (f{*}G)(t,x), (t,x) \in (0,T]{\times}\mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+,$$

де G – ФРЗК для рівняння (1).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f{*}G)(t,x) = \left(f{*}\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right) =$$

$$= f * \frac{\partial}{\partial t}G(t,x),$$

$$Au(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[a(\xi)F_{B_\nu}[(f*G)](\xi)](x).$$

Оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то

$$F_{B_\nu}[f*G](\xi) = F_{B_\nu}[f](\xi)\cdot F_{B_\nu}[G] =$$

$$= F_{B_\nu}[f](\xi)\cdot e^{-ta(\xi)}.$$

Отже,

$$Au(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[a(\xi)e^{-ta(\xi)}F_{B_\nu}[f](\xi)](x) =$$

$$= -F^{-1}_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t}e^{-ta(\xi)}F_{B_\nu}[f](\xi)\right](x) =$$

$$= -F^{-1}_{B_\nu}\left[F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right]\cdot F_{B_\nu}[f]\right](x) =$$

$$= -F^{-1}_{B_\nu}\left[F_{B_\nu}\left[f*\frac{\partial}{\partial t}G\right]\right](x) = -f*\frac{\partial}{\partial t}G(t,x).$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, задовольняє рівняння (1). З наслідку 1 випливає, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$, тобто u – розв'язок задачі Коші (1), (6). Зазначимо також, що u неперервно залежить від початкової функції f, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (1), (6) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A^*v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0]\times(0,\infty) \equiv \Omega'_+,$$

$$0 \le t < t_0 \le T, \tag{7}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = g_0, \quad g_0 \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)', \tag{8}$$

де $A^* = A$ – звуження спряженого оператора до оператора A на простір $\overset{\circ}{\Phi} \subset (\overset{\circ}{\Phi})'$. Умова (8) розуміється в слабкому сенсі. Розглянемо функцію

$$G^*(t-t_0,x) = F^{-1}_{B_\nu}[e^{(t-t_0)a(\xi)}](x).$$

Аналогічно тому, як це було зроблено у випадку задачі Коші (1), (6) доводимо, що розв'язок задачі Коші (7), (8) дається формулою

$$v(t,x) = (g_0 * G^*)(t-t_0,x), \quad (t,x) \in \Omega'_+,$$

при цьому $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi}$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0} : (\overset{\circ}{\Phi}_*)' \to \overset{\circ}{\Phi}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$ розв'язок $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi}$ задачі (7), (8) з початковою узагальненою функцією g:

$$\forall g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)' : Q^t_{t_0}g = (g{*}G^*)(t-t_0,x) \equiv v(t,x),$$

$$(t,x) \in \Omega'_+.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)' : \frac{dQ^t_{t_0}g}{dt} - A^* Q^t_{t_0} g = 0,$$

$$\lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0} g = g$$

(границя розглядається у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$).

Розглянемо тепер розв'язок $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_+$, задачі Коші (1), (6), який трактуватимемо як функціонал з простору $(\overset{\circ}{\Phi})' \supset \overset{\circ}{\Phi}$. Доведемо, що задача Коші (1), (6) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t, x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t, x)$ до функції $Q^t_{t_0} g \in \overset{\circ}{\Phi} \subset (\overset{\circ}{\Phi})'$, де g – довільний елемент з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Диференціюючи по t знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t} < u(t, \cdot), Q^t_{t_0} g >= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0} g \right\rangle +$$

$$+ \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0} g}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= - < Au, Q^t_{t_0} g > + < u, A^* Q^t_{t_0} g >=$$

$$= - < Au, Q^t_{t_0} g > + < Au, Q^t_{t_0} g >= 0,$$

$$\forall g \in \overset{\circ}{\Phi}, 0 < t < t_0 \leq T.$$

Звідси випливає, що $< u(t, \cdot), Q^t_{t_0} g >$ є сталою величиною. Використовуючи початкову умову $u|_{t=0} = 0$ знаходимо, що ця величина рівна нулю при всіх t, $0 < t < t_0$. Зокрема, при $t \to t_0$ (у слабкому розумінні границі) дістаємо, що $< u(t_0, \cdot), g >= 0$. Оскільки g – довільний елемент з простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то $u(t_0, \cdot)$ є нульовим функціоналом. Оскільки $t_0 \in (0, T]$ вибране довільно, то $u(t, \cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0, T]$.

Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай* $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$,

$$\omega(t, x) = (f * G)(t, x) =< f_\xi, T^\xi_x G(t, x) >\equiv$$

$$\equiv< f_\xi, T^x_\xi G(t, \xi) >, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}.$$

Якщо $f = 0$ *на інтервалі* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, *який містить точку 0, то* $\omega(t, x) \to 0$ *при* $t \to +0$ *рівномірно на довільному відрізку* $[-c, c] \subset (a, b)$.

Доведення. Нехай $[-c, c] \subset [-b_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо фінітну парну функцію $\nu \in \Phi$ таку, що $\operatorname{supp} \nu = [-b_1, b_1]$, $0 \leq \nu(\xi) \leq 1$, $\forall \xi \in [-b_1, b_1]$; $\nu(\xi) = 1$, $\forall \xi \in [-c, c]$; $\nu(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-b_1, b_1]$. Зазначимо, що функція $1 - \nu$ є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Оскільки

$$\{\nu(\xi) T^\xi_x G(t, x), (1 - \nu(\xi)) T^\xi_x G(t, x)\} \subset \overset{\circ}{\Phi}$$

як функції ξ при кожному $t \in (0, T]$ і $x \in \mathbb{R}$, то

$$\omega(t, x) =< f_\xi, \nu(\xi) T^\xi_x G(t, x) > +$$

$$+ < f_\xi, \eta(\xi) T^\xi_x G(t, x) >,$$

де $\eta = 1 - \nu$. Урахувавши, що узагальнена функція f рівна нулю на інтервалі (a, b), а $\operatorname{supp} (\nu(\xi) T^\xi_x G(t, x)) \subset (a, b)$, з останнього співвідношення дістаємо, що

$$\omega(t, x) = t^\alpha < f_\xi, t^{-\alpha} \eta(\xi) T^\xi_x G(t, x) >,$$

де $\alpha > 0$ – деякий параметр, конкретне значення якого ми вкажемо пізніше. Оскільки кожна узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ має скінченний порядок, тобто $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_p)'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$, то

$$|\omega(t, x)| \leq t^\alpha \|f\|_p \cdot \|\Psi_{t,x}\|_p,$$

де

$$\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-\alpha} \eta(\xi) T^\xi_x G(t, x) \equiv t^{-\alpha} \eta(\xi) T^x_\xi G(t, \xi),$$

$\|f\|_p$ – норма функціоналу f. Отже, для доведення того, що $\omega(t, x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на відрізку $[-c, c] \subset (a, b)$ досить встановити, що сукупність функцій $\Psi_{t,x}$ обмежена за нормою простору Φ_p, тобто $\|\Psi_{t,x}\|_p \leq c_p$, причому стала c_p не залежить від параметрів t і x, які змінюються вказаним способом ($t \in (0, T]$, $x \in [-c, c]$). Оскільки $\Psi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [-c, c]$, то оцінку $\|\Psi_{t,x}\|_p \leq c_p$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-c, c]$.

Функція $\nu \in \Phi = \bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi_j$, тобто $\nu \in \Phi_p$, тому

$$\|\nu\|_p = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} |D_\xi^k \nu(\xi)| \right\} \leq c_0,$$

$$c_0 = c_0(p) > 0.$$

Тоді, урахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій та властивості оператора узагальненого зсуву аргументу знайдемо, що

$$\Delta(\xi) := \sum_{k=0}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} |D_\xi^k(\eta(\xi) T_\xi^x G(t,\xi))| =$$

$$= M(\xi)^{\gamma_0} |(1-\nu(\xi)) T_x^\xi G(t,\xi)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} |D_\xi^k((1-\nu(\xi)) T_\xi^x G(t,\xi))| \leq$$

$$\leq 2M(\xi)^{\gamma_0}|G(t,\xi)| + \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k} C_k^l |D_\xi^l \nu(\xi)| \cdot |D_\xi^{k-l}(T_\xi^x G(t,\xi))|.$$

У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу. Отже,

$$T_\xi^x G(t,\xi) = c_\nu T_\xi^x \left(\int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} T_\xi^x j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Звідси випливає, що

$$D_\xi^m (T_\xi^x G(t,\xi)) =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, m \in \mathbb{N}.$$

Із властивостей оператора узагальненого зсуву аргументу та нормованої функції Бесселя випливає, що

$$\sup_{x\in[-c,c]} |D_\xi^m (T_\xi^x G(t,\xi))| \leq \beta_m t^{[\gamma]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |\xi|)^{-(m+\gamma_0)},$$

$$\xi \in \mathbb{R}, t > 0, m \in \mathbb{Z}_+, \gamma_0 = 1 + [\gamma] + p_0, p_0 = 2\nu + 1,$$

стала β_m залежить від ν і не залежить від t. Для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-c,c]$ маємо, що

$$\sup_{x\in[-c,c]} |D_\xi^m (T_\xi^x G(t,\xi))| \leq \beta_m t^{[\gamma]/\gamma} \cdot |\xi|^{-(m+\gamma_0)},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$\Delta(\xi) \leq 2\beta_0 t^{[\gamma]/\gamma} M(\xi)^{\gamma_0} |\xi|^{-\gamma_0} + c_0 t^{[\gamma]/\gamma} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \beta_{k-l} M(\xi)^{-(\gamma_0+l)} \times$$

$$\times |\xi|^{-(k-l+\gamma_0)} = t^{[\gamma]/\gamma} \left(2\beta_0 \left(\frac{M(\xi)}{|\xi|} \right)^{\gamma_0} + \right.$$

$$\left. + c_0 c^{-\gamma_0} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=0}^{k} C_l^l \beta_{k-l} \left(\frac{M(\xi)}{|\xi|} \right)^{k-l} \right).$$

Далі, врахувавши нерівність

$$\frac{M(\xi)}{|\xi|} = \frac{1+|\xi|}{|\xi|} \leq 1 + \frac{1}{c}, \quad \forall \xi : |\xi| \geq c,$$

знайдемо, що $\Delta(\xi) \leq \nu_0 \cdot t^{[\gamma]/\gamma}$, де

$$\nu_0 = 2\beta_0 \left(1 + \frac{1}{c} \right)^{\gamma_0} +$$

$$+ c_0 c^{-\gamma_0} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \beta_{k-l} \left(1 + \frac{1}{c} \right)^{k-l},$$

стала ω_0 не залежить від t і x. Покладемо тепер $\alpha = [\gamma]/\gamma$. Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{t,x}\|_p \leq \nu_0$. Тоді

$$|\omega(t,x)| \leq \nu_0 \cdot \|f\|_p \cdot t^{[\gamma]/\gamma} \equiv \nu_1 t^{[\gamma]/\gamma},$$

де стала ν_1 не залежить від t і x. Цим доведено, що $\omega(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на відрізку $[-c,c] \subset (a,b)$.

Теорема доведена.

Символом $\overset{\circ}{M}_\Phi$ позначимо клас усіх мультиплікаторів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Теорема 5 (властивість локалізації). *Нехай $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі Коші (1), (6), побудований за функцією f. Якщо узагальнена функція f збігається на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$, який містить точку 0, з функцією $g \in \overset{\circ}{M}_\Phi$, то $u(t,x) \to g(x)$ при $t \to +0$ на довільному відрізку $[-c,c] \subset (a,b)$.*

Доведення. Нехай $[-c,c] \subset [-b_1,b_1] \subset (a,b)$, ν – основна функція, побудована при доведенні теореми 4. Оскільки $\nu(f-g)=0$ на (a,b), то за доведеним у теоремі 4

$$< \nu(f-g), T_\xi^x G(t,\xi) > \to 0, \quad t \to +0,$$

$$< (1-\nu)f, T_\xi^x G(t,\xi) > \to 0, \quad t \to +0,$$

рівномірно по $x \in [-c,c]$. Крім того,

$$u(t,x) =< f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi) >=$$

$$=< \nu(f-g), T_\xi^x G(t,\xi) > +$$

$$+ < (1-\nu)f, T_\xi^x G(t,\xi) > + < \nu g, T_\xi^x G(t,\xi) >,$$

причому

$$< \nu g, T_\xi^x G(t,\xi) >=$$

$$= \int_0^\infty T_\xi^x G(t,\xi)\nu(\xi)g(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \equiv I(t,x).$$

Отже, для доведення теореми досить встановити, що $I(t,x) \to (\nu g)(x)$ при $t \to +0$ на відрізку $[-c,c] \subset (a,b)$. Із властивостей функції νg та оператора узагальненого зсуву аргументу випливає, що

$$\int_0^\infty T_\xi^x G(t,\xi)\nu(\xi)g(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int_0^\infty G(t,\xi)T_\xi^x(\nu(\xi)g(\xi))\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Таким чином,

$$I(t,x) =< G(t,\xi), T_\xi^x(\nu(\xi)g(\xi)) > .$$

Оскільки $\nu g \in \overset{\circ}{M}_\Phi$, то на підставі теореми 2 твердимо, що

$$I(t,x) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} < \delta_\xi, T_\xi^x(\nu(\xi)g(\xi)) > \equiv$$

$$\equiv < \delta_\xi, T_x^\xi(\nu(x)g(x)) >=$$

$$= T_x^0(\nu(x)g(x)) = b_\nu \cdot \int_0^\pi \nu(x)g(x)\sin^{2\nu}\omega d\omega =$$

$$= b_\nu \nu(x)g(x) \cdot \int_0^\pi \sin^{2\nu}\omega d\omega,$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Скориставшись формулою

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu}\omega d\omega = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu \geq 0,$$

знаходимо, що $I(t,x) \to \nu(x)g(x)$ при $t \to +0$ у кожній точці $x \in [-c,c]$. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

3. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.

4. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно диференційовних функцій // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2007. Вип. 15. – С. 51 – 66.

5. *Ленюк О.М.* Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів // Науковий вісник Чернівецького університету: Вип. 336 – 337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 95 – 102.

6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.