УДК 517.51

©2007 р. Крецу В.І., Маслюченко В.К.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

# НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА СТЕЛЛІНҐЗОМ, НАРІЗНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ФУНКЦІЇ З ЗАМКНЕНИМ ГРАФІКОМ

Доведено, що кожна неперервна за Стеллінґзом функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з замкененим графіком є неперервною.

We prove that every Stallings' continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with closed graph is continuous.

**1.** У математиці XX століття з'явилося багато ослаблень поняття неперервності, як-от: квазінеперервність, майже неперервність, ледь неперервність, тощо (див. огляди [1-3] і вказану там літературу). Ще одне з таких понять, про яке не згадується в оглядах [1-3], увів Дж. Стеллінґз у праці [4] під назвою "майже неперервність". Оскільки цей термін зараз прийнято вживати в іншому сенсі, як у [3], то ми будемо називати введене Стеллінґзом поняття неперервністю за Стеллінґзом. А саме, нехай $X$ і $Y$ – топологічні простори і $f : X \to Y$ – деяке відображення. Ми кажемо, що $f$ – *неперервне за Стеллінґзом*, якщо для кожної відкритої множини $W$ у добутку $X \times Y$, яка містить графік $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ відображення $f$, існує таке неперервне відображення $g : X \to Y$ , що $Gr(g) \subseteq W$. Неперервні за Стеллінґзом відображення ми будемо коротше називати *$S$-неперервними*. Це поняття вивчалося у працях [5-7]. Виявляється [6], що $S$-неперервних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ настільки багато, що кожна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ є сумою двох $S$-неперервних функцій. Цей результат уточнив З.Ґранде в [7]. Крім того, в праці [7] було наведено приклад нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не є $S$-неперервною. Тут ми розвиваємо конструкцію Ґранде, пропонуючи загальний метод побудови не $S$-неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, який показує, що крім прикладу Ґранде і класична нарізно неперервна функція Шварца, що задається співвідношенням $sp(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, якщо $(x, y) \neq (0, 0)$, і $sp(0, 0) = 0$, не є $S$-неперервною. Цей результат був анонсований у [8].

У праці [9] досліджувалося питання: які умови треба додати до того чи іншого ослаблення неперервності, щоб отримати звичайну неперервність. Зокрема там були встановлені теореми про неперервність функцій, які мають замкнений графік і є ослаблено неперервними в тому чи іншому сенсі.

Серед різних ослаблень неперервності, які розглядалися в [9] не було $S$-неперервності. Тому виникло природне бажання дослідити: по-перше, як пов'язані між собою $S$-неперервність і наявність у функції замкненого графіка і, по-друге,чи гарантують $S$-неперервність і наявність у функції замкненого графіка звичайну неперервність.

К.Е.Барґес [10] помітив, що кожна локально обмежена функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком обов'язково неперервна. Зауважимо далі, що функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком самі по собі не дуже розривні. А саме, І.Баґґс [11] показав, що підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ є множиною точок розриву деякої функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і ніде не щільна в $\mathbb{R}$.

Результат Баґґса узагальнив Й.Добош у [12], який довів, що для довільного топологічного простору $X$, множина $D(f)$ точок розриву функції $f : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є замкненою множиною першої категорії в $X$ і, навпаки, кожна замкнена множина першої категорії в досконало нормальному просторі $X$ є множиною точок розриву деякої функції $f : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком.

Таким чином, ми бачимо, що функції із замкненим графіком, як правило, не дуже розривні. Тому первісні спроби пояснення того, що $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною, базувалося на результатах Барґеса і Баґґса. Так в [13] було анонсовано результат про те, що кожна $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі замкненим графіком та ізольованими розривами є неперервною. Доведення здійснювалося на основі теореми Барґеса. Далі в [14] було оголошено, що з допомогою теореми Баґґса умову ізольованості розривів можна зняти. Детальніший аналіз первісного доведення цього факту виявив одну перешкоду, яку не вдалося подолати. В пошуках інших підходів ми ввели новий клас функцій, названих нами перехідними, і встановили, що кожна перехідна $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною. Оскільки кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є перехідною, то тим самим ми отримали позитивну відповідь на поставлене вище питання.

**2.** Почнемо наш виклад з наведення двох прикладів, які показують, що $S$-неперервність і наявність замкненого графіка для відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ніяк не пов'язані між собою.

**Твердження 1.** *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка задається формулою: $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 0$, має замкнений графік в $\mathbb{R}^2$, але не є $S$-неперервною.*

**Доведення.** Ми будемо використовувати просте твердження про те, що графік неперервного відображення $f : X \to Y$ зі значеннями у гаусдорфому просторі $Y$ обов'язково замкнений у добутку $X \times Y$. Розглянемо множину $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, яка, очевидно, відкрита в $\mathbb{R}$. Оскільки звуження $g = f|_G$ неперервне, то $Gr(g)$ є замкненою множиною в добутку $G \times \mathbb{R}$, а значить, його доповнення в множині $G \times \mathbb{R}$ є відкритою множиною в $G \times \mathbb{R}$, а тому і в $\mathbb{R}^2$, бо $G \times \mathbb{R}$ є відкритою в $\mathbb{R}^2$. Тому для того, щоб встановити, що множина $H = \mathbb{R}^2 \setminus Gr(f)$ є відкритою в $\mathbb{R}^2$, досить довести, що кожна точка $p_0 = (0, y_0)$, де $y_0 \neq 0$, є внутрішньою для $H$. Але це легко випливає з того, що $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$. Таким чином, $Gr(f)$ замкнений в $\mathbb{R}^2$, бо його доповнення $H$ відкрите в $\mathbb{R}^2$.

Покажемо, що $f$ не є $S$-неперервною функцією. Розглянемо три множини:

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ і } x + y > 1\},$$

$$W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0 \text{ і } x+y < -1\},$$

$$W_3 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^2.$$

Зрозуміло, що всі ці множини і множина $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ відкриті в $\mathbb{R}^2$. Крім того, множини $W_1, W_2$ і $W_3$ попарно не перетинаються. Оскільки $x + \frac{1}{x} \geq 2$ для всіх $x > 0$, то $Gr(f|_{(0,+\infty)}) \subseteq W_1$, $Gr(f|_{(-\infty,0)}) \subseteq W_2$ і $(0, 0) \in W_3$, отже, $Gr(f) \subseteq W$. Якщо припустити, що функція $f$ є $S$-неперервною, то існує неперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у якої $Gr(g) \subseteq W$. Розглянемо три точки $p_1 = (1, g(1)), p_2 = (-1, g(-1))$ і $p_3 = (0, g(0))$. Зрозуміло, що $p_i \in W_i \cap Gr(g)$, отже $W_i \cap Gr(g) \neq \emptyset$ для кожного $i = 1, 2, 3$. Графік $Gr(g)$ – це зв'язна множина, адже він є образом числової прямої $\mathbb{R}$, що є зв'язною множиною, при неперервному відображенні $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x, g(x))$. Але зв'язну множину не можна розбити на три непорожні і відкриті в ній частини. Тому $f$ не є $S$-неперервною функцією.

**Твердження 2.** *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка задається формулою: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 0$, є $S$-неперервною, а її графік $Gr(f)$ не є замкненою підмножиною $\mathbb{R}^2$.*

**Доведення.** Нехай $W$ – відкрита в $\mathbb{R}^2$ множина, така, що $Gr(f) \subseteq W$. Зокрема, точка $(0, 0) \in W$, бо $f(0) = 0$, тобто $(0, 0) \in Gr(f)$. Оскільки множина $W$ відкрита, то існує таке $\delta > 0$, що $[-\delta, \delta]^2 \subseteq W$. Розглянемо нулі функції $f$, тобто точки $x_n = \frac{1}{n\pi}$, де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Оскільки $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер $N$, що $|x_n| \le \delta$ при $|n| \ge N$. Розглянемо тепер функцію $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ при $|x| \ge \frac{1}{N\pi}$ і $g(x) = 0$ при $|x| < \frac{1}{N\pi}$. Зрозуміло, що ця функція неперервна і $Gr(g) \subseteq W$.

Легко переконатися в тому, що $Gr(f)$ не є замкненою множиною в $\mathbb{R}^2$. Для цього розглянемо точки $a_n = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$ при $n \in \mathbb{N}$, в яких $f(a_n) = 1$. Точки $p_n = (a_n, 1)$ належать до $Gr(f)$ і $p_n \to p_0 = (0, 1)$ при $n \to \infty$. Але при цьому $p_0 \notin Gr(f)$. Це показує, що множина $Gr(f)$ не замкнена в $\mathbb{R}^2$.

**3.** Приступимо тепер до викладу загального способу побудови функцій $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, які не є $S$-неперервними. Нагадаємо, що символом $D(f)$ ми позначаємо множину точок розриву функції $f$, а символом $C(f)$ – множину її точок неперервності.

**Твердження 3.** *Нехай функція $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ задовольняє такі умови: $f(x, x) = 1$ при $0 < x \le 1$, $f(0, 0) = 0$ і $D(f) = \{(0, 0)\}$. Тоді $f$ не є $S$-неперервною.*

**Доведення.** Розглянемо множини

$$W_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \times [0, 1] \times \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

$$W_2 = \{(x, y, z) : (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ і }$$

$$f(x, y) - \frac{1}{4} < z < f(x, y) + \frac{1}{4}\},$$

$$W = W_1 \cup W_2.$$

Очевидно, що множина $W_1$ відкрита в добутку $P = [0, 1]^2 \times \mathbb{R}$. Доведемо, що множина $W_2$ є відкритою в $P$. Нехай $q_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W_2$. Тоді $p_0 = (x_0, y_0) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$ і $f(p_0) - \frac{1}{4} < z_0 < f(p_0) + \frac{1}{4}$. За умовою функція $f$ неперервна в точці $p_0$. Тому існує такий окіл $U$ точки $p_0$ в квадраті $[0, 1]^2$ і таке число $\delta > 0$, що $(0, 0) \notin U$, $f(p) - \frac{1}{4} < z_0 - \delta$ і $f(p) + \frac{1}{4} > z_0 + \delta$, як тільки $p \in U$. Множина $U \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$ є околом точки $q_0$ в $P$, причому цей окіл міститься в множині $W_2$. Це показує, що множина $W_2$ є околом кожної своєї точки, а значить, є відкритою в $P$.

З відкритості множин $W_1$ і $W_2$ випливає відкритість множини $W$. Зрозуміло, що $Gr(f) \subseteq W$. Припустимо, що існує така неперервна функція $g : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, що $Gr(g) \subseteq W$. Розглянемо діагональ $h(x) = g(x, x)$ функції $g$. Ця функція неперервна на відрізку $[0, 1]$. Розглянемо множини $G_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $G_2 = (0, 1] \times \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ і $G = G_1 \cup G_2$. Легко перевірити, що $Gr(h) \subseteq G$. Справді, нехай $x \in [0, 1]$. Тоді точка $q = (x, x, h(x)) = (x, x, g(x, x)) \in Gr(g)$, а значить, $q \in W$. Якщо $q \in W_1$, то $0 \le x < \frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{4} < h(x) < \frac{1}{4}$, отже, $(x, h(x)) \in G_1$. Якщо ж $q \in W_2$, то $0 < x \le 1$ і $h(x) \in \left(f(x, x) - \frac{1}{4}, f(x, x) + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, бо $f(x, x) = 1$; тому $(x, h(x)) \in G_2$. Точки $(0, h(0))$ і $(1, h(1))$ лежать на графіку функції $h$, а значить, належать до множини $G$. Оскільки $0 \notin (0, 1]$ і $1 \notin \left[0, \frac{1}{2}\right)$, то обов'язково $(0, h(0)) \in G_1$ і $(1, h(1)) \in G_2$. Тому $h(0) < \frac{1}{4}$ і $h(1) > \frac{3}{4}$. Нехай $\gamma$ – довільне число з інтервалу $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. За теоремою про проміжне значення, існує таке число $c \in (0, 1)$, що $h(c) = \gamma$, адже $h(0) < \gamma < h(1)$ і функція $h$ неперервна. В такому разі $(c, \gamma) = (c, h(c)) \in Gr(h) \subseteq G$, отже, $(c, \gamma) \in G$. З другого боку, $(c, \gamma) \notin G$, бо $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{3}{4}$. Отримана суперечність показує, що не існує неперервної функції $g : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, такої, що $Gr(g) \subseteq W$, отже, функція $f$ не є $S$-неперервною.

Розглянемо функцію Шварца, яка визначається рівностями: $sp(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$ і $sp(0, 0) = 0$. Ця функція нарізно неперервна і для неї $D(sp) = \{(0, 0)\}$, $sp(x, x) = 1$ при $x \neq 0$ і $sp(0, 0) = 0$. Тому на основі твердження 3 функція $sp$ не є $S$-неперервною на квадраті $[0, 1]^2$. Таким чином з нарізної неперервності функції не випливає її $S$-неперервність. Приклад, який навів З.Ґранде [7], теж підпадає під дію твердження 3.

**4.** В цьому пункті ми введемо новий клас функцій, який допоможе нам розв'язати задачу про неперервність $S$-неперервних функцій із замкненим графіком.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція і $a \in \mathbb{R}$. *Верхнім /нижнім/ переходом для $f$ у точці $a$* ми називаємо множину $P = (a - \delta, a + \delta) \times \{y\}$, де $\delta > 0$ і $y > f(a)$ /$y < f(a)$/, якщо $P \cap Gr(f) = \emptyset$. Функцію $f$ назвемо *пере-*

*хідною зверху /знизу/ у точці $a$*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують такі числа $y$ і $\delta > 0$, що $f(a) < y < f(a) + \varepsilon$ $/f(a) - \varepsilon < y < f(a)/$ і множина $P = (a - \delta, a + \delta) \times \{y\}$ є верхнім /нижнім/ переходом для $f$ у точці $a$. Функція, яка перехідна зверху і знизу в точці $a$ називається *перехідною у точці $a$*. Нарешті, функція $f$ називається *перехідною* чи *перехідною зверху* або *знизу*, якщо вона є такою у кожній точці з $\mathbb{R}$.

**Твердження 4.** *Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є $S$-неперервною і перехідною зверху в точці $a \in \mathbb{R}$. Тоді $f$ є неперервною зверху в точці $a$.*

**Доведення.** Нехай $\varepsilon > 0$. Нам потрібно знайти таке $\delta > 0$, що для всіх $x$ з околу $U = (a - \delta, a + \delta)$ точки $a$ виконується нерівність $f(x) < f(a) + \varepsilon$. Оскільки $f$ перехідна зверху в точці $a$, то існують окіл $U = (a - \delta, a + \delta)$ і число $y \in (f(a), f(a) + \varepsilon)$, такі, що $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \emptyset$. Доведемо, що $f(x) < y$ для кожного $x \in U$. Нехай це не так. Тоді існує точка $x_0 \in U$, така, що $f(x_0) \geq y$. Насправді $f(x_0) > y$, бо $x_0 \in U$ і $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \emptyset$. Зауважимо, що $x_0 \neq a$, адже $f(x_0) > y$, а $f(a) < y$. Тому можливі два випадки: $a - \delta < x_0 < a$ і $a < x_0 < a + \delta$. Розберемо їх окремо.

Нехай $a - \delta < x_0 < a$. Розглянемо ламану

$$L = (\{x_0\} \times (-\infty, y]) \cup ([x_0, a] \times \{y\}) \cup$$
$$\cup (\{a\} \times [y, +\infty)),$$

яка, зрозуміло, є замкненою множиною в $\mathbb{R}^2$. Її доповнення $W = \mathbb{R}^2 \setminus L$ розпадається на дві диз'юнктні відкриті множини

$$W_1 = ((-\infty, x_0) \times \mathbb{R}) \cup ([x_0, a) \times (y, +\infty))$$

і

$$W_2 = ((x_0, a] \times (-\infty, y)) \cup ((a, +\infty) \times \mathbb{R}).$$

Ясно, що $L \cap Gr(f) = \emptyset$, адже $(\{x_0\} \times (-\infty, y]) \cap Gr(f) = \emptyset$, бо $f(x_0) > y$, $(\{a\} \times [y, +\infty)) \cap Gr(f) = \emptyset$, бо $f(a) < y$ і $([x_0, a] \times \{y\}) \cap Gr(f) = \emptyset$, бо $[x_0, a] \times \{y\} \subseteq U \times \{y\}$ і $U \times \{y\}$ – верхній перехід для $f$ у точці $a$. Тому $Gr(f) \subseteq W$. Оскільки $f$ є $S$-неперервною, то існує неперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така, що $Gr(g) \subseteq W$. Зрозуміло, що

$$\emptyset \neq Gr(g|_{(-\infty, x_0)}) \subseteq G_1 = W_1 \cap Gr(g)$$

і

$$\emptyset \neq Gr(g|_{(a, +\infty)}) \subseteq G_2 = W_2 \cap Gr(g).$$

Множини $G_1$ і $G_2$ непорожні і відкриті в $Gr(g)$, причому $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Таким чином, ми розбили графік $Gr(g)$ неперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на дві непорожні і відкриті в ньому множини $G_1$ і $G_2$, що суперечить його зв'язності.

Нехай $a < x_0 < a + \delta$. В цьому випадку ми розглядаємо ламану

$$L = (\{x_0\} \times (-\infty, y]) \cup ([a, x_0] \times \{y\}) \cup$$
$$\cup (\{a\} \times [y, +\infty))$$

і відкриту множину $W = \mathbb{R}^2 \setminus L$, яка подається у вигляді диз'юнктного об'єднання двох відкритих множин

$$W_1 = ((-\infty, a) \times \mathbb{R}) \cup ([a, x_0) \times (-\infty, y))$$

і

$$W_2 = ((a, x_0] \times (y, +\infty)) \cup ((x_0, +\infty) \times \mathbb{R}).$$

Далі міркування продовжуються аналогічно і ми отримуємо, що $f(x) < y$ для кожного $x \in U$.

Оскільки $y < f(a) + \varepsilon$, то $f(x) < f(a) + \varepsilon$ для всіх $x \in U$. Отже, функція $f$ неперервна зверху в точці $a$.

**Наслідок 1.** *Кожна $S$-неперервна перехідна зверху функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною зверху.*

Переходячи від функції $f$ до функції $-f$, ми з допомогою твердження 4 отримуємо такі результати.

**Твердження 5.** *Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є $S$-неперервною і перехідною знизу в точці $a$. Тоді $f$ є неперервною знизу в точці $a$.*

**Наслідок 2.** *Кожна $S$-неперервна перехідна знизу функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є напівнеперервною знизу.*

З отриманих результатів негайно випливають основні результати цієї статті.

**Теорема 1.** *Кожна $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є перехідною в точці $a \in \mathbb{R}$, є разом з тим неперервною в точці $a$.*

**Теорема 2.** *Кожна перехідна $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.*

Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік. Розглянемо довільну точку $a \in \mathbb{R}$ і число $y \neq f(a)$. Зрозуміло, що $(a, y) \notin Gr(f)$. Оскільки $Gr(f)$ – замкнена множина в $\mathbb{R}^2$, то існує таке $\delta > 0$, що

$$((a-\delta, a+\delta) \times (y-\delta, y+\delta)) \cap Gr(f) = \emptyset.$$

Тоді і $((a-\delta, a+\delta) \times \{y\}) \cap Gr(f) = \emptyset$. Звідси негайно випливає, що функція $f$ перехідна в точці $a$. Тому функція $f$ є перехідною. Таким чином, ми встановили наступний результат.

**Твердження 6.** *Кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є перехідною.*

Звідси і з теореми 2 отримуємо:

**Наслідок 3.** *Кожна $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною.*

Приклад функції Діріхле $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $f(x) = 1$, якщо $x \in \mathbb{Q}$, і $f(x) = 0$, якщо $x \notin \mathbb{Q}$, показує, що функція може бути перехідною, не маючи при цьому замкненого графіка і будучи скрізь розривною.

Властивість перехідності хоча і дуже слабка, але все ж не притаманна усім функціям $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Наприклад, $S$-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із твердження 2 не тільки не має замкненого графіка, але й не є перехідною ні зверху ні знизу у точці 0. У зв'язку з цим виникає питання: чи існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є перехідною в жодній точці $x \in \mathbb{R}$?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Piotrowski Z.* A survey of results concer-ning generalized continuity on topological spaces // Acta Math. Univ. Comen. – 1987-1988. – **52-53**. – P.91-110.

2. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch. – 1988-1989. – **14**, №3. – P.259-306.

3. *Natkaniez T.* Almost continuity. – Bydgoszcz: Wyzcza Szkola Pedagogiczna w Bydgozczy, 1992. – 131p.

4. *Stallings J.* Fixed point theorem for connectivity maps // Fund. Math. – 1959. – **47**. – P.249-263.

5. *Kellum K.R., Garrett B.D.* Almost continuous real functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – **33**. – P.181-184.

6. *Kellum K.R.* Sums and limits almost continuous functions // Collog. Math. –1974. – **31**. – P.125-128.

7. *Grande Z.* Quelques remarques sur les fonctions presque continues // Zesz. Nauk. WSP Bydgoszczy Probl. Mat. – 1988. – **10**. – P.60-70.

8. *Крецу В.* Приклади нарізно неперервних функцій, які не є майже неперервними за Стеллінґзом // Матеріали студентської наукової конференції, присвяченої 130-річчю Чернівецького університету. Фіз.-мат. науки. – Чернівці, 2005. – С.71-72.

9. *Piotrovski Z., Vallin R.W.* Conditions with imply continuity // Real Anal. Exch. – 2003/2004. – **29**, №1. – P.211-218.

10. *Burgess C.E.* Continuous functions and connected graphs // Amer. Math. Monthly. – 1990. – **97**. – P337-339.

11. *Baggs I.* Functions with a closed graph // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – **43**. – P.439-442.

12. *Doboš J.* On the set points of discontinuity for functions with closed graphs // Časopis pro pěstováni matematiky. – 1985. – **110**. – P.60-68.

13. *Крецу В.* Зв'язки між неперервністю за Стеллінґзом, наявністю замкненого графіка і неперервністю // Матеріали студентської наукової конференції. Фіз.-мат. науки. – Чернівці, 2006. – С.410-411.

14. *Крецу В.* Неперервність $S$-неперервних функцій із замкненим графіком // Матеріали студентської наукової конференції. Фіз.-мат. науки. – Чернівці, 2007. – С.405-406.