УДК 517.9

©2007 р. А.П.Креневич

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРО ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО "ПОХІДНОЇ"

В даній роботі використовуючи метод послідовних наближень Пікара отримано результати щодо існування і єдиності сильних розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь не розв'язаних відносно "похідної" в гільбертовому просторі.

Using the Picard method, we obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of strong solutions of stochastic differential equations unsolved relatively to the "derivative"in a Hilbert space.

Вступ Розглядається простір $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ – сепарабельний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. В ньому, на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, P)$, розглядається стохастичне диференціальне рівняння

$$d[X(t) + g(t, X(t))] = [A(t)X(t)+$$

$$f(t, X(t))]dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \qquad (1)$$

$$X(0) = x_0, \qquad (2)$$

$t \in [0,T]$, $x \in H$, $A(t) : [0,T] \times H \to H$ – лінійний, неперервний по t оператор, такий, що для кожного $t \in [0,T]$, $A(t)$ – обмежений оператор; $f(t,x), \sigma(t,x), g(t,x) : [0,T] \times H \to H$ – неперервні по t оператор-функції; $W(t)$ – скалярний вінерівський процес, визначений для $t \geq 0$, на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, P)$; $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ – потік σ-алгебр узгоджений з процесом $W(t)$.

Існує низка робіт, присвячених існуванню і єдиності сильних та слабких розв'язків стохастичних звичайних диференціальних рівнянь як в скінченновимірних так і гільбертових просторах, та розроблені методи їх побудови (див. [1-3]).

Також багатьма авторами досліджувалася проблема існування, єдиності та асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних рівнянь нейтрального типу в просторах скінченної розмірності (див. [4-7]).

Питання існування і єдиності розв'язків стохастичних рівнянь нейтрального типу в гільбертових просторах залишаються відкритими. Подоланню цих проблем і присвячена дана робота.

Існування і єдиність

У гільбертовому просторі H поруч з рівнянням (1) розглянемо звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \qquad (3)$$

з тим же оператором $A(t)$, що і у рівнянні (1). Очевидно, що існує додатна стала K_A, така що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A(t)\| \leq K_A. \qquad (4)$$

Нехай $U(t,s)$ – еволюційний оператор рівняння (3). З [8,с.147], очевидним чином отримуємо, що існує додатна стала K_U, така, що

$$\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|U(t,s)\| \leq K_U. \qquad (5)$$

Припустимо, що існують додатні сталі K, L, такі, що для $t \in [0,T], x, y \in H$ виконуються наступні співвідношення.

$$\|f(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| + \|g(t,x)\| \leq$$

$$\leq K(1 + \|x\|), \qquad (6)$$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|+$$

$$+\|g(t,x) - g(t,y)\| \leq L(\|x-y\|). \qquad (7)$$

Розглянемо банаховий простір B_T – простір H-значних, $\mathcal{F}_t$ - вимірних, з ймовірністю 1 неперервних по t випадкових процесів $\xi(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to H$, з нормою

$$\|\xi\|_{B_T} = \left\{ E \sup_{t\in[0,T]} \|\xi(t)\|^2 \right\}^{1/2} < \infty. \qquad (8)$$

Для подальшого дослідження нам буде необхідна наступна лема.

Лема. *Розв'язок інтегрального рівняння*

$$X(t) = U(t,0)(x_0 + g(0,x_0)) - g(t,X(t)) -$$
$$-\int_0^t U(t,s)A(s)g(s,X(s))ds +$$
$$+\int_0^t U(t,s)f(s,X(s))ds +$$
$$+\int_0^t U(t,s)\sigma(s,X(s))dW(s) \qquad (9)$$

є сильним розв'язком рівняння (1) з початковою умовою (2).

Доведення. Для доведення досить переписати рівність (9) у вигляді

$$X(t) + g(t,X(t)) = U(t,0)(x_0 + g(0,x_0)) -$$
$$-\int_0^t U(t,s)A(s)g(s,X(s))ds +$$
$$+\int_0^t U(t,s)f(s,X(s))ds +$$
$$+\int_0^t U(t,s)\sigma(s,X(s))dW(s)$$

і обчислити стохастичний диференціал від обох частин останньої рівності.

Для довільних $f,\sigma \in B_T$ розглянемо наступне стохастичне рівняння

$$d[X(t) + g(t,X(t))] = [A(t)X(t) +$$
$$+f(t)]dt + \sigma(t)dW(t), \qquad (10)$$
$$X(0) = x_0,$$

і визначимо оператор $\Psi : B_T \to B_T$, що діє за правилом

$$(\Psi X)(t) = U(t,0)(x_0 + g(0,x_0)) -$$
$$-g(t,X(t)) - \int_0^t U(t,s)A(s)g(s,X(s))ds +$$
$$+\int_0^t U(t,s)f(s)ds +$$
$$+\int_0^t U(t,s)\sigma(s)dW(s). \qquad (11)$$

Для доведення існування і єдиності розв'язку рівняння (1) нам необхідні будуть деякі допоміжні результати.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (4),(5),(6),(7), причому сталі K, L, K_A, K_U пов'язані співвідношенням*

$$K_U^2 + L^2K_U^2 + L^2 + T^3K_AK_U^2L^2 < \frac{1}{4}. \qquad (12)$$

Тоді рівняння (10) має єдиний розв'язок на відрізку $[0,T]$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо вище означений оператор Ψ. Легко показати його середньоквадратичну неперервність, оцінивши для $X \in B_T$, $t \in [0,T]$ і досить малого h вираз

$$E\|(\Psi X)(t+h) - (\Psi X)(t)\|^2.$$

Покажемо, що $\Psi(B_T) \subset B_T$. Дійсно легко бачити, що для $X \in B_T, t \in [0,T]$ $E \sup\limits_{t\in[0,T]} \|(\Psi X)(t)\|^2 < \infty$.

$\mathcal{F}_t$-вимірність елемента $(\Psi X)(t)$ очевидним чином виплаває з його представлення. Таким чином ми отримали, що $\Psi : B_T \to B_T$.

Доведемо, що відображення Ψ має єдину нерухому точку, для цього покажемо, що Ψ є відображенням стиску. Виберемо довільні $X, Y \in B_T$, тоді проводячи очевидні оцінки, отримаємо

$$E \sup_{t\in[0,T]} \|(\Psi X)(t) - (\Psi Y)(t)\|^2 \le$$

$$\leq \beta E \sup_{t\in[0,T]} \|X(t) - Y(t)\|^2,$$

де $\beta = 4(K_U^2 + L^2K_U^2 + L^2 + T^3K_U^2K_A^2L^2)$.

З умови теореми випливає, що $\beta < 1$, а значить оператор Ψ є оператором стиску і має єдину нерухому точку, котра є розв'язком рівняння (10). Теорему доведено.

Визначимо оператор $\Phi : B_T^2 \to B_T$ наступним чином

$$\Phi(f, \sigma) = X,$$

$$X(t) = U(t,0)(x_0 + g(0,x_0)) -$$

$$-g(t, X(t)) - \int_0^t U(t,s)A(s)g(s,X(s))ds +$$

$$+\int_0^t U(t,s)f(s)ds + \int_0^t U(t,s)\sigma(s)dW(s), \tag{13}$$

де $X(t)$ – розв'язок рівняння (10).

Лема 1. *Нехай виконуються умови (4),(5),(6),(7), причому $L < 1/2, K < 1/\sqrt{10}$. Тоді існують додатні сталі $M_\Phi, \overline{M}_\Phi, D_\Phi$, такі, що для довільних $f_1, \sigma_1, f_2, \sigma_2 \in B_T$ виконуються нерівності*

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|\Phi(f_1,\sigma_1)(s)\|^2 \leq$$

$$\leq D_\Phi + \overline{M}_\Phi \int_0^t (E\|f_1(\tau)\|^2 + E\|\sigma_1(\tau)\|^2)d\tau. \tag{14}$$

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|\Phi(f_1,\sigma_1)(s) - \Phi(f_2,\sigma_2)(s)\|^2 \leq$$

$$\leq M_\Phi \int_0^t \Big(E\|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|^2 +$$

$$+E\|\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau)\|^2\Big)d\tau. \tag{15}$$

Доведення даних нерівностей базується на оцінці лівих частин виразів (14) та (15) з використанням означення оператора Φ та узагальненої леми Гронуолла-Беллмана.

Використаємо метод послідовних наближень Пікара. Побудуємо послідовність $X_n \in B_T$ за наступними рекурентними співвідношеннями

$$X_n(t) = U(t,0)(x_0 + g(0,x_0)) -$$

$$-g(t, X_n(t)) - \int_0^t U(t,s)A(s)g(s,X_n(s))ds +$$

$$+\int_0^t U(t,s)f(s,X_{n-1}(s))ds +$$

$$+\int_0^t U(t,s)\sigma(s,X_{n-1}(s))dW(s), \tag{16}$$

$n \geq 1, t \in [0,T]$. $X_0(t)$ визначимо як розв'язок рівняння (13) з $f \equiv \sigma \equiv 0$.

Очевидно, що

$$X_n = \Phi(f(\cdot, X_{n-1}(\cdot)), \sigma(\cdot, X_{n-1}(\cdot))),$$

де Φ – оператор визначений в (13).

Побудуємо оператор $\Pi : B_T \to B_T$, що діє за правилом

$$(\Pi X)(t) = [\Phi(f(\cdot, X(\cdot)), \sigma(\cdot, X(\cdot)))](t).$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови Леми 2. Тоді існують додатні сталі $D_\Pi, M_\Pi, \overline{M}_\Pi$, такі, що для довільних $X, Y \in B_T$ виконуються оцінки*

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|(\Pi X)(s)\|^2 \leq$$

$$\leq D_\Pi + \overline{M}_\Pi \int_0^t E \sup_{r\in[0,s]} \|X(r)\|^2 ds, \tag{17}$$

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|(\Pi X)(s) - (\Pi Y)(s)\|^2 \leq$$

$$\leq M_\Pi \int_0^t E \sup_{r\in[0,s]} \|X(r) - Y(r)\|^2 ds. \tag{18}$$

Доведення даної леми легко отримати з леми 2.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1 та Леми 2.*

Тоді рівняння (1) має єдиний сильний розв'язок на відрізку $[0,T]$.

Доведення. Існування.

З побудови послідовності X_n можемо легко отримати, що існує додатна стала C, незалежна від t така, що $E \sup\limits_{s\in[0,t]} \|X_1(s) - X_0(s)\|^2 \le C^2$. З вигляду оператора П, за лемою 3 можемо записати

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|X_{n+1}(s) - X_n(s)\|^2 \le$$

$$\le M_\Pi \int_0^t E \sup_{r\in[0,s]} \|X_n(r) - X_{n-1}(r)\|^2 ds. \tag{19}$$

звідки, інтегруючи останню нерівність маємо, що

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|X_{n+1}(s) - X_n(s)\|^2 \ \le C^2 \frac{(M_\Pi T)^n}{n!},$$

з чого слідує фундаментальність послідовності X_n в B_T. Позначимо $X := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$. Переходячи в (16) до границі, отримаємо (9).

Для доведення єдиності припустимо, що X, Y – два розв'язки рівняння (1). За лемою 3

$$E \sup_{s\in[0,t]} \|X(s) - Y(s)\|^2 \le$$

$$\le M_\Pi \int_0^t E \sup_{r\in[0,s]} \|X(r) - Y(r)\|^2 ds.$$

Останнє виконується тільки тоді, коли $E \sup\limits_{s\in[0,t]} \|X(s) - Y(s)\|^2 = 0$.. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Barbu D., Bocsan G.* Approximations to mild solutions of stochastic semilinear equations with non-lipschitz coefficients//Czechoslovak Mathematical Journal.—2002.— **52**.—pp.87—95.

2. *Taniguchi, Takeshi; Liu, Kai; Truman, Aubrey* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stoc hastic functional differential equations in Hilbert spaces.//J. Differ. Equations.—2002.—**181**, No.1.—pp.72-91.

3. *Станжицький О.М.* Обмежені і періодичні розв'язки лінійних та слабко нелінійних стохастичних систем Іто//ТВіМС.—2003.—**68**.—С.155-163.

4. *Kolmanovskii, V.; Koroleva, N.; Maizenberg, T.; Mao, X.; Matasov, A.* Neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching.//Stochastic Anal. Appl.—2003.—**21**, No.4.—pp.819-847.

5. *Mao, Xuerong* Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations.// Stochastics Stochastics Rep.—2000.—**68**, No.3-4.—pp.273-295.

6. *Rodkina, A.E.* On existence and uniqueness of solution of stochastic differential equations with heredity.//Stochastics.—1984.—**12**.—pp.187-200.

7. *Liu, Kai; Xia, Xuewen* On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations.//Syst. Control Lett.—1999.—**37**, No.4.—pp.207-215.

8. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—М.:Наука— 1970.—534с.

9. *Дороговцев А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерних детерминированых и стохастических динамических систем.—К.:Вища школа—1992.—319с.

10. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения функционально диференциальных уравнений.—Рига:Зинатне—1989.—421с.