УДК 517.956

©2007 р. В.В. Ковдриш

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ШИРИНА ВЕРБАЛЬНИХ ПІДГРУП ГРУПИ $UT_n(\mathbb{Z})$, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ СЛОВАМИ x^k, $k \in \mathbb{N}$

Встановлено, що ширина вербальної підгрупи групи $UT_n(\mathbb{Z})$, яка визначається за певних обмежень словом x^k дорівнює 1, а в інших випадках не перевищує $n-1$.

The width of the verbal subgroups of $UT_n(\mathbb{Z})$ generated by the words x^k, $k \in \mathbb{N}$ is found.

1. Унітрикутні матричні групи над кільцем цілих чисел відіграють важливу роль в теорії нільпотентних груп. А саме, за теоремою Мальцева [1] на кожній скінченно породженій нільпотентній групі без скруту можна ввести "цілочисельні координати", що дає можливість занурити ці групи в групу унітрикутних матриць деякої розмірності над кільцем цілих чисел. Такий спосіб зображення скінченно породжених нільпотентних груп без скруту істотно використовується при їх дослідженні, що в свою чергу, потребує докладного вивчення будови унітрикутних груп матриць над кільцем цілих чисел. Зокрема, проблема дослідження тотожностей, які можуть виконуватись в нільпотентних групах призводить до необхідності вивчення вербальних підгруп в групі унітрикутних матриць над кільцем цілих чисел.

Однією з важливих числових характеристик вербальної підгрупи є її ширина. Нагадаємо, що шириною вербальної підгрупи wG (де w – множина групових слів, якою визначається вербальна підгрупа) називається таке найменше число k, що будь-який елемент із підгрупи wG можна подати у вигляді добутку не більше ніж k значень слів із w в групі G або обернених до них; якщо такого числа k не існує, то вважається, що wG має нескінченну ширину. Оскільки група унітрикутних матриць над довільним полем є алгебраїчною, то згідно з результатами [2,3] кожна її вербальна підгрупа має скінченну ширину. При переході до групи унітрикутних матриць над кільцем цілих чисел ці результати перенести безпосередньо не вдається, а тому виникає проблема дослідження ширини вербальних підгруп в цих групах.

Оскільки кожен многовид нільпотентних груп має скінченну базу [4], то в нільпотентній групі кожна вербальна підгрупа може бути визначена тільки одним словом, а тому достатньо розглянути в цій ситуації лише такі вербальні підгрупи. Кожне слово є еквівалентне в сенсі теорії групових многовидів парі слів [4], одне з яких є комутаторним (належить до комутанта вільної групи), а друге має вигляд x^k для певного натурального числа k. Дослідженню ширини вербальних підгруп в групах унітрикутних матриць над кільцем цілих чисел, які породжуються найприроднішим типом комутаторних слів – простими комутаторами – присвячено нашу попередню публікацію [5]. Метою даної замітки є знаходження ширини підгрупи k-тих степенів (вербальної підгрупи, породженої словом x^k) в групах унітрикутних матриць над кільцем цілих чисел.

2. Нехай $UT_n(\mathbb{Z})$ — група верхніх унітрикутних матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Символом e позначимо одиничну матрицю n-го порядку, символом e_{ij} $i,j = 1,2,...,n$ будемо позначати матричні одиниці, тобто квадратні матриці порядку n в яких на перетині i-го рядка і j-го стовпця знаходиться одиниця, а решта елементів є нулями. Довільну матрицю x із $UT_n(\mathbb{Z})$ можна подати

у вигляді суми

$$x = e + \sum_{i<j} x_{ij} e_{ij}$$

Символом $x_{ij}^{(m)}$ позначимо суму всеможливих "впорядкованих добутків" m елементів матриці x, тобто

$$x_{ij}^{(m)} = \sum_{i<k_1<k_2<...<k_{m-1}<j} x_{i,k_1} x_{k_1,k_2} ... x_{k_{m-1},j}.$$

Нехай

$$\xi_{ij}(k) = \sum_{p=1}^{j-i} C_k^p x_{ij}^{(p)}, \qquad (1)$$

де $C_k^p = \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{k(k-1)...(k-p+1)}{p!}$ (при $p > k$ $C_k^p = 0$) Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Для довільної матриці з групи $UT_n(\mathbb{Z})$ і довільного натурального числа k*

$$x^k = e + \sum_{i<j} e_{ij} \xi_{ij}(k)$$

Доведення. Індукція за числом k. База індукції — випадок $k = 1$. Згідно з (1) отримаємо

$$\xi_{ij}(1) = \sum_{p=1}^{j-i} C_1^p x_{ij}^{(p)} = x_{ij}^{(1)} = x_{ij}$$

Припустимо, що

$$x^k = e + \sum_{i<j} e_{ij} \xi_{ij}(k)$$

покажемо, що

$$x^{k+1} = e + \sum_{i<j} e_{ij} \xi_{ij}(k+1)$$

Дійсно, нехай $x^{k+1} = e + \sum_{i<j} \varphi_{ij} e_{ij} = x^k x$ тоді

$$\varphi_{ij} = \sum_{s=i}^{j} \xi_{is}(k) x_{sj} =$$

$$= x_{ij} + \xi_{i,i+1}(k) x_{i+1,j} + \xi_{i,i+2}(k) x_{i+2,j} + ...$$

$$... + \xi_{i,j-1}(k) x_{j-1,j} + \xi_{ij}(k) =$$

$$= x_{ij} + C_k^1 (x_{i,i+1}^{(1)} x_{i+1,j} + ... + x_{i,j-1}^{(1)} x_{j-1,j}) +$$

$$+ C_k^2 (x_{i,i+2}^{(2)} x_{i+2,j} + ... + x_{i,j-1}^{(2)} x_{j-1,j}) + ...$$

$$... + C_k^{j-1-i} x_{i,j-1}^{j-1-i} x_{j-1,j} + \xi_{ij}(k) =$$

$$= x_{ij} + C_k^1 x_{ij}^{(2)} + C_k^2 x_{ij}^3 + ... + C_k^{j-i-1} x_{ij}^{(j-i)} +$$

$$+ C_k^1 x_{ij} + C_k^2 x_{ij}^{(2)} + C_k^3 x_{ij}^{(3)} + ... + C_k^{j-i} x_{ij}^{(j-i)} =$$

$$= (C_k^0 + C_k^1) x_{ij} + (C_k^1 + C_k^2) x_{ij}^{(2)} + (C_k^2 + C_k^3) x_{ij}^{(3)} + ...$$

$$... + (C_k^{j-i-1} + C_k^{j-i}) x_{ij}^{(j-i)} =$$

$$= C_{k+1}^1 x_{ij} + C_{k+1}^2 x_{ij}^{(2)} + C_{k+1}^3 x_{ij}^{(3)} + ...$$

$$... + C_{k+1}^{j-i} x_{ij}^{j-i} = \xi_{ij}(k+1)$$

Таким чином

$$x^{k+1} = e + \sum_{i<j} e_{ij} \xi_{ij}(k+1),$$

що і треба було показати. Теорему доведено.

Нагадаємо, що два цілих числа a та b, які при діленні на ціле додатне число m дають одну і ту ж остачу, називаються конгруентними або порівняльними за модулем m. Позначається наступним чином

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Розглянемо деяку систему конгруенцій

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod{2}, \\ k \equiv 1, 2 \pmod{3}, \\ ... \\ k \equiv 1, 2, ..., (n-2) \pmod{(n-1)}, \end{cases} \qquad (2)$$

де запис $x \equiv a_1, a_2, ..., a_i \pmod{m}$, де $i = 1, 2, ..., (n-1)$ рівносильний сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x \equiv a - 1 \pmod{m}, \\ x \equiv a_2 \pmod{m}, \\ ... \\ x \equiv a_i \pmod{m}. \end{array} \right.$$

Теорема 2.

1) *Якщо число k є розв'язком системи конгруенцій (2), то для довільної матриці a з групи $UT_n(k\mathbb{Z})$ рівняння*

$$x^k = a$$

має єдиний розв'язок в групі $UT_n(\mathbb{Z})$

2) Якщо число k не є розв'язком системи (2), то для довільної матриці a з групи $UT_n(k\mathbb{Z})$ рівняння

$$x_1^k x_2^k ... x_{n-1}^k = a$$

має розв'язок в групі $UT_n(\mathbb{Z})$

Доведення. 1) Нехай $a \in UT_n(k\mathbb{Z})$, тоді

$$a = e + \sum_{i<j} e_{ij} k\alpha_{ij},$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. Покажемо, що в групі $UT_n(\mathbb{Z})$ існує розв'язок рівняння $x^k = a$. Згідно з теоремою 1

$$x^k = e + \sum_{i<j} e_{ij}\xi_{ij}(k)$$

тому

$$e + \sum_{i<j} e_{ij}\xi_{ij}(k) = e + \sum_{i<j} e_{ij} k\alpha_{ij}$$

звідки

$$\xi_{ij}(k) = k\alpha_{ij}$$

Далі згідно з (1) матимемо

$$\sum_{p=1}^{j-i} C_k^p x_{ij}^{(p)} = k\alpha_{ij}$$

тобто

$$C_k^1 x_{ij}^{(1)} + C_k^2 x_{ij}^{(2)} + ... + C_k^{j-i} x_{ij}^{(j-i)} = k\alpha_{ij}$$

або

$$kx_{ij}^{(1)} + \frac{k(k-1)}{2!}x_{ij}^{(2)} + ...$$

$$... + \frac{k(k-1)...(k-(j-i)+1)}{(j-i)!}x_{ij}^{(j-i)} = k\alpha_{ij}$$

звідки

$$x_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{(k-1)}{2!}x_{ij}^{(2)} - ...$$

$$... - \frac{(k-1)...(k-(j-i)+1)}{(j-i)!}x_{ij}^{(j-i)} \qquad (3)$$

Коефіцієнти при $x_{ij}^{(p)}$, при $2 \le p \le (j-i)$ будуть цілими числами, бо k є розв'язком системи (2). Покажемо, що $x_{ij}^{(p)} \in \mathbb{Z}$. Неважко переконатися, що $x_{ij}^{(p)}$ виражається через елементи матриці x, які знаходяться в трикутнику обмеженому i-м рядком, j-м стовпцем і першою над головною діагоналлю. Наприклад

$$x_{i,i+1} = \alpha_{i,i+1},$$

$$x_{i,i+2} = \alpha_{i,i+2} - \frac{k-1}{2}x_{i,i+2}^{(2)} =$$

$$= \alpha_{i,i+2} - \frac{k-1}{2}\alpha_{i,i+2}^{(2)},$$

$$x_{i,i+3} = \alpha_{i,i+3} - \frac{k-1}{2}x_{i,i+3}^{(2)} - \frac{(k-1)(k-2)}{3!}x_{i,i+3}^{(3)} =$$

$$= \alpha_{i,i+3} - \frac{k-1}{2}\alpha_{i,i+3}^{(2)} -$$

$$-\left(\frac{(k-1)(k-2)}{3!} - 2\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right)\alpha_{i,i+3}^{(3)}.$$

Звідси випливає, що рівність (3) задає ціле число, тобто матриця

$$x = e + \sum_{i<j} x_{ij} e_{ij}$$

належить до $UT_n(\mathbb{Z})$.

2) Довільну матрицю a з $UT_n(k\mathbb{Z})$ можна подати у вигляді добутку $n-1$ матриці наступним чином

$$a = (e + k\alpha_{n-1,n} e_{n-1,n})(e + \sum_{j=n-1}^{n} k\alpha_{n-2,j} e_{n-2,j})...$$

$$...(e + \sum_{j=2}^{n} k\alpha_{1,j} e_{1,j})$$

Кожна з цих матриць є k-м степенем деякої матриці з групи $UT_n(\mathbb{Z})$. Нехай

$$a_l = e + \sum_{j=n-l+1}^{n} k\alpha_{n-l,j} e_{n-l,j},$$

де $l = 1, 2, ..., n-1$.

Покажемо, що в групі $UT_n(\mathbb{Z})$ знайдеться єдина матриця x_l така, що

$$(x_l)^k = a_l$$

Дійсно, згідно з теоремою 1 будемо мати

$$(x_l)^k = e + \sum_{i<j} e_{ij}(\xi_l)_{ij}(k) =$$

$$= e + \sum_{j=n-l+1}^{n} k\alpha_{n-l,j}e_{n-l,j}$$

Але для даної матриці a_l

$$(\xi_l)_{n-l,j}(k) = k(x_l)_{n-l,j}$$

Тому

$$x_l = e + \sum_{j=n-l+1}^{n} \alpha_{n-l,j}e_{n-l,j}$$

Таким чином $a = x_1^k x_2^k ... x_{n-1}^k$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Для довільного натурального числа k вербальна підгрупа групи $UT_n(\mathbb{Z})$, яка визначається словом x^k, збігається з підгрупою $UT_n(k\mathbb{Z})$.*

Наслідок 2.

1) *Якщо число k є розв'язком системи конгруенцій (2), то вербальна підгрупа групи $UT_n(\mathbb{Z})$, яка визначається словом x^k відносно цього слова має ширину 1.*

2) *Якщо число k не є розв'язком системи (2), то ширина цієї вербальної підгрупи не перевищує $n-1$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1977. – 238с.

2. *Мерзляков Ю.И.* Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. – 1967. – Т.6, №1. – С.83-94.

3. *Мерзляков Ю.И.* Рациональные группы. – М.: Наука, 1987. – 326с.

4. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М.: Мир, 1971. – 452с.

5. *Ковдриш В.В.* Ширини членів нижнього центрального ряду групи верхніх унітрикутних матриць над комутативним кільцем з одиницею // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2006. – Випуск 314-315. – С. 91-93.