

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Буковинський державний фінансово-економічний університет

ЛОКАЛІЗАЦІЯ ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Досліджено властивість локального посилення збіжності розв'язку задачі Коші при $t \rightarrow +0$ до свого граничного значення для вироджених параболічних систем класу $\mathbb{SE}_{2b}^t$.

For degenerate parabolic systems of the class $\mathbb{SE}_{2b}^t$, we investigate the property of local improvement of the convergence of the Cauchy problem solution to its limiting value when $t \rightarrow +0$.

Вступ. Вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова знайшли своє застосування у математичному моделюванні багатьох реальних процесів. Вивченню класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова [1]

$$(\partial_t - x_1 \partial_{x_2} - a^2 \partial_{x_1}^2) u(t; x_1, x_2) = 0$$

та його різноманітних узагальнень присвячено багато праць (див. огляд у [2]).

Дослідження систем вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова розпочато відносно недавно [3–5]. У цих працях з'ясовується питання побудови та дослідження основних властивостей фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для систем з параболічною за Петровським головною частиною та коефіцієнтами, не залежними від просторової змінної.

У роботі [6] означено новий клас $\mathbb{SE}_{2b}^t$ вироджених параболічних систем типу Колмогорова векторного порядку, який охоплює системи, розглянуті в [3–5]. Для таких систем побудовано ФМРЗК та досліджено її властивості в рамках просторів типу S Гельфанда і Шилова [7].

Коректну розв'язність задачі Коші для систем з класу $\mathbb{SE}_{2b}^t$ у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів Гельфанда і Шилова встановлено у [8].

Дана робота є продовженням досліджень, проведених у [7,8]; у ній з'ясовується питання про можливість посилення збіжності при

$t \rightarrow +0$ розв'язку задачі Коші для таких систем до свого узагальненого граничного значення f на тих областях зміни просторової змінної, де $f = 0$.

1. Допоміжні відомості. Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}_m := \{1; \dots; m\}$; $\mathbb{R}^m$ — дійсний простір розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{Z}_+^m$ — множина всіх m -вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1} \dots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1} \dots |z_m|^{l_m}$, якщо $z := (z_1; \dots; z_m) \in \mathbb{R}^m$, $l := (l_1; \dots; l_m) \in \mathbb{Z}_+^m$; $\vec{\gamma} := (\gamma_1; \dots; \gamma_m)$ — m -вимірний вектор, $\vec{1} := (1; \dots; 1)$; запис $\vec{\alpha} \vec{U} \vec{\beta}$, де $\vec{U}$ — деяке відношення, означає, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$, при цьому, якщо $q := (q_1; \dots; q_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $\{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}\} \subset \mathbb{R}^m$, то $q^{q\vec{\gamma}} := q_1^{q_1 \gamma_1} \dots q_m^{q_m \gamma_m}$; $|\vec{\alpha}|_+^{\vec{\gamma}} := |\alpha_1|^{\gamma_1} + \dots + |\alpha_m|^{\gamma_m}$, $|\vec{\alpha}|_+^{\vec{1}} := |\vec{\alpha}|_+^{\vec{1}}$ — скалярні величини (якщо $\vec{\alpha}$ — мультиіндекс або просторова змінна, то замість $\vec{\alpha}$ писатимемо α).

Припустимо, що n -вимірна просторова змінна x складається з n_1 -вимірної змінної $x_1 := (x_{11}; \dots; x_{1n_1})$, n_2 -вимірної змінної $x_2 := (x_{21}; \dots; x_{2n_2})$, n_3 -вимірної змінної $x_3 := (x_{31}; \dots; x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1; x_2; x_3)$, де n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $n_0 := n - n_1$. У зв'язку з цим, мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1; k_2; k_3)$, де

$k_j := (k_{j1}; \dots; k_{jn_j}), j \in \mathbb{N}_3$.

Якщо $x = (x_1; x_2; x_3)$ і $x_j := (x_{j1}; \dots; x_{jn_j})$ — точки відповідно з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^{n_j}, j \in \mathbb{N}_3$, то

$x'_j := (x_{j1}; \dots; x_{jn_j}), x''_j := (x_{j(n_3+1)}; \dots; x_{jn_2}),$

$x'''_1 := (x_{1(n_2+1)}; \dots; x_{1n_1}), \hat{x}_1 := (x_{11}; \dots; x_{1n_2});$

ці позначення будемо використовувати і для інших подібних точок та векторів.

Крім цього, позначимо через

$$\Pi_M^m := \{(t, \xi) | t \in M, \xi \in \mathbb{R}^m\}$$

і нехай $\vec{2b} := (2b_1; \dots; 2b_{n_1}),$

$\vec{\alpha}^* := (\vec{1} - \vec{1}/\vec{2b}; \vec{1} - \widehat{\vec{1}/\vec{2b}}; (\vec{1} - \vec{1}/\vec{2b})'),$

$\vec{\beta}^* := (\vec{1}/\vec{2b}; \widehat{\vec{1}/\vec{2b}}; (\vec{1}/\vec{2b})').$

При довільно фіксованих $T > 0, m \in \mathbb{N}$ та векторі $\vec{2b}$ розглянемо систему рівнянь

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} \right) u(t; x) = \mathbb{A}(t; \partial_{x_1}) u(t; x), (t; x) \in \Pi_{(0;T]}^n, \quad (1)$$

з класу $\mathbb{SE}_{\vec{2b}}^t$ [6], у якій $u := \text{col}(u_1; \dots; u_m),$ а

$$\mathbb{A}(t; \partial_{x_1}) := \left(a_0^{lj}(t) \sum_{|k_1/\vec{2b}|_+=1} a_{k_1} (i\partial_{x_1})^{k_1} + \sum_{|k_1/\vec{2b}|_+ < 1} a_{k_1}^{lj}(t) (i\partial_{x_1})^{k_1} \right)_{l,j=1}^m$$

— матричний диференціальний вираз, коефіцієнти якого неперервні на $[0; T]$ комплекснозначні функції такі, що відповідний диференціальний вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(t; \partial_{x_1})$$

є $\vec{2b}$ -параболічним на множині $\Pi_{(0;T]}^{n_1}$ [2].

У праці [6] для системи (1) побудована ФМРЗК G та досліджено її основні властивості. Зокрема, встановлено нескінченну диференційовність матриці G за просторовими змінними та існування додатних сталих A, B, c і δ таких, що для всіх $\{q, l\} \subset$

$\mathbb{Z}_+^n, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, t \in (\tau; T]$ та $\tau \in [0; T)$ виконується оцінка

$$\begin{aligned} |\partial_x^q \partial_\xi^l G(t, x; \tau, \xi)| &\leq c A^{|q|+} q^{q\vec{\beta}^*} B^{|l|+} l^{\vec{l}\vec{\beta}^*} \times \\ &\times (t - \tau)^{-|l_1+q_1+\vec{1}|/\vec{2b}|_+ - |(\vec{1} + \widehat{\vec{1}/\vec{2b}}) \cdot (l_2+q_2+\vec{1})|_+} \times \\ &\times (t - \tau)^{-|(\vec{2} + \vec{1}/\vec{2b})' \cdot (l_3+q_3+\vec{1}')|_+} \times \\ &\times \exp \left\{ -\delta \left(\sum_{j=1}^{n_1} ((t - \tau)^{-\frac{1}{2b_j}} |x_{1j} - \xi_{1j}|)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \right. \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{n_2} ((t - \tau)^{-1-\frac{1}{2b_j}} |x_{2j} - \xi_{2j} + (t - \tau)x_{1j}|)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_3} ((t - \tau)^{-2-\frac{1}{2b_j}} |x_{3j} - \xi_{3j} + (t - \tau)x_{2j} + \\ &\left. \left. + (t - \tau)^2 x_{1j}/2\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Ці властивості матриці G дозволили у [8] розглянути задачу Коші для системи (1) з початковою умовою

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = f, f \in (\mathbb{S}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}})', \quad (3)$$

де $\mathbb{S}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ — векторний аналог простору $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ Гельфанда і Шилова, та встановити коректну розв'язність цієї задачі в такому вигляді: нехай початкова функція $f \in (\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*})'$, тоді для задачі Коші (1), (3) існує єдиний неперервно залежний від початкових даних розв'язок, який є неперервно диференційовним за t , нескінченно диференційовним за x , задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) у сенсі слабкої збіжності у просторі $(\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*})'$, при цьому, зображується формулою

$$u(t; x) = \langle f, G(t, x; 0, \cdot) \rangle, (t; x) \in \Pi_{(0;T]}^n.$$

2. Основний результат. Передусім доведемо таке допоміжне твердження.

Лема. *Існують додатні сталі c_0, A_0, B_0 і δ_0 такі, що для всіх $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, x_{lj} \neq \xi_{lj}, j \in \mathbb{N}_{n_l}, l \in \mathbb{N}_3, i t \in (0; 1)$ виконується оцінка*

$$|\partial_x^q \partial_\xi^k G(t, x; 0, \xi)| \leq c_0 t^n A_0^{|q|+} B_0^{|k|+} q^q k^k \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\prod_{j=1}^{n_1} |x_{1j} - \xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(k,q)}{2b_j-1}} \right) \times \\
& \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} |x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(k,q)}{2b_j-1}} \right) \times \\
& \times \left(\prod_{j=1}^{n_3} \left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2} \right|^{-\frac{2b_j m_{3j}(k,q)}{2b_j-1}} \right) \times \\
& \times \exp \left\{ -\delta_0 \left(\sum_{j=1}^{n_1} \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{n_3} \left(\frac{|x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2}|}{t^{2+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

при $m(k, q) = (m_1(k, q), m_2(k, q), m_3(k, q)) \in \mathbb{Z}_+^n$ такому, що

$$m_{1j}(k, q) = 2b_j + \left[\left(1 - \frac{1}{2b_j} \right) (k_{1j} + q_{1j} + 1) \right],$$

$$j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$m_{2j}(k, q) = 1 + \left[\frac{2b_j - 1}{2b_j + 1} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2b_j} \right) (k_{2j} + q_{2j} + 1) \right], \quad j \in \mathbb{N}_{n_2}, \quad (4)$$

$$m_{3j}(k, q) = 1 + \left[\frac{2b_j - 1}{4b_j + 1} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2b_j} \right) (k_{3j} + q_{3j} + 1) \right], \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}$$

(тут $[\cdot]$ – ціла частина числа).

Доведення. Оскільки

$$e^{-p} \leq \frac{m!}{p^m}, \quad p > 0 \quad (\forall m \in \mathbb{Z}_+),$$

то

$$\begin{aligned}
& t^{-\frac{1}{2b_j}(k_{1j}+q_{1j}+1)} k_{1j}^{\frac{1}{2b_j}k_{1j}} q_{1j}^{\frac{1}{2b_j}q_{1j}} \times \\
& \times \exp \left\{ -\delta \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\} \leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^{m_{1j}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times t^{\frac{m_{1j}}{2b_j-1} - \frac{k_{1j}+q_{1j}+1}{2b_j}} k_{1j}^{\frac{1}{2b_j}k_{1j}} q_{1j}^{\frac{1}{2b_j}q_{1j}} m_{1j}! \times \\
& \times |x_{1j} - \xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}}{2b_j-1}} \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\},
\end{aligned}$$

$$m_{1j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$\begin{aligned}
& t^{-\left(1+\frac{1}{2b_j}\right)(k_{2j}+q_{2j}+1)} k_{2j}^{\frac{1}{2b_j}k_{2j}} q_{2j}^{\frac{1}{2b_j}q_{2j}} \times \\
& \times \exp \left\{ -\delta \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\} \leq \\
& \leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^{m_{2j}} t^{\frac{2b_j+1}{2b_j-1}m_{2j} - \frac{2b_j+1}{2b_j}(k_{2j}+q_{2j}+1)} k_{2j}^{\frac{1}{2b_j}k_{2j}} q_{2j}^{\frac{1}{2b_j}q_{2j}} \times
\end{aligned}$$

$$\times m_{2j}! |x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}}{2b_j-1}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\},$$

$$m_{2j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$\begin{aligned}
& t^{-\left(2+\frac{1}{2b_j}\right)(k_{3j}+q_{3j}+1)} k_{3j}^{\frac{1}{2b_j}k_{3j}} q_{3j}^{\frac{1}{2b_j}q_{3j}} \times \\
& \times \exp \left\{ -\delta \left(\frac{|x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2}|}{t^{2+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^{m_{3j}} t^{\frac{4b_j+1}{2b_j-1}m_{3j} - \frac{4b_j+1}{2b_j}(k_{3j}+q_{3j}+1)} k_{3j}^{\frac{1}{2b_j}k_{3j}} \times$$

$$\times q_{3j}^{\frac{1}{2b_j}q_{3j}} m_{3j}! \left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2} \right|^{-\frac{2b_j m_{3j}}{2b_j-1}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} \left(\frac{|x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2}|}{t^{2+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right\},$$

$$m_{3j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Розглянемо тепер нерівності

$$\frac{m_{1j}}{2b_j + 1} - \frac{k_{1j} + q_{1j} + 1}{2b_j} \geq 1, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$\frac{2b_j + 1}{2b_j - 1} m_{2j} - \frac{2b_j + 1}{2b_j} (k_{2j} + q_{2j} + 1) \geq 1, \quad (5)$$

$$j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$\frac{4b_j + 1}{2b_j - 1} m_{3j} - \frac{4b_j + 1}{2b_j} (k_{3j} + q_{3j} + 1) \geq 1,$$

$$j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Очевидно, що компоненти вектора $m(k, q)$ із $\mathbb{Z}_+^n$, які визначаються рівностями (4), є натуральними роз'язками нерівностей (5).

Зазначимо далі, що для всіх $\{\alpha, a, b, c\} \subset (0; +\infty)$

$$([a + \alpha b + \alpha c] + 1)! \leq (([a] + 4) + [\alpha b] + [\alpha c])! = \frac{(([a] + 4) + [\alpha b] + [\alpha c])!}{([a] + 4)!([\alpha b] + [\alpha c])!} \times$$

$$\times \frac{([\alpha b] + [\alpha c])!}{[\alpha b]![\alpha c]!} ([a] + 4)! [\alpha b]! [\alpha c]! \leq$$

$$\leq ([a] + 4)! 2^{(a+4+2(\alpha b + \alpha c))} (\alpha b)^{\alpha b} (\alpha c)^{\alpha c}.$$

Ураховавши все це, безпосередньо з оцінки (2) при $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ і відповідному $m \in \mathbb{Z}_+^n$ із компонентами (4), приходимо до твердження вихідної леми.

Лему доведено.

Правильне наступне твердження.

Теорема. Нехай узагальнена функція $f \in (\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}})' \subset (\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*})'$ при $\vec{\beta} > \vec{1}$ на множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ дорівнює нулеві, а $u(t; x) = \langle f, G(t, x; 0, \cdot) \rangle$ – відповідний розв'язок задачі Коші (1), (3). Тоді $\partial_x^q u(t; x)$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$, збігається до нуля при $t \rightarrow +0$ рівномірно стосовно змінної x на кожній компактній множині $\mathbb{K} \subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина з $\mathbb{R}^n$ така, що

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1 : |x_{lj} - \xi_{lj}| \geq a_{lj} > 0,$$

$$j \in \mathbb{N}_{n_l}, \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

Побудуємо фінітну функцію $\eta_0 \in \mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}}$ з носієм в Q так, щоб $\eta_0 = 1$ на $\mathbb{K}_1$. Тоді, оскільки у просторах типу S визначена операція множення, а елементи матричної функції $\partial_x^q G(t, x; 0, \cdot)$ належать до простору $\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0; T]$, то елементи матриць $\eta_0(\cdot) \partial_x^q G(t, x; 0, \cdot)$ і $(1 - \eta_0(\cdot)) \partial_x^q G(t, x; 0, \cdot)$ належать до $\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}}$ при зазначених t та x .

Отже,

$$\partial_x^q u(t; x) = \langle f, \eta_0(\cdot) \partial_x^q G(t, x; 0, \cdot) \rangle +$$

$$+ \langle f, \eta_1(\cdot) \partial_x^q G(t, x; 0, \cdot) \rangle, \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}^n,$$

де $\eta_1(\cdot) := 1 - \eta_0(\cdot)$. Ураховавши те, що узагальнена функція f дорівнює нулю на Q , а $\text{supp}(\eta_0(\cdot) \partial_x^q G(t, x; 0, \cdot)) \subset Q$, з попередньої рівності одержуємо, що

$$\partial_x^q u(t; x) = t^n \langle f, t^{-n} \eta_1(\cdot) \partial_x^q G(t, x; 0, \cdot) \rangle,$$

при $(t; x) \in \Pi_{(0; T]}^n$.

Для доведення теореми досить установити рівномірну обмеженість стосовно змінних t , $0 < t \ll 1$, $x \in \mathbb{K}$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ сукупності функцій $\omega_{t,x}(\xi) := t^{-n} \eta_1(\xi) \partial_x^q G(t, x; 0, \xi)$ у просторі $\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}}$, тобто встановити оцінку

$$|\partial_\xi^k \omega_{t,x}(\xi)| \leq c A^{|k|_+} k^{\vec{\beta}^k} e^{-\delta |\xi|_+^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \quad (6)$$

(тут величини c , A і δ не залежать від t , x , ξ і k). Але, оскільки $\omega_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{K}_1$, то оцінку (6) досить установити лише для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1$.

Згідно формули Лейбніца диференціювання добутку функцій маємо

$$|\partial_\xi^k \omega_{t,x}(\xi)| \leq$$

$$\leq t^{-n} \sum_{|l|_+ = 0}^{|k|_+} C_k^l |\partial_\xi^l \eta_1(\xi)| |\partial_\xi^{k-l} \partial_x^q G(t, x; 0, \xi)| =$$

$$= t^{-n} \left\{ |\partial_\xi^k \partial_x^q G(t, x; 0, \xi)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{|l|_+ = 0}^{|k|_+} C_k^l |\partial_\xi^{k-l} \eta_0(\xi)| |\partial_\xi^l \partial_x^q G(t, x; 0, \xi)| \right\}.$$

Зваживши тепер на твердження попередньої леми та належність η_0 до $\mathbb{S}_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}}$, для $t \in (0; 1)$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{K}$ і $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1$ одержимо

$$|\partial_\xi^k \omega_{t,x}(\xi)| \leq c_0 A_0^{|q|_+} q^q \left\{ B_0^{|k|_+} k^k \times \right.$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_1} |x_{1j} - \xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(k,q)}{2b_j - 1}} \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{n_2} |x_{2j} - \xi_{2j} + t x_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(k,q)}{2b_j - 1}} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\prod_{j=1}^{n_3} \left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2} \right|^{-\frac{2b_j m_{3j}(k,q)}{2b_j-1}} \right) + \\
& + c_1 \sum_{|l|_+=0}^{|k|_+} 2^{|k|_+} B_1^{|k-l|_+} (k-l)^{\beta(k-l)} e^{-\delta_1 |\xi|_+^{\bar{\Gamma}/\alpha^*}} \times \\
& \times B_0^{|l|_+} l^l \left(\prod_{j=1}^{n_1} |x_{1j} - \xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(l,q)}{2b_j-1}} \right) \times \quad (7) \\
& \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} |x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(l,q)}{2b_j-1}} \right) \times \\
& \times \left(\prod_{j=1}^{n_3} \left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2} \right|^{-\frac{2b_j m_{3j}(l,q)}{2b_j-1}} \right) \Bigg\} \\
& \times \exp \left\{ -\delta_0 \left(\sum_{j=1}^{n_1} \left(\frac{|x_{1j} - \xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^{n_3} \left(\frac{\left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2} \right|}{t^{2+1/(2b_j)}} \right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Далі, оскільки $x \in \mathbb{K}$, то існує такий вектор $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^n$ з додатними компонентами, що для всіх $x \in \mathbb{K}$ виконуються такі нерівності:

$$|x_{lj}| \leq r_{lj}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_l}, \quad l \in \mathbb{N}_3.$$

$$\begin{aligned}
& \text{Тоді для } x \in \mathbb{K}, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1 \text{ і } t \in (0; r_0), \quad r_0 := \\
& = \min \left\{ \min_{j \in \mathbb{N}_{n_2}} \left\{ \frac{a_{2j}}{2r_{2j}} \right\}, \min_{j \in \mathbb{N}_{n_3}} \left\{ \frac{a_{3j}}{2(r_{2j} + r_{3j})} \right\}, 1 \right\},
\end{aligned}$$

$$|x_{1j} - \xi_{1j}| \geq a_{1j} > 0, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$\begin{aligned}
& |x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}| \geq |x_{2j} - \xi_{2j}| - t|x_{1j}| \geq \\
& \geq |x_{2j} - \xi_{2j}| - tr_{2j} \geq \frac{a_{2j}}{2} > 0, \quad j \in \mathbb{N}_{n_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + \frac{t^2 x_{1j}}{2} \right| \geq \\
& \geq |x_{3j} - \xi_{3j}| - t \left(|x_{2j}| + \frac{t|x_{1j}|}{2} \right) \geq
\end{aligned}$$

$$\geq |x_{3j} - \xi_{3j}| - t(r_{2j} + r_{3j}) \geq \frac{a_{3j}}{2} > 0, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Крім цього, для зазначених x, ξ і t

$$|x_{1j} - \xi_{1j}| \geq |\xi_{1j}| - r_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_1},$$

$$|x_{2j} - \xi_{2j} + tx_{1j}| \geq |\xi_{2j}| - (r_{1j} + r_{2j}), \quad j \in \mathbb{N}_{n_2},$$

$$\begin{aligned}
& |x_{3j} - \xi_{3j} + tx_{2j} + 2^{-1}t^2 x_{1j}| \geq \\
& \geq |\xi_{3j}| - (r_{1j} + r_{2j} + r_{3j}), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.
\end{aligned}$$

Звідси та з нерівності (7), урахувавши структуру (4) компонент вектора $m(k, q)$, одержуємо оцінку (6).

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kolmogoroff A.N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. 1934. **35**. P. 116–117.
2. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. 2004. **152**. 390 p.
3. Малицька Г.П. Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. 2008. **60**, №12. С. 1650–1663.
4. Малицькая А.П. Фундаментальная матрица решений задачи Коши для одного класса систем уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. 2010. **46**, №5. С. 748–751.
5. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних системи // Карпатські мат. публ. 2012. **4**, №1. С. 12–22.
6. Литовченко В.А., Настасий Е.Б. Выврожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка // Сиб. мат. журн. 2012. **53**, №1. С. 148–164.
7. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
8. Литовченко В.А., Васько Е.Б. Задача Коши для вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка с обобщенными начальными данными // Дифференц. уравнения. 2014. **50**, №12. С. 1598–1606.