УДК 517.956.4

©2007 р. С.Д.Івасишен, Г.П.Івасюк

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Встановлені деякі нові властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.

Some new properties for the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems are investigated.

$\overrightarrow{2b}$-параболічним системам рівнянь із частинними похідними, які означені С.Д.Ейдельманом [1, 2], присвячені праці ряду авторів. Одержані для таких систем результати підсумовані в монографії [3], в якій наведена детальна бібліогріфія відповідних праць. Зокрема, в цих працях досить детально досліджена фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) та наведені різноманітні застосування цієї матриці. У даній статті встановлені деякі властивості ФМРЗК для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем, які до цього часу були невідомими. Аналогічні властивості для параболічних за Петровським систем доведені в [4].

Нехай n, N, b_1, $\ldots$, b_n – задані натуральні числа, T – задане додатне число. Використовуватимемо такі позначення: $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$; b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_0 := 2b$, $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j := b/b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{\mathbb{Z}}_+^{n+1}$ – сукупність усіх $(n+1)$-вимірних мультиіндексів $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha)$, де $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$; $\Pi_H := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, де $H \subset \mathbb{R}$; i – уявна одиниця. Для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ покладемо $\|\alpha\| := \sum_{j=1}^n m_j\alpha_j$, а для $\overline{\alpha} \in \overline{\mathbb{Z}}_+^{n+1}$ – $\|\overline{\alpha}\| := \sum_{j=0}^n m_j\alpha_j$.

Зважаючи на нерівноправність змінних $x_1, \ldots, x_n$ у $\overrightarrow{2b}$-параболічних системах, використовуватимемо таку спеціальну відстань між точками x і y із $\mathbb{R}^n$:

$$p(x;y) := \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^{2/m_j}\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Властивість гельдеровості функцій буде розумітись відносно відстані (1). Так, функція $f\colon Q \to \mathbb{C}$, де Q – деяка множина точок $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, називатиметься *гельдеровою за x рівномірно щодо t з показником $\lambda \in (0,1)$* в Q, якщо існує така стала $H > 0$, що для довільних $\{(t,x),(t,y)\} \subset Q$ справджується нерівність

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le H(p(x;y))^\lambda.$$

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$L(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) := = \left(I\partial_t - \sum_{\|\alpha\|\le 2b} a_\alpha(t,x)\partial_x^\alpha\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (2)$$

де I – одинична матриця порядку N, a_α, $\|\alpha\| \le 2b$, – матриці розміру $N \times N$, $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$ і $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$.

Припускатимемо виконаними такі умови:

(A_1) система (2) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна в $\Pi_{[0,T]}$ [1 – 3];

(A_2) коефіцієнти a_α, $\|\alpha\| \le 2b$, обмежені, неперервні за t (при $N > 1$ неперервність за t a_α з $\|\alpha\| = 2b$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$) і гельдерові за x рівномірно щодо t з показником λ в $\Pi_{[0,T]}$;

(A_3) існують похідні $\partial_x^\alpha a_\alpha$, $\|\alpha\| \leq 2b$, які є обмеженими, неперервними за t і гельдеровими за x рівномірно щодо t з показником λ в $\Pi_{[0,T]}$.

На підставі умови A_3 для системи (2) існує спряжена за Лагранжем система

$$L^*(\tau, \xi, \partial_\tau, \partial_\xi)v(\tau, \xi) :=$$

$$= -\partial_\tau v(\tau, \xi) - \sum_{\|\alpha\| \leq 2b} (-\partial_\xi)^\alpha (\overline{a}'_\alpha(\tau, \xi)v(\tau, \xi)) =$$

$$= g(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)}, \tag{3}$$

де риска над a_α означає комплексне спряження, а штрих – транспонування матриці.

Використавши формули для виразів L і L^* із (2) і (3), одержимо таку дивергентну рівність для будь-яких досить гладких вектор- або матриць-функцій u і v відповідних розмірів:

$$\overline{v}' Lu - \overline{(L^* v)}' u = \partial_t(\overline{v}' u) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} B^j[v, u]. \tag{4}$$

Тут

$$B^j[v, u] := -\sum_{0 < \|\alpha\| \leq 2b} \sum_{\nu_j = 0}^{\alpha_j - 1} (-\partial_{x_1})^{\alpha_1} \times$$

$$\times \ldots (-\partial_{x_{j-1}})^{\alpha_{j-1}} (-\partial_{x_j})^{\nu_j} (\overline{v}' a_\alpha) \partial_{x_j}^{\alpha_j - \nu_j} \times$$

$$\times \partial_{x_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

де при $\alpha_j = 0$ відповідна сума дорівнює нулю. Інтегруванням рівності (4) по $[t_1, t_2] \times \Omega$, де $t_1 < t_2$, а Ω – область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею Γ, одержується така важлива формула Гріна-Остроградського:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_\Omega (\overline{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u)(\theta, y) dy =$$

$$= \int_\Omega (\overline{v}' u)(t_2, y) dy - \int_\Omega (\overline{v}' u)(t_1, y) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_\Gamma \sum_{j=1}^n B^j[v, u](\theta, y) \mu_j dS_y, \tag{5}$$

де $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до межі Γ.

Зауваження. Для вектор- чи матриць-функцій u і v таких, що вирази $B^j[v, u](\theta, y)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, досить швидко прямують до нуля при $|y| \to \infty$, з формули (5) випливає формула

$$\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u)(\theta, y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{v}' u)(t_2, y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{v}' u)(t_1, y) dy, \tag{6}$$

а з неї, в свою чергу, випливає, що якщо, крім того, u і v – розв'язки відповідно рівнянь $Lu = 0$ і $L^* v = 0$, то інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\overline{v}' u)(t, y) dy$$

не залежить від t.

У працях [2, 3] доведено, що за умов A_1 – A_3 для системи (2) існує ФМРЗК Z з такими властивостями.

1^0. Для матриці Z справджуються оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} Z(t, x; \tau, \xi)| \leq$$

$$\leq C(t - \tau)^{1 - (M + \|\overline{\alpha}\|)/(2b)} E_c(t - \tau, x - \xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \|\overline{\alpha}\| \leq 2b, \tag{7}$$

де $C > 0$, $c > 0$, $M := \sum_{j=0}^n m_j$, $E_c(t, x) := \exp\left\{ -c \sum_{j=1}^n t^{1 - q_j} |x_j|^{q_j} \right\}$.

2^0. ФМРЗК Z є нормальною, тобто матриця

$$Z^*(\tau, \xi; t, x) := \overline{Z}'(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

є ФМРЗК для спряженої системи (3).

$\mathbf{3^0}$. Матриця Z задовольняє функціональне рівняння

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)Z(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0\le\tau<t\le T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Далі ці властивості доповнимо новими.

$\mathbf{4^0}$. *Існує тільки одна нормальна ФМРЗК, яка задовольняє нерівності (7).*

Доведення. Нехай Z_1 і Z_2 – дві нормальні ФМРЗК, які задовольняють нерівності (7). Тоді, поклавши в (6)

$$v(\theta,y)=Z_1^*(\theta,y;t,x),\quad u(\theta,y)=Z_2(\theta,y;\tau,\xi),$$
$$\tau<\theta<t,$$

скориставшись рівністю (8) і зауваженням, одержимо, що інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(t,x;\theta,y)Z_2(\theta,y;\tau,\xi)dy,\quad \tau<\theta<t,$$

не залежить від θ. Позначимо його через $Y(t,x;\tau,\xi)$. Спрямувавши θ спочатку до τ, а потім до t та скориставшись означенням ФМРЗК, прийдемо до рівностей

$$Y(t,x;\tau,\xi)=Z_1(t,x;\tau,\xi)=Z_2(t,x;\tau,\xi),$$

що й треба було довести. ►

$\mathbf{5^0}$. *Правильними є рівності*

$$\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy-I\right)\right)=$$
$$=a_0(t,x),\tag{9}$$

$$\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)(y-x)^\beta dy\right)=$$
$$=\begin{cases}\beta!a_\beta(t,x), & 0<\|\beta\|\le 2b,\\ 0, & \|\beta\|>2b\end{cases}\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{10}$$

де $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, $\beta!:=\beta_1!\dots\beta_n!$.

Доведення. Нехай $0<\varepsilon<t-\tau$. Використаємо для $u(\theta,y)=I$, $v(\theta,y)=Z^*(\theta,y;t,x)$, $t_1=\tau$ і $t_2=t-\varepsilon$ формулу (6). Оскільки $(L^*Z^*)(\theta,y)=0$, а $(LI)(\theta,y)=-a_0(\theta,y)$, то на підставі (8)

$$-\int\limits_\tau^{t-\varepsilon} d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)a_0(\theta,y)dy=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-\varepsilon,y)dy-\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy.$$

Звідси при $\varepsilon\to 0$ одержуємо

$$\int\limits_\tau^{t} d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)a_0(\theta,y)dy=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy-I.\tag{11}$$

На підставі теореми про середнє значення маємо

$$(t-\tau)^{-1}\int\limits_\tau^{t} d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)a_0(\theta,y)dy=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\gamma,y)a_0(\gamma,y)dy,\quad \tau<\gamma<t.\tag{12}$$

Із (11) і (12) випливає співвідношення (9).

Поклавши тепер у формулі (6) $u(\theta,y)=(y-x)^\beta$ і залишивши $v(\theta,y)$, t_1 та t_2 попередніми, одержимо

$$\int\limits_\tau^{t-\varepsilon} d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)L(\theta,y,\partial_\theta,\partial_y)(y-x)^\beta dy=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-\varepsilon,y)(y-x)^\beta dy-\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)\times$$
$$\times(y-x)^\beta dy.$$

Звідси за допомогою означення ФМРЗК маємо

$$\int\limits_\tau^{t} d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\theta,y)L(\theta,y,\partial_\theta,\partial_y)(y-x)^\beta dy=$$
$$=-\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)(y-x)^\beta dy.\tag{13}$$

Далі,

$$L(\theta, y, \partial_\theta, \partial_y)(y-x)^\beta =$$

$$= -\sum_{\|\alpha\|\le 2b} a_\alpha(\theta, y)\partial_y^\alpha (y-x)^\beta.$$

За заданим мультиіндексом $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ розглянемо такі множини мультиіндексів:

$$\mathbb{Z}_1^n(\beta) := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \;\Big|\; \|\alpha\| \le 2b,$$

$$\exists\, l \in \{1, \dots, n\} : \alpha_l > \beta_l\},$$

$$\mathbb{Z}_2^n(\beta) := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \;\Big|\; \|\alpha\| \le 2b,$$

$$\exists\, l \in \{1, \dots, n\} : \alpha_l < \beta_l,$$

$$\forall j \in \{1, \dots, l-1, l+1, \dots, n\} : \alpha_j \le \beta_j\}.$$

Очевидно, що

$$\partial_y^\alpha (x-y)^\beta =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha \in \mathbb{Z}_1^n(\beta), \\ \beta!, & \text{якщо } \alpha = \beta, \\ \prod\limits_{j=1}^n (\beta_j(\beta_j - 1)\times \\ \times \dots (\beta_j - \alpha_j + 1)\times \\ \times (y_j - x_j)^{\beta_j - \alpha_j}), & \text{якщо } \alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta). \end{cases}$$

Тому якщо $\|\beta\| \le 2b$, то

$$L(\theta, y, \partial_\theta, \partial_y)(y-x)^\beta =$$

$$= -\beta! a_\beta(\theta, y) - K_\beta(\theta, y, x), \qquad (14)$$

де

$$K_\beta(\theta, y, x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} a_\alpha(\theta, y) \prod_{j=1}^n (\beta_j(\beta_j - 1)\times$$

$$\times \dots (\beta_j - \alpha_j + 1)(y_j - x_j)^{\beta_j - \alpha_j}),$$

а якщо $\|\beta\| > 2b$, то

$$L(\theta, y, \partial_\theta, \partial_y)(y-x)^\beta = -K_\beta(\theta, y, x). \qquad (15)$$

Використовуючи оцінку (7) для Z та обмеженість коефіцієнтів a_α, згідно з умовою A_2, одержуємо

$$|Z(t, x; \theta, y) K_\beta(\theta, y, x)| \le$$

$$\le C_0 (t-\theta)^{1 - M/(2b)} E_c(t-\theta, x-y)\times$$

$$\times \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} \prod_{j=1}^n |y_j - x_j|^{\beta_j - \alpha_j} =$$

$$= C_0 (t-\theta)^{1 - M/(2b)} E_c(t-\theta, x-y)\times$$

$$\times \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} \prod_{j=1}^n \left(\frac{|y_j - x_j|}{(t-\theta)^{1/(2b_j)}} \right)^{\beta_j - \alpha_j} (t-\theta)^{\|\beta - \alpha\|/(2b)} \le$$

$$\le C_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} (t-\theta)^{1 - (M - \|\beta-\alpha\|)/(2b)} E_{c_1}(t-\theta, x-y),$$

$$\tau < \theta < t, \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $c_1 \in (0, c)$. Звідси випливає, що

$$\left| \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \theta, y) K_\beta(\theta, y, x) dy \right| \le$$

$$\le C_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} \int_\tau^t (t-\theta)^{\|\beta - \alpha\|/(2b)} d\theta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\theta, x-y)(t-\theta)^{-\left(\sum\limits_{j=1}^n m_j\right)/(2b)} dy =$$

$$= C_2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} \int_\tau^t (t-\theta)^{\|\beta-\alpha\|/(2b)} d\theta \le$$

$$\le C_3 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} (t-\tau)^{1 + \|\beta - \alpha\|/(2b)}. \qquad (16)$$

Із (13) – (16) одержуємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, y)(y-x)^\beta dy =$$

$$= \begin{cases} \beta! \int\limits_\tau^t d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \theta, y) a_\beta(\theta, y) dy + \\ + O\left(\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} (t-\tau)^{1 + \|\beta-\alpha\|/(2b)} \right), & \|\beta\| \le 2b, \\ O\left(\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^n(\beta)} (t-\tau)^{1 + \|\beta-\alpha\|/(2b)} \right), & \|\beta\| > 2b. \end{cases}$$

Поділивши обидві частини цих рівностей на $t-\tau$ і перейшовши до границі при $\tau \to t$, прийдемо до рівностей (10). ▶

6^0. *Для правильності рівності*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy = I$$

необхідно й досить, щоб $a_0 = 0$.

Доведення. Необхідність безпосередньо випливає з (9). Нехай тепер $a_0 = 0$. Тоді $LI = 0$ і тому інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy$$

не залежить від τ. А оскільки він має I своєю границею при $\tau \to t$, то він дорівнює I.▶

7^0. *Нехай коефіцієнт* a_0 *системи (2) залежить тільки від* t, *тобто* $a_0 = a_0(t)$, $t \in [0,T]$. *Тоді матриця*

$$U(t,\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

залежить тільки від t *і* τ *та є розв'язком задачі*

$$\frac{dU}{dt} = a_0(t)U, \tag{17}$$

$$U|_{t=\tau} = I, \tag{18}$$

тобто U *є фундаментальною матрицею розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь (17).*

Доведення. Нехай $U_0(t,\tau)$, $0 \le \tau < t \le T$, – розв'язок задачі (17), (18), а $U_0^{-1}(t,\tau)$ – матриця, обернена до матриці $U_0(t,\tau)$. Покладемо $Z_0(t,x;\tau,y) := U_0^{-1}(t,\tau)Z(t,x;\tau,y)$, так що $Z(t,x;\tau,y) = U_0(t,\tau)Z_0(t,x;\tau,y)$. Оскільки для $t > \tau$

$$0 = L(t,x,\partial_t,\partial_x)Z(t,x;\tau,y) = L(t,x,\partial_t,\partial_x)\times$$
$$\times(U_0(t,\tau)Z_0(t,x;\tau,y)) = \frac{dU_0(t,\tau)}{dt}\times$$
$$\times Z_0(t,x;\tau,y) + U_0(t,\tau)\partial_t Z_0(t,x;\tau,y) -$$
$$-\sum_{\|\alpha\|\le 2b} a_\alpha(t,x)U_0(t,\tau)\partial_x^\alpha Z_0(t,x;\tau,y),$$

то на підставі (17) маємо

$$\left(U_0(t,\tau)\partial_t - \sum_{0<\|\alpha\|\le 2b} a_\alpha(t,x)U_0(t,\tau)\partial_x^\alpha\right)\times$$
$$\times Z_0(t,x;\tau,y) = 0$$

або

$$L_0(t,\tau,x,\partial_t,\partial_x)Z_0(t,x;\tau,y) :=$$
$$= \left(I\partial_t - \sum_{0<\|\alpha\|\le 2b} U_0^{-1}(t,\tau)a_\alpha(t,x)U_0(t,\tau)\partial_x^\alpha\right)\times$$
$$\times Z_0(t,x;\tau,y) = 0. \tag{19}$$

Через те, що характеристичне рівняння для системи

$$L_0(t,\tau,x,\partial_t,\partial_x)u = 0 \tag{20}$$

еквівалентне характеристичному рівнянню для системи (2), то система (20) є $\overrightarrow{2b}$-параболічною. Із рівностей (18) і (19) випливає, що Z_0 – ФМРЗК для системи (20). Оскільки ця система задовольняє умову із властивості **6^0**, то

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\tau,y)dy =$$
$$= U_0^{-1}(t,\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,y)dy = U_0^{-1}(t,\tau)U(t,\tau),$$

звідки випливає, що $U(t,\tau) = U_0(t,\tau)$ і властивість **7^0** доведена. ▶

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.

2. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.

3. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).

4. *Слободецкий Л.Н.* О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы // Мат. сб. – 1958. – **46**, № 2. – С. 229 – 258.