УДК 517.956

©2007 р. І.М. Довжицька, І.Д. Пукальський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

У гельдерових просторах доведено коректну розв'язність задачі з косою похідною та інтегральною нелокальною умовою за часовою змінною для рівномірно параболічних лінійних рівнянь. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах. Розглянуто задачу вибору оптимального керування системою, яка описується нелокальною задачею з косою похідною з обмеженим внутрішнім і крайовим керуванням. Функціонал якості задається об'ємним інтегралом.

We prove the well-posed solvability of a problem with skew derivative under an integral nonlocal condition on a time variable for uniformly parabolic linear equations in Hölder spaces. Besides, we estimate solutions of the problem in the corresponding spaces. We consider also a problem of choice of an optimal control for a system which is described by a nonlocal problem with skew derivative and with bounded interior and boundary control. The quality functional is given by a volume integral.

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються рівняннями параболічного типу, виникає при розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема при дослідженні процесів нагрівання й охолодження масивних елементів конструкцій, поширення полів температури або концентрації. Вивчення таких задач проводилося в [1 – 3].

Дослідженню коректної розв'язності першої крайової задачі з нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку, які вироджуються за сукупністю змінних, присвячено працю [4].

У цій статті встановлено необхідні та достатні умови оптимального керування системою, яка описується задачею з косою похідною та нелокальною інтегральною умовою за часовою змінною у випадку обмеженого внутрішнього і крайового керування, з критерієм якості типу об'ємних і поверхневих інтегралів.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D – обмежена випукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. В області $Q = (0,T] \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t,x,p(t,x))$ та $p(t,x)$, які реалізують мінімум функціоналу

$$I(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F(t,x,\overrightarrow{u})dx \tag{1}$$

у класі функцій

$$V \equiv \{p(t,x): \ p(t,x) \in C^{(\alpha)}(Q),$$
$$\psi_1(t,x) \le p(t,x) \le \psi_2(t,x)\},$$

де $u(t,x,p)$ є розв'язком нелокальної крайової задачі

$$Lu(t,x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} -$$
$$-\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = f(t,x,p), \tag{2}$$

$$u(0,x) + \int\limits_0^T q(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \tag{3}$$

$$Bu(t,x)\Big|_\Gamma \equiv \left(\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + b_0(t,x)u\right)\Big|_\Gamma =$$
$$= g(t,x), \tag{4}$$

$$\Gamma = (0,T) \times \partial D, \quad \overrightarrow{u} = (u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, p) \equiv \equiv (u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}).$$

Нехай для задачі (1) – (4) виконані умови:

а) $a_{ij} \in C^{\alpha}(Q)$, $a_i \in C^{\alpha}(Q)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$;

б) $q \in C^{2+\alpha}(Q)$, $\int\limits_0^T |q(\tau,x)|d\tau \le M < 1$, $b_k \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$,

$$B\varphi|_{x \in \partial D} = g(0,x) + \int_0^T q(\tau,x)g(\tau,x)d\tau,$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\frac{\partial q}{\partial x_k}\right|_{\Gamma} = 0;$$

в) функції $f(t,x,p(t,x)) \equiv f_1(t,x)$, $\varphi(x)$, $g(t,x)$ як функції (t,x) належать відповідно просторам $C^{\alpha}(Q)$, $C^{2+\alpha}(D)$, $C^{1+\alpha}(\Gamma)$;

г) функції $F(t,x,\overrightarrow{u})$, $f(t,x,p)$ мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами u_i, p, неперервні як функції змінних (t,x).

Існування та зображення розв'язку задачі (2) – (4). Розглянемо в області Q крайову задачу (2) – (4). Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови а) – в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2) – (4) у просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ і для нього справджується оцінка*

$$|u|_{C^{2+\alpha}(Q)} \le \le c(|f_1|_{C^{\alpha}(Q)} + |\varphi|_{C^{2+\alpha}(D)} + |g|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \quad (5)$$

Доведення. Розв'язок задачі (2) – (4) шукаємо у вигляді

$$u(t,x) = \int_D E(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi + v(t,x), \quad (6)$$

де $v(t,x)$ – розв'язок задачі з косою похідною

$$(Lv)(t,x) = f_1(t,x), v(0,x) = \varphi(x),$$
$$(Bv)(t,x)|_{\Gamma} = g(t,x), \quad (7)$$

$E(t,x,\tau,\xi)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі

$$(Lv)(t,x) = f_1(t,x), v(0,x) = \varphi(x),$$
$$(Bv)(t,x)|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

При виконанні умов а) – в) розв'язок задачі (7) існує і для нього правильна оцінка

$$|u|_{C^{2+\alpha}(Q)} \le \le c(|f_1|_{C^{\alpha}(Q)} + |\varphi|_{C^{2+\alpha}(D)} + |g|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \quad (9)$$

Задовольнивши нелокальну умову (3), одержимо

$$u(0,x) + \int_0^T dt \int_D E(\tau,x,0,\xi)u(0,\xi)q(\tau,\xi)d\xi = = -\int_0^T q(\tau,x)v(\tau,x)d\tau. \quad (10)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (10) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$u_0(0,x) = -\int_0^T q(\tau,x)v(\tau,x)d\tau \equiv F(x),$$

$$u_k(0,x) = F(x) + \int_0^T d\tau \int_D q(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\times \times u_{k-1}(0,\xi)d\xi, k \in \{1, 2, \dots\}.$$

Оскільки $E(t,x,\tau,\xi) \ge 0$, $0 \le \int\limits_D E(t,x,\tau,\xi)d\xi \le 1$, то

$$\left|\int_0^T d\tau \int_D q(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)d\xi\right| \le$$

$$\leq \int\limits_0^T |q(\tau,x)|d\tau \leq M.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$|u_k(0,x) - u_{k-1}(0,x)| \leq M^k |v|_{C(Q)}.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (10) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$u(0,x) = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(0,x) - u_{k-1}(0,x))$$

і для нього справедлива оцінка

$$|u(0x)| \leq \frac{M}{1-M} |v|_{C(Q)}. \qquad (11)$$

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2) – (4). Враховуючи обмеження $M < 1$, визначаємо розв'язок інтегрального рівняння (10) у вигляді

$$u(0,x) = F(x) + \int\limits_D R(x,y)F(y)dy, \qquad (12)$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi) + \int\limits_0^T q(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^T q(\tau,x)d\tau \int\limits_D E(\tau,x,0,y)R(y,\xi)dy,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\int\limits_D R(x,y)dy \leq \frac{M}{1-M}.$$

Поклавши у рівність (12) замість $F(y)$ значення

$$F(x) = -\int\limits_0^T q(\tau,x) \Bigg[\int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_D G_1(\tau,x,\beta,y) \times$$

$$\times f_1(\beta,y)dy + \int\limits_D G_1(\tau,x,0,y)\varphi(y)dy +$$

$$+ \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{\partial D} G_2(\tau,x,\beta,y)g(\beta,y)dy \Bigg],$$

де (G_1, G_2) – функція Гріна задачі (7) із [5], і змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$u(0,x) = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \Gamma_1(T,x,\tau,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_D \Gamma_1(T,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\partial D} \Gamma_2(T,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S,$$

де

$$\Gamma_j(T,x,\tau,\xi) = \int\limits_\tau^T [q(\beta,x)G_j(\beta,x,\tau,\xi) +$$

$$+ \int\limits_D R(x,y)q(\beta,y)G_j(\beta,y,\tau,\xi)dy]d\beta, j \in \{1,2\}.$$

Підставляючи значення $u(0,x)$ у поверхневий інтеграл рівності (6) і змінивши порядок інтегрування, одержимо зображення

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_D G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S +$$

$$+ \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D Z_1(t,x,\tau,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_D Z_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\partial D} Z_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S, \qquad (13)$$

де

$$Z_j(t,x,\tau,\xi) = \int\limits_D E(t,x,0,y)\Gamma_j(T,y,\tau,\xi)dy,$$

$$j \in \{1,2\}.$$

Враховуючи оцінки функції Гріна $E(t,x,0,\xi)$ і співвідношення (10), маємо

$$|u(0,x)|_{C^{2+\alpha}(D)} \le$$

$$\le c(|f_1|_{C^\alpha(Q)} + |\varphi|_{C^{2+\alpha}(D)} + |g|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \quad (14)$$

Тоді, враховуючи зображення $u(t,x)$ формулою (6) і оцінку (14), одержуємо нерівність (5).

Критерій оптимальності розв'язку задачі (1) – (4). Позначимо через

$$\lambda(t,x) = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_D \Bigg(D_{u_0}F(\tau,\xi,\overrightarrow{u}^0)G_1(\tau,\xi,t,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^n D_{u_i}F(\tau,\xi,\overrightarrow{u}^0)D_{\xi_i}G_1(\tau,\xi,t,x)\Bigg)d\xi+$$

$$+\int\limits_t^T d\tau \int\limits_D \Bigg(D_{u_0}F(\tau,\xi,\overrightarrow{u}^0)Z_1(\tau,\xi,t,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^n D_{u_i}F(\tau,\xi,\overrightarrow{u}^0)D_{\xi_i}Z_1(\tau,\xi,t,x)\Bigg)d\xi,$$

$$H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda) = F(t,x,\overrightarrow{u}) + \lambda(t,x)f(t,x,p).$$

Сформулюємо необхідні та достатні умови оптимальності керування $p(t,x)$.

Правильними є наступні теореми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови а) – г). Тоді, якщо функція $H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ є монотонно зростаючою за аргументом p для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^0 \equiv \psi_1(t,x)$, а оптимальним розв'язком задачі (1) – (4) є $u^0(t,x,p) \equiv u(t,x,\psi_1(t,x))$.*

Якщо функція $H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ є спадною за аргументом p для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^0 \equiv \psi_2(t,x)$, а оптимальним розв'язком задачі (1) – (4) є $u^0(t,x,p) \equiv u(t,x,\psi_2(t,x))$.

Доведення. Нехай Δp – деякий допустимий приріст керування $p^0(t,x)$. Позначимо через Δu приріст функції $u(t,x,p^0)$. Тоді Δu в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u)(t,x) = f(t,x,p^0(t,x)+\Delta p)-$$

$$-f(t,x,p^0(t,x)) \equiv \Delta f(t,x,p),$$

$$\Delta u(0,x,p) + \int\limits_0^T q(\tau,x)\Delta u(\tau,x,p(\tau,x))d\tau = 0, \qquad (16)$$

$$(B\Delta u)(t,x)\Bigg|_\Gamma = 0.$$

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $I(p)$:

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \Bigg[\sum_{i=0}^n D_{u_i}F(t,x,\overrightarrow{u},p)\Delta u_i+$$

$$+D_pF(t,x,\overrightarrow{u},p)\Delta p+O(|\Delta p|^2)+O(|\Delta u|^2)\Bigg]dx. \qquad (17)$$

Оскільки Δu – розв'язок задачі (16), то використавши формулу (13), одержимо

$$\Delta u(t,x,p^0) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta f(\tau,\xi,p^0(\tau,\xi))d\xi + \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D Z_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta f(\tau,\xi,p^0(\tau,\xi))d\xi,$$

$$\Delta u_i = \Delta u_{x_i} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D D_{x_i}G_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta f(\tau,\xi,p^0(\tau,\xi))d\xi+\int\limits_0^T d\tau \int\limits_D D_{x_i}Z_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta f(\tau,\xi,p^0(\tau,\xi))d\xi, i\in\{1,\ldots,n\}. \quad (18)$$

Підставляючи (18) у (17) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p^0)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D D_pH(t,x,\overrightarrow{u}^0)\Delta p dx+$$

$$+O(|\Delta u|^2). \quad (19)$$

Якщо $p=p^0(t,x)$ і $H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ задовольняють умови теореми 2, то при досить малих Δp маємо, що $\Delta I>0$.

Нехай $p^0(t,x)$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I>0$. Перевіримо виконання умов теореми 2. Якщо $H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ не є монотонною за аргументом p, то $D_pH(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ – знакозмінна величина, тобто $D_pH(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)>0$ в $Q^+\subset Q$ і $D_pH(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)<0$ в $Q^-=Q\setminus Q^+$. Використавши теорему про "середнє" значення, маємо:

$$\Delta I=D_pH(t^+,x^+,\overrightarrow{u}^+,\lambda^+)\int\int\limits_{Q^+}\Delta p dt dx-$$

$$-|D_pH(t^-,x^-,\overrightarrow{u}^-,\lambda^-)|\int\int\limits_{Q^-}\Delta p dt dx+$$

$$+\int\int\limits_Q(O(|\Delta p|^2)+O(|\Delta u|^2))dt dx.$$

При досить малих Δp знак ΔI визначається першими двома членами суми. Різниця перших двох доданків змінює знак в залежності від величин $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, Δp. При досить малій $\operatorname{mes} Q^+$ і $\Delta p>0$ маємо $\Delta I<0$ і навпаки $\Delta I>0$, якщо мала $\operatorname{mes} Q^-$ і $\Delta p>0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови а) – г) і функція $H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ не є монотонною за аргументом p. Для того, щоб керування p^0 і відповідний розв'язок $u^0(t,x,p^0)$ крайової задачі (2) – (4) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

1) функція $H(t,x,\overrightarrow{u},\lambda)$ за аргументом p має в точці p^0 мінімальне значення;

2) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y}=(y_0,\ldots,y_n,y_{n+1})$ і $(t,x)\in\overline{Q}$ виконується нерівність

$$K(t,x,\overrightarrow{y})\equiv\sum_{i,j=0}^{n+1}D^2_{u_iu_j}F(t,x,\overrightarrow{u}^0)y_iy_j+$$

$$+\lambda(t,x)D^2_{pp}f(t,x,p^0)y^2_{n+1}>0$$

Доведення. Достатність. Доведення даної теореми проведемо, використовуючи методику доведення теореми 1 із [6]. Нехай виконуються умови 1), 2). Запишемо приріст функціонала за формулою Тейлора

$$\Delta I(p^0)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\Big[D_pH(t,x,\overrightarrow{u}^0,\lambda)\Delta p+$$

$$+\frac{1}{2}K(t,x,\Delta u)+\frac{1}{2}K^*(t,x,\Delta u)\Big]dx,$$

де

$$K(t,x,\Delta u)=\sum_{i,j=0}^{n+1}D^2_{u_iu_j}F(t,x,\overrightarrow{u}^0)\Delta u_i\Delta u_j+$$

$$+\lambda(t,x)D^2_{pp}f(t,x,p^0(t,x))(\Delta p)^2,$$

$$K^*(t,x,\Delta u)=\sum_{i,j=0}^{n+1}D^2_{u_iu_j}(F(t,x,\tilde{\overrightarrow{u}}^0)-$$

$$-F(t,x,\overrightarrow{u}^0))\Delta u_i\Delta u_j+\lambda(t,x)\times$$

$$\times D^2_{pp}(f(t,x,\tilde{p}(t,x))-f(t,x,p^0(t,x)))(\Delta p)^2.$$

Позначимо $\delta(t,x)\equiv\inf\limits_{|\overrightarrow{y}|=1}K(t,x,\overrightarrow{y})$. За умовою 2) маємо, що $\delta(t,x)>0$ для всіх $(t,x)\in\overline{Q}$. Тоді

$$K(t,x,\Delta u)\geq\delta(t,x)|\Delta u|^2. \quad (20)$$

Використовуючи умови гельдеровості других похідних функцій $F(t,x,\overrightarrow{u})$ та $f(t,x,p)$, знаходимо

$$K^*(t,x,\Delta u)\leq C|\Delta u|^{2+\alpha}. \quad (21)$$

При досить малих Δp, таких, що

$$|\Delta u|\leq\left(\frac{1}{2c}\delta(t,x)\right)^{1/\alpha},$$

одержуємо оцінку

$$\Delta I(p^0) \geq \frac{1}{4}\int\limits_0^T dt \int\limits_D \delta(t,x)|\Delta u|^2 dx > 0.$$

Необхідність. Нехай керування p^0 – оптимальне, тобто $\Delta I(p^0) > 0$. Якщо припустити, що $D_p H(t,x,\overrightarrow{u}^0,\lambda) \neq 0$, то $\Delta I(p^0)$ змінюватиме знак в залежності від знаку Δp, що суперечить наявності мінімуму функціоналу $I(p)$ в точці p^0. Записавши приріст ΔI у вигляді

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D [D_p H(t,x,u^0,u_x^0,p^0+\theta\Delta p)\Delta p +$$

$$+O(|\Delta u|^2)]dx,$$

бачимо, що $D_p H > 0$ при $p > p^0$ та $D_p H < 0$ при $p < p^0$. Тому в точці p^0 функція H досягає мінімуму.

Якщо $K(t,x,\Delta u) \leq 0$ в області Q, то за умовою 1) одержимо, що $\Delta I \leq 0$, що неможливо.

Нехай $K(t,x,\Delta u) > 0$ в області $Q^+ \subset Q$ та $K(t,x,\Delta u) = -|K(t,x,\Delta u)| < 0$ в області $Q^- = Q \setminus Q^+$. Використовуючи теорему про "середнє" для приросту ΔI, одержуємо:

$$\Delta I(p^0) = \int\int\limits_{Q^+} K(t,x,\Delta u)dtdx -$$

$$- \int\int\limits_{Q^-} |K(t,x,\Delta u)|dtdx +$$

$$+ \int\int\limits_{Q} K^*(t,x,\Delta u)dtdx =$$

$$= K(t^+,x^+,\Delta u^+)\mathrm{mes}\,Q^+ - |K(t^-,x^-,\Delta u^-)\times$$

$$\times \mathrm{mes}\,Q^- + \int\int\limits_{Q} K^*(t,x,\Delta u)dtdx.$$

При достатньо малому Δp знак $\Delta I(p^0)$ визначається першими двома доданками. Різниця цих доданків змінює знак ΔI в залежності від величини значень $\mathrm{mes}\,Q^+$, $\mathrm{mes}\,Q^-$: при достатньо малій $\mathrm{mes}\,Q^-$ $\Delta I(p^0) > 0$. Отже, при знакозмінній формі $K(t,x,\Delta u)$ функціонал не досягає мінімуму.

Існування (u^0,p^0) встановлюємо наступним чином.

Нехай $p^0(t,x)$ – оптимальне керування. Тоді $D_p H(t,x,\overrightarrow{u}^0,\lambda) = 0$ та $D^2_{pp} H(t,x,\overrightarrow{u}^0,\lambda) > 0$. Застосовуючи теорему про неявну функцію до рівняння

$$D_p H(t,x,\overrightarrow{u}^0,\lambda) = 0,$$

одержуємо, що існує така диференційовна за u та за λ функція $W(t,x,u^0,u_x^0,\lambda)$, що

$$p^0 = W(t,x,u^0,u_x^0,\lambda).$$

Використовуючи зображення (13) та (15), ставимо у відповідність задачі (1) – (4) систему інтегральних рівнянь

$$u(t,x,p^0) = \int\limits_D G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi,W(\tau,\xi,u^0,u_\xi^0,\lambda))d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S +$$

$$+ \int\limits_D Z_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D Z_1(t,x,\tau,\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi,W(\tau,\xi,u^0,u_\xi^0,\lambda))d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\partial D} Z_2(t,x,\tau,\xi)g(\tau,\xi)d_\xi S,$$

$$u_x(t,x,p^0) = \int\limits_D D_x G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_D D_x G_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,W(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,\lambda))d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\partial D} D_x G_2(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S+$$

$$+\int_D D_x Z_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^T d\tau \int_D D_x Z_1(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,W(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,\lambda))d\xi+$$

$$+\int_0^T d\tau \int_{\partial D} D_x Z_2(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S,$$

$$\lambda(t,x)=\int_t^T d\tau \int_D \Bigg[D_u F(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,$$

$$W(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,\lambda))G_1(\tau,\xi,t,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^n D_{u_i} F(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,W(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,\lambda))\times$$

$$\times D_{\xi_i} G_1(\tau,\xi,t,x)\Bigg] d\xi+$$

$$+\int_t^T d\tau \int_D \Bigg[D_u F(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,W(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,\lambda))\times$$

$$\times Z_1(\tau,\xi,t,x)+\sum_{i=1}^n D_{u_i} F(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,$$

$$W(\tau,\xi,u^0,u^0_\xi,\lambda))D_{\xi_i} Z_1(\tau,\xi,t,x)\Bigg] d\xi. \quad (22)$$

Розв'язок системи (22) знаходимо методом послідовних наближень.

Аналогічні результати мають місце при дослідженні задачі знаходження функцій $u(t,x,p(t,x),r(t,x))$ та $(p(t,x),r(t,x))$, які реалізують мінімум функціонала

$$I(p,r)=\int_0^T dt \int_D F_1(t,x,\overrightarrow{u})dx+$$

$$+\int_0^T dt \int_{\partial D} F_2(t,x,u,r)d_x S$$

у класі функцій

$$V_1 \equiv \{(p,r):\, p\in C^\alpha(Q), r\in C^{1+\alpha}(\Gamma),$$

$$\psi_1(t,x)\le p(t,x)\le \psi_2(t,x), r_1(t,x)\le r(t,x)\le$$

$$\le r_2(t,x), \psi_1,\psi_2\in C^\alpha(Q), r_1,r_2\in C^{1+\alpha}(\Gamma)\},$$

де $u(t,x,p,r)$ є розв'язком нелокальної крайової задачі

$$(Lu)(t,x)\equiv \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}-a_0(t,x)u=f(t,x,p),$$

$$u(0,x)+\int_0^T q(\tau,x)u(\tau,x)d\tau=\varphi(x),$$

$$(Bu)(t,x)|_\Gamma \equiv$$

$$\equiv \left.\left(\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+b_0(t,x)u\right)\right|_\Gamma = g(t,x,r).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.

2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 614 с.

3. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 478 с.

4. *Пукальський І.Д.* Нелокальна задача Діріхле для лінійних параболічних рівнянь з виродженням // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, N 1. – С. 109 – 121.

5. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.

6. *Пукальский И.Д., Матийчук М.И.* О применениях функций Грина параболических краевых задач к задачам оптимального управления // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, N 6. – С. 738 – 744.