УДК 123.456

©2007 р. А.О. Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено умови існування фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь.

Existence conditions for the fundamental matrix of solutions of the initial problem for a parabolic system of integro-differential equations have been established.

При моделюванні різних біологічних, фізичних процесів часто виникають задачі з інтегро-диференціальними рівняннями. Питання класифікації та розв'язності певних типів інтегро-диференціальних рівнянь висвітлені у монографії Вольтерри [1], де міститься велика бібліографія по даній тематиці. Зокрема, звичайні інтегро-диференціальні рівняння Вольтерри досліджені у праці Ландо [2], де будується фундаментальний розв'язок рівняння, встановлюються умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші у класах неперервних та кусково-неперервних функцій.

У даній статті згідно позначень Ландо методом Леві будується фундаментальна матриця розв'язків (ФМР) Г задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь у класичних просторах Гельдера. Головною складовою даної ФМР Г є ФМР Z задачі Коші для параболічної системи диференціальних рівнянь. Питання побудови та встановлення диференціальних властивостей ФМР Z, починаючи з другої половини XX століття, добре вивчені у багатьох монографіях. Зокрема, фундаментальними є праці С. Д. Ейдельмана, А. Фрідмана, С. Д. Івасишена [3,4,6], де побудова ФМР Z здійснюється в просторах Гельдера, О. А. Ладиженської [5], де розглядаються крім того простори узагальнених функцій. Для просторів Діні результати одержані у монографії М. І. Матійчука [7].

В області $\Pi = (0,T) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k u +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x,\xi) u(\tau,\xi)\, d\xi + f(t,x), \quad (1)$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2)$$

Побудуємо ФМР задачі Коші (1)-(2), встановимо умови, за яких можна її побудувати, та знайдемо оцінки для ФМР та її похідних.

Введемо підстановку

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k u = y(t,x), \quad (3)$$

де $y(t,x)$ – невідома N-вектор-функція. Тоді задача (3)-(2) – це задача Коші для параболічної системи з неоднорідністю $y(t,x)$. Для цієї задачі Коші у припущенні, що $y \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$, розв'язок записується через ФМР Z у вигляді [3, с. 269]

$$u(t,x) = \int_{E_n} Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi) y(\tau,\xi) d\xi \quad (4)$$

і для похідних Z правильні оцінки [3, с. 73]:

$$\left| D_x^k Z(t,\tau,x,\xi) \right| \le C_k (t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$
$$|k| \le 2b. \quad (5)$$

Підставимо вираз для u (4) у вихідну систему (1):

$$y(t,x) = f(t,x)+ + \int_0^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x,\xi) \int_{E_n} Z(\tau,0,\xi,z)\varphi(z)dzd\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x,\xi) \int_0^\tau d\beta \int_{E_n} Z(\tau,\beta,\xi,z) y(\beta,z)dzd\xi. \tag{6}$$

Одержано інтегральне рівняння Вольтерри-Фредгольма 2-го роду відносно невідомої вектор-функції y. В останньому інтегралі за формулою Діріхле змінимо порядок інтегрування, щоб виділити ядро

$$\int_0^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x,\xi) \int_0^\tau d\beta \int_{E_n} Z(\tau,\beta,\xi,z) y(\beta,z)dzd\xi = = \int_0^t d\tau \int_{E_n} \left[\int_\tau^t d\beta \int_{E_n} K(t,\beta,x,z) Z(\beta,\tau,z,\xi)dz \right] y(\tau,\xi)d\xi,$$

яке позначимо через

$$H(t,\tau,x,\xi) \equiv \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} K(t,\beta,x,z) Z(\beta,\tau,z,\xi)dz.$$

Якщо у другому доданку інтегрального рівняння (6) змінити порядок інтегрування за просторовими змінними, то буде виділено це саме ядро H і тоді рівняння перепишеться у вигляді

$$y(t,x) = F(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{E_n} H(t,\tau,x,\xi) y(\tau,\xi)d\xi, \tag{6'}$$

де

$$F(t,x) \equiv f(t,x) + \int_{E_n} H(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Згідно з теорією інтегральних рівнянь з регулярним чи квазірегулярним ядром ядру $H(t,\tau,x,\xi)$ відповідає резольвента

$$R(t,\tau,x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(t,\tau,x,\xi),$$

де

$$H_\nu(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} H_1(t,\beta,x,z) H_{\nu-1}(\beta,\tau,z,\xi)dz,$$

$$\nu = 2,3,..., \quad H_1 = H.$$

Квазірегулярність ядра H буде встановлена нижче. Тоді розв'язок рівняння (6′) зобразиться у вигляді

$$y(t,x) = F(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{E_n} R(t,\tau,x,\xi) F(\tau,\xi)d\xi$$

або

$$y(t,x) = f(t,x) + \int_{E_n} H(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} R(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)d\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} R(t,\tau,x,\xi) \int_{E_n} H(\tau,0,\xi,z)\varphi(z)dzd\xi. \tag{7}$$

Отже, якщо підставити $y(t,x)$ у зображення для u (4), то розв'язок вихідної задачі Коші (1)-(2) набуде вигляду:

$$u(t,x) = \int_{E_n} Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)d\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi) \int_0^\tau d\beta \int_{E_n} R(\tau,\beta,\xi,z) f(\beta,z)dzd\xi + + \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Big\{ Z(t,\tau,x,\xi) \int_{E_n} \Big[H(\tau,0,\xi,s) + + \int_0^\tau d\beta \int_{E_n} R(\tau,\beta,\xi,z) H(\beta,0,z,s)dz \Big] \varphi(s)ds \Big\} d\xi. \tag{8}$$

Запишемо розв'язок (8) через оператор символічної згортки

$$u = (Z + Z**R)**f + Z*\varphi + Z**[(H + R**H)*\varphi]$$

і розглянемо останні два доданки

$$Z*\varphi + Z**[(H + R**H)*\varphi] =$$
$$= \{Z + Z**H + [Z**(R**H)]\}*\varphi =$$
$$= \{Z + Z**[H + R**H]\}*\varphi = \{Z + Z**R\}*\varphi,$$

оскільки $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu$ і $H + R**H = R$.

У результаті для розв'язку одержимо зображення:

$$u = \{Z + Z ** R\} * \varphi + \{Z + Z ** R\} ** f.$$

Отже, виділено ядро оберненого оператора задачі Коші (1)-(2)

$$\Gamma(t,\tau,x,\xi) \equiv Z(t,\tau,x,\xi) + \\ + \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} Z(t,\beta,x,z) R(\beta,\tau,z,\xi) dz, \quad (9)$$

за допомогою якого розв'язок запишеться у вигляді:

$$u(t,x) = \int_{E_n} \Gamma(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi.$$

З'ясуємо, якому класу належить інтегральне ядро K системи (1) для існування ФМР Γ задачі Коші (1)-(2). Для цього визначимо, за яких умов можна побудувати резольвенту R для рівняння (6). Припустимо, що

$$|D_x^m K(t,\tau,x,\xi)| \le C_m \frac{e^{-c_1 \rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n+2b+|m|-\alpha}{2b}}}, \\ |m| = 0, 1. \quad (10)$$

Оцінимо ядро H, користуючись оцінками (5) та (10):

$$|H| \le \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} |K(t,\beta,x,z)||Z(\beta,\tau,z,\xi)| dz \le \\ \le C_0 \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c_1\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \cdot \frac{e^{-c\rho(\beta,\tau,z,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz.$$

На основі леми про оцінку невласного об'ємного інтегралу [3, с.39] одержимо:

$$|H| \le C_1 \frac{e^{-c(1-\varepsilon)\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-\alpha}{2b}}}, \quad C_1 = C_0 \cdot C_\varepsilon. \quad (11)$$

Далі оцінимо повторні ядра. Для оцінки H_2 знову скористаємось лемою про оцінку невласного об'ємного інтегралу, а в інтегралі по β перейдемо до B-функції:

$$|H_2| \le C_1^2 \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c(1-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n-\alpha}{2b}}} \frac{e^{-c(1-\varepsilon)\rho(\beta,\tau,z,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-\alpha}{2b}}} dz \le \\ \le C_1^2 C_\varepsilon \cdot B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, 1+\tfrac{\alpha}{2b}\right) \frac{e^{-c(1-2\varepsilon)\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-2b-2\alpha}{2b}}}.$$

По індукції будемо мати:

$$|H_\nu| \le C_1^\nu C_\varepsilon^{\nu-1} \cdot B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, 1+\tfrac{\alpha}{2b}\right) \cdot \ldots \times \\ \times B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, (\nu-1)(1+\tfrac{\alpha}{2b})\right) \frac{e^{-c(1-\nu\varepsilon)\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-(\nu-1)2b-\nu\alpha}{2b}}}.$$

Як видно з останньої оцінки, починаючи з $\nu \ge \nu_0 = \left[\frac{n+2b}{2b+\alpha}\right] + 1$, ядра не матимуть особливості і для H_{ν_0} правильна нерівність

$$|H_{\nu_0}| \le C_{\nu_0} e^{-c_{\nu_0}\rho(t,\tau,x,\xi)}, \quad c_{\nu_0} = c(1-\nu_0\varepsilon).$$

Для всіх наступних ядер справедлива оцінка:

$$|H_{\nu_0+m}| \le C C_1^m C_{\nu_0} \cdot B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, 1\right) B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, 2+\tfrac{\alpha}{2b}\right) \times \\ \times \ldots \cdot B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, (m-1)(1+\tfrac{\alpha}{2b})+1\right) \times \\ \times (t-\tau)^{m(1+\frac{\alpha}{2b})} e^{-c_{\nu_0}\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

яка одержиться, коли в показнику експоненти відщеплювати від $c(1-\varepsilon)$ величину c_{ν_0} і користуватись нерівністю $\rho(t,\beta,x,z) + \rho(\beta,\tau,z,\xi) \ge \rho(t,\tau,x,\xi)$, у результаті чого матимемо інтеграл типу інтеграла Пуассона, а в інтегралі по часовій змінній перейти до B-функції.

Якщо розглянути залишковий ряд $\sum\limits_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} H_\nu$ і сталі, що фігурують в оцінках повторних ядер

$$A_m = B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, 1\right) \cdot \ldots \cdot B\left(1+\tfrac{\alpha}{2b}, (m-1)(1+\tfrac{\alpha}{2b})+1\right) = \\ = \frac{\Gamma^m(1+\frac{\alpha}{2b})}{\Gamma(m(1+\frac{\alpha}{2b})+1)},$$

в яких здійснено перехід від $B-$ до $\Gamma-$функцій, то мажорантний числовий ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ за ознакою Даламбера збігається, а значить функціональний ряд за критерієм

Веєрштрасса збігається рівномірно і абсолютно. Це дозволяє будувати резольвенту, для якої з нерівностей для повторних ядер можна одержати наступну оцінку:

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n-\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_0}\rho(t,\tau,x,\xi)}. \quad (12)$$

Тепер повернемось до розв'язку (4) задачі Коші (3)-(2), для знаходження якого робилось припущення щодо гельдеровості функції y за просторовою змінною. Покажемо, що функція y гельдерова з тим самим показником α, що коефіцієнти та ядро інтегрального оператора вихідної системи. Для цього встановимо спочатку оцінки для приростів ядер K, H та резольвенти. Для ядра K правильна оцінка (10), з якої випливає оцінка для приросту ядра при $|h| = |\triangle x| \ge \sqrt[2b]{t-\tau}$:

$$\left|\triangle_h^x K(t,\tau,x,\xi)\right| \le C\frac{|h|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}}\times$$

$$\times\left[e^{-c_1\rho(t,\tau,x+h,\xi)} + e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi)}\right]. \quad (13)$$

Якщо $|h| < \sqrt[2b]{t-\tau}$, то за теоремою Лагранжа

$$|\triangle_h^x K(t,\tau,x,\xi)| = |D_x K(t,\tau,x+\theta h,\xi)| \cdot |h| \le$$

$$\le C\frac{e^{-c_1\rho(t,\tau,x+\theta h,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n+2b+1-\alpha}{2b}}} \cdot |h|.$$

Розглянемо $e^{-c_1\left(\frac{|x+\theta h-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q}$. За лемою з [8 , с. 144] знайдеться така стала $c_2 > 0$, що

$$e^{-c_1\left(\frac{|x+\theta h-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q} \le e^{-c_2\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q} e^{c'\left(|\theta|\frac{|h|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q} \le$$

$$\le Const \cdot e^{-c_2\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q},$$

оскільки $\frac{|h|}{(t-\tau)^{1/2b}} < 1$. Тому

$$\left|\triangle_h^x K(t,\tau,x,\xi)\right| \le C\left(\frac{|h|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^{1-\alpha}\frac{|h|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}}\times$$

$$\times e^{-c_2\rho(t,\tau,x,\xi)} \le C\frac{|h|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}} e^{-c_2\rho(t,\tau,x,\xi)}.$$

Отже, для приросту інтегрального ядра K правильна нерівність (13), яка означає, що ядро задовольняє нерівномірну умову Гельдера з показником α.

Оцінимо приріст ядра H. Нехай $|h| \ge \frac{1}{2}\sqrt[2b]{t-\tau}$. Тоді оцінка приросту ядра H випливає з оцінки для H (11):

$$\left|\triangle_h^x H(t,\tau,x,\xi)\right| \le \left|H(t,\tau,x+h,\xi)\right| + \left|H(t,\tau,x,\xi)\right| \le$$

$$\le C\frac{|h|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)} + e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}\right]. \quad (14)$$

Встановимо оцінку для приросту ядра H при $|h| < \frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}$:

$$\triangle_h^x H(t,\tau,x,\xi) =$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} \triangle_h^x K(t,\beta,x,z) Z(\beta,\tau,z,\xi) dz =$$

$$= \int_\tau^{t_1} \ldots + \int_{t_1}^{t-|h|^{2b}} \ldots + \int_{t-|h|^{2b}}^t \ldots = I_1 + I_2 + I_3,$$

де $t_1 = \tau + \frac{t-\tau}{2}$. На основі оцінки (13) і того, що $t-\beta \ge \frac{t-\tau}{2}$, маємо

$$|I_1| \le C\frac{|h|^\alpha}{t-\tau}\int_\tau^{t_1} d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c_1\rho(t,\beta,x+h,z)} + e^{-c_1\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\times$$

$$\times\frac{e^{-c\rho(\beta,\tau,z,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz \le$$

$$\le C\frac{|h|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)} + e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}\right].$$

Оцінимо другий доданок, де скористаємось теоремою Лагранжа про приріст:

$$|I_2| \le \int_{t_1}^{t-|h|^{2b}} d\beta \int_{E_n} |h| \frac{e^{-c_1\rho(t,\beta,x+\theta h,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b+1-\alpha}{2b}}} \frac{e^{-c\rho(\beta,\tau,z,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz \le$$

$$\le C|h|\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{n/2b}} \int_{t_1}^{t-|h|^{2b}} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+1-\alpha}{2b}}} =$$

$$= C|h|^\alpha \frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{n/2b}}.$$

Аналогічно, як і при оцінюванні ядра K,

$$e^{-c_1\rho(t,\beta,x+\theta h,z)} \le Const\cdot e^{-c_2\rho(t,\beta,x,z)},$$

оскільки $|h|<t-\beta$.

Для оцінки I_3 скористаємось оцінкою (10) для інтегрального ядра K:

$$|I_3|\le\left|\int\limits_{t-|h|^{2b}}^{t} d\beta\int\limits_{E_n}K(t,\beta,x+h,z)Z(\beta,\tau,z,\xi)dz\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{t-|h|^{2b}}^{t} d\beta\int\limits_{E_n}K(t,\beta,x,z)Z(\beta,\tau,z,\xi)dz\right|\le$$

$$\le C\int\limits_{t-|h|^{2b}}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}}\times$$

$$\times\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c_1\rho(t,\beta,x+h,z)}+e^{-c_1\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}}\frac{e^{-c\rho(\beta,\tau,z,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}}dz\le$$

$$\le C\frac{|h|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)}+e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}\right].$$

На основі оцінок для I_1, I_2, I_3 та (14) остаточно одержимо:

$$\left|\triangle_h^x H(t,\tau,x,\xi)\right|\le$$

$$\le C\frac{|h|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)}+e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}\right].\quad(15)$$

Для приросту резольвенти матимемо аналогічну оцінку

$$\left|\triangle_h^x R(t,\tau,x,\xi)\right|\le$$

$$\le C\frac{|h|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)}+e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}\right].\quad(16)$$

Тепер покажемо, що функція y, яка зображається у вигляді (7), є гельдеровою за просторовою змінною x. f є гельдеровою за припущенням, тобто

$$|\triangle_x f(t,x)|\le C|\triangle x|^{\alpha}.\quad(17)$$

Використовуючи нерівності (15) та (16), оцінимо прирости наступних доданків:

$$\left|\triangle_h^x\int\limits_{E_n}H(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|\le\int\limits_{E_n}|\triangle_h^x H||\varphi|d\xi\le$$

$$\le C|h|^{\alpha}\cdot|\varphi|_{2b+\alpha}\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c\rho(t,x+h,\xi)}+e^{-c\rho(t,x,\xi)}}{t^{n/2b}}d\xi\le$$

$$\le C|\varphi|_{2b+\alpha}\cdot|h|^{\alpha};\quad(18)$$

$$\left|\triangle_h^x\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n}R(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi\right|\le$$

$$\le C|f|_{\alpha}|h|^{\alpha}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)}+e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{n/2b}}d\xi\le$$

$$\le C|f|_{\alpha}\cdot t\cdot|h|^{\alpha};\quad(19)$$

$$\left|\triangle_h^x\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n}R(t,\tau,x,\xi)\int\limits_{E_n}H(\tau,0,\xi,z)\varphi(z)dzd\xi\right|\le$$

$$\le C|\varphi|_{2b+\alpha}|h|^{\alpha}\int\limits_0^t\tau^{\frac{\alpha}{2b}}\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c\rho(t,\tau,x+h,\xi)}+e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}\times$$

$$\times\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c(1-\varepsilon)\rho(\tau,0,\xi,z)}}{\tau^{\frac{n}{2b}}}dzd\xi d\tau\le$$

$$\le C|\varphi|_{2b+\alpha}\cdot t^{\frac{2b+\alpha}{2b}}\cdot|h|^{\alpha}.\quad(20)$$

З нерівностей (17)-(20) випливає, що y задовольняє умову Гельдера з показником α, тобто правильна оцінка

$$|\triangle_x y(t,x)|\le|\triangle x|^{\alpha}\big(C_1+C_2|\varphi|_{2b+\alpha}+C_3|f|_{\alpha}\big).$$

Тепер встановимо оцінки для ФМР (9) та її похідних. Для Z маємо оцінку (5). Оцінимо похідні об'ємного потенціалу в (9), перепозначивши його через W. За лемою про диференціювання об'ємного потенціалу [3, с.68] молодші похідні знаходяться безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла, а старші похідні за рахунок гельдеровості резольвенти R вираховуються за спеціальними формулами:

$$D_x^{2b}W(t,\tau,x,\xi)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{E_n}D_x^{2b}Z(t,\beta,x,z)R(\beta,\tau,z,\xi)dz+$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} D_x^{2b} Z(t,\beta,x,z)[R(\beta,\tau,z,\xi)-$$

$$-R(\beta,\tau,x,\xi)]dz + \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} [D_x^{2b} Z(t,\beta,x-z,z)-$$

$$-D_x^{2b} Z(t,\beta,x-z,y)]\Big|_{y=x} R(\beta,\tau,x,\xi)dz+$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} D_x^{2b} Z(t,\beta,x-z,y)\Big|_{y=x} R(\beta,\tau,x,\xi)dz =$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Оцінка A_1 одержується одразу з оцінок (5) та (12):

$$|A_1| \le C \frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-\alpha}{2b}}}.$$

A_2 оцінюється за рахунок нерівномірної умови Гельдера (16) резольвенти R по третьому аргументу:

$$|A_2| \le C \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b}{2b}}} \frac{|x-z|^\alpha}{(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}} \times$$

$$\times \Big[e^{-c\rho(\beta,\tau,z,\xi)} + e^{-c\rho(\beta,\tau,x,\xi)} \Big] dz \le$$

$$\le \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int_{E_n} \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} \times$$

$$\times \frac{e^{-c\rho(\beta,\tau,z,\xi)} + e^{-c\rho(\beta,\tau,x,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz,$$

де ми скористались очевидною нерівністю

$$\left(\frac{|x-z|}{(t-\tau)^{1/2b}} \right)^\alpha e^{-\varepsilon\rho(t,\tau,x,z)} \le C(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Далі, застосовуючи лему про оцінку об'ємного інтегралу і користуючись тим, що $\beta - \tau \ge \frac{t-\tau}{2}$, остаточно одержимо

$$|A_2| \le C \frac{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-\alpha}{2b}}}.$$

В A_3 спрацьовує гельдеровість фундаментальної матриці розв'язків Z по четвертому аргументу:

$$|A_3| \le C \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{E_n} |x-z|^\alpha \frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b}{2b}}} \frac{e^{-c_{\nu_0}\rho(\beta,\tau,x,\xi)}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-\alpha}{2b}}} dz \le$$

$$\le C \frac{e^{-c_{\nu_0}\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n-2\alpha}{2b}}}.$$

На основі властивостей ФМР Z $A_4 = 0$.

Отже,

$$|D_x^k W(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha-2b}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)}, \quad |k| \le 2b. \tag{21}$$

Правильна

Теорема. *Нехай система (1) рівномірно параболічна, коефіцієнти системи $A_k(t,x)$ визначені в шарі Π, неперервні по t, причому рівномірно щодо x при $|k| = 2b$, $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$. Ядро інтегрального оператора системи $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$, має сумовну особливість, тобто*

$$|D_x^m K_{ij}(t,\tau,x,\xi)| \le C_m \frac{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n+2b+|m|-\alpha}{2b}}},$$

$$|m| = 0, 1;$$

$$|\triangle_x K| \le C \frac{|\triangle x|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}} \Big[e^{-c_1\rho(t,\tau,x+\triangle x,\xi)} + e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi)} \Big].$$

Тоді існує ФМР $\Gamma(t,\tau,x,\xi)$ системи (1), яка при $t > \tau$ задовольняє однорідну систему, а розв'язок задачі Коші для неоднорідної системи за умов $\varphi \in C^{(2b+\alpha)}(E_n)$, $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$ визначається сумою потенціалів

$$u(t,x) = \int_{E_n} \Gamma(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi,$$

де

$$\Gamma(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} Z(t,\beta,x,z) R(\beta,\tau,z,\xi)\, dz \equiv Z + W.$$

Тут R – резольвента відповідної системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду, повторні ядра якої виражаються через згортку інтегрального оператора K системи (1) та ФМР Z відповідної параболічної системи (3).

Для похідних об'ємного потенціалу W правильні оцінки (21).

Зауваження. Якщо розглянути інший підхід до побудови ФМР задачі Коші для вихідної системи інтегро-диференціальних рівнянь (1)-(2), а саме: взяти за неоднорідність системи

$$\int_0^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x,\xi)u(\tau,\xi)d\xi + f(t,x),$$

то прийдемо до іншого зображення ФМР Γ:

$$\Gamma^*(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi)+$$
$$+\int_\tau^t d\beta \int_{E_n} R^*(t,\beta,x,z)Z(\beta,\tau,z,\xi)dz = Z+W^*,$$

де

$$R^*(t,\tau,x,\xi) = \sum_\nu H^*_\nu(t,\tau,x,\xi),$$

$$H^*_\nu(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} H^*_1 H^*_{\nu-1} dz, \quad \nu=2,3,...,$$

– резольвента системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду

$$u(t,x) = F(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{E_n} H^*(t,\tau,x,\xi)u(\tau,\xi)d\xi$$

з ядром

$$H^*(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} Z(t,\beta,x,z)K(\beta,\tau,z,\xi)dz.$$

Покажемо, що $W^* = W$, а значить $\Gamma^* = \Gamma$. Для цього розпишемо W^* через оператор символічної згортки:

$$W^* = R^* ** Z = (H^*_1 + \sum_{\nu=2}^\infty H^*_{\nu-1} ** H^*_1) ** Z =$$
$$= H^*_1 ** Z + \sum_{\nu=2}^\infty (H^*_{\nu-1} ** H^*_1) ** Z.$$

В силу асоціативності оператора згортки

$$H^* ** Z = (Z ** K) ** Z = Z ** (K ** Z) = Z ** H,$$

тому

$$W^* = Z ** H_1 + \sum_{\nu=2}^\infty (H^*_{\nu-1} ** Z) ** H_1.$$

Розглянемо

$$H^*_{\nu-1} ** Z =$$
$$= \underbrace{(\cdots((H^*_1 ** H^*_1) ** H^*_1) ** \cdots ** H^*_1)}_{\nu-1} ** Z =$$
$$= Z ** \underbrace{(H_1 ** (H_1 ** \cdots ** (H_1 ** H_1) \cdots))}_{\nu-1} =$$
$$= Z ** H_{\nu-1}.$$

Отже,

$$W^* = Z ** H_1 + \sum_{\nu=2}^\infty (Z ** H_{\nu-1}) ** H_1 =$$
$$= Z ** (H_1 + \sum_{\nu=2}^\infty H_{\nu-1} ** H_1) = Z ** R = W.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (1)-(2) за умов теореми зображається у вигляді

$$u(t,x) = \int_{E_n} \Gamma^*(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma^*(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1982.—304 с.
2. *Ландо Ю.К.* Элементы математической теории управления движением.—М.: Просвещение, 1984.—88 с.
3. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.—М.: Наука, 1964.— 444 с.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.—М.: Мир, 1968.– 427 с.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.—М.: Наука, 1967.— 736 с.
6. *Ивасишен С.Д.* Матрица Грина параболических задач.—К.: Вища школа, 1990.— 199 с.
7. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі.—К.: Ін-т математики НАН України, 1999.— 176 с.
8. *Гельфанд И.М. и Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (Обобщенные функции, вып. 3).—М.: Физматгиз, 1958.—274 с.