УДК 517.929

©2007 р. **Я.Й.Бігун**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ СТРУНИ І БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Вивчається початкова задача для гіперболічного рівняння і багаточастотної системи диференціальних рівнянь із запізненням. Обгрунтовано метод усереднення за швидкими змінними на скінченному проміжку часу в тому випадку,коли система в процесі еволюції проходить через резонами. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

The object of this paper is to study a system of hyperbolic differential equation and a multi-frequence differential equation systems with delay. An averaging method over fast variables is justified for system which pass through the resonance in the evolution process. For the error of the method, an estimate explicitly dependent of a small parameter is obtained.

Вступ. Коливання систем із зосередженими і розподіленими параметрами, які взаємодіють між собою, досліджувалось в багатьох роботах. Зокрема, в задачі про керування коливним процесом, коли один із об'єктів описується хвильовим рівнянням, а інші – диференціальними рівняннями із звичайними похідними [1], струнного генератора з підсилювачем [2], про керування динамічною системою під дією високочастотних збурень [3] та ін.

У даній роботі розглянемо задачу обгрунтування методу усереднення для збуреного рівняння коливання нескінченної струни. Збурення є результатом дії багаточастотної системи із запізненням. Дослідженню багаточастотних систем присвячена монографія [4] та ін. Застосування асимптотичних методів для гіперболічних рівнянь вивчалась, наприклад, в [5, 6], а питання існування розв'язку для гіперболічних функціонально-диференціальних рівнянь – в [7].

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 f(x, \tau, a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \qquad (1)$$

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, a, a_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \qquad (2)$$

де ε – малий параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau = \varepsilon t$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, L]$, $c > 0$, $\Delta > 0$, $a_\Delta(\tau) = a(\tau - \varepsilon\Delta)$, $\varphi_\Delta(\tau) = \varphi(\tau - \varepsilon\Delta)$. Функції A, B і f 2π-періодичні за компонентами φ, φ_Δ.

Перше з рівнянь описує коливання нескінченної струни під дією збурення, що залежить від амплітудних змінних $a \in D$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, і фазових змінних $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, а також від цих змінних із сталим запізненням. Система (2) називається m-частотною і характерним для неї є явище резонансу частот. Умовою резонансу в точці τ є виконання рівності [8]

$$\gamma_{kl}(\tau, \varepsilon) \approx 0, \qquad (3)$$

де $\gamma_{kl}(\tau, \varepsilon) = (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\tau - \varepsilon\Delta))$, k, $l \in \mathbb{Z}^m$, $\|k\| + \|l\| \neq 0$.

Для системи без запізнення ($\Delta = 0$) умовою резонансу в точці τ служить виконання рівності

$$(p, \omega(\tau)) = 0, \quad p = k + l \neq 0.$$

Якщо $\Delta > 0$ і $k + l = 0$, то система (2) може знаходитися в околі резонансу $(k, \omega(\tau) - \omega(\tau - \varepsilon\Delta)) \approx 0$ як завгодно довго, тому в усередненій системі зберігаються відповідні складові.

Задамо для (1), (2) початкові умови:

$$u(x,0,\varepsilon)=v(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=w(x), x\in\mathbb{R}; \qquad (4)$$

$$a(\tau,\varepsilon)=a^0(\tau),\varphi(\tau,\varepsilon)=\varphi^0(\tau), \quad \tau\in[-\varepsilon\Delta,0],$$

де

$$v\in C^2(\mathbb{R}), w\in C^1(\mathbb{R}), (a^0,\varphi^0)\in C[-\varepsilon\Delta,0].$$

Як показано в [8], умовою незастрягання системи (2) в околі резонансу (3), коли $k+l\neq 0$, є виконання умови

$$V(\tau)\neq 0, \quad \tau\in[0,L], \qquad (5)$$

де $V(\tau)$ – вронскіан системи функцій $\{\omega_1(\tau),\ldots,\omega_m(\tau)\}$.

Відповідна (1), (2) усереднена за швидкими змінними система, в якій враховано резонанси (3) для $k+l=0$, набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon^2\overline{f}(x,\tau,\overline{a},\overline{a}_\Delta,), \qquad (6)$$

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau}=\overline{A}(\tau,\overline{a},\overline{a}_\Delta),$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\overline{B}(\tau,\overline{a},\overline{a}_\Delta), \qquad (7)$$

де

$$\overline{F}(\chi,\tau,a,b)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}F(x,\tau,a,b,\varphi,$$

$$\varphi-\psi)d\varphi_1\ldots d\varphi_m=\sum_{k+l=0}F_{kl}(x,\tau,a,b)e^{-i(k,\psi)},$$

$$\psi=\omega(\tau)\Delta, \quad F:=(f,A,B).$$

Усереднена система простіша, ніж (1), (2), оскільки рівняння для $\overline{a}$ не залежить від швидких змінних, а знаходження $\overline{u}$ і $\overline{\varphi}$ зводиться до задачі інтегрування.

Задача полягає в доведенні існування розв'язку 1), (2) із початковими умовами (4) та знаходженні оцінки відхилення розв'язків систем вихідної та усередненої систем для $\tau\in[0,L]$ і $x\in\mathbb{R}$, якщо їх початкові умови збігаються.

3. Обґрунтування методу усереднення.

Теорема. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) функції $\omega_\nu\in C^m[0,L]$, $\nu=1,\ldots,m$, і справджується умова (5);

2) вектор-функція $F(x,\tau,a,b,\varphi,\theta)$ неперервно диференційовна $l_1\geq 2$ раз за x,τ,a,b і $l_2\geq 2m+1$ раз за змінними (φ,θ) в області $\mathbb{R}\times[0,L]\times D\times D\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ і обмежена разом із похідними сталою σ_1;

3) на проміжку $[0,L]$ існує розв'язок системи (7), причому $\overline{a}(\tau,\varepsilon)$ лежить в області D разом із своїм ρ-околом для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$;

4) в області $G_1=\mathbb{R}^1\times[0,L]\times D\times D$

$$\sum_{k+l=0}\sup_{G_1}\|F_{kl}\|+\sum_{k+l\neq 0}\Big[\sup_{G_1}\|F_{kl}\|+\frac{1}{\|k+l\|}\times$$

$$\times\Big(\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial\tau}\Big\|+\sigma_1\Big(\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial a}\Big\|+$$

$$+\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial b}\Big\|\Big)\Big)\Big]\leq\sigma_2.$$

.

Тоді для досить малого $\varepsilon_0>0$, всіх $(x,\tau,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок системи (1), (2) з початковими умовами (4) і справджується оцінка

$$\|a(\tau,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\varepsilon)\|+\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)\|+$$

$$+\|u(x,\tau/\varepsilon,\varepsilon)-\overline{u}(x,\tau/\varepsilon,\varepsilon)\|\leq c_3\varepsilon^{1/m}. \qquad (8)$$

Доведення. За формулою Даламбера [9] для розв'язків рівнянь (1) і (6) маємо

$$u(x,t,\varepsilon)-\overline{u}(x,t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{2c}\int\limits_0^t ds\int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}[f(z,\varepsilon s,$$

$$a(s,\varepsilon),a(s-\Delta,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),\varphi(s-\Delta,\varepsilon))-\overline{f}(z,\varepsilon s,$$

$$\overline{a}(s,\varepsilon),\overline{a}(s-\Delta,\varepsilon))]dz.$$

Перейшовши до змінної τ одержимо

$$|u(x,\tau/\varepsilon,\varepsilon)-\overline{u}(x,\tau/\varepsilon,\varepsilon)|\leq 2\sigma_1\int\limits_0^\tau(\tau-s)\|a(s,\varepsilon)-$$

$$-\overline{a}(s,\varepsilon)\|ds+\frac{\varepsilon}{2c}\sum_{k+l\neq 0}\left|\int_0^\tau ds\int_{x-\frac{c}{\varepsilon}(\tau-s)}^{x+\frac{c}{\varepsilon}(\tau-s)} f_{kl}(z,\tau,a,a_\Delta)\times\right.$$

$$\left.\times\exp[i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\Delta)]dz\right|.$$

Введемо позначення:

$$g_{kl}(x,\tau,s,\varepsilon)=\int_{x-\frac{c}{\varepsilon}(\tau-s)}^{x+\frac{c}{\varepsilon}(\tau-s)} f_{kl}(z,\tau,a,a_\Delta)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \gamma_{kl}(s_1,\varepsilon)ds_1+i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\Delta)\right]dz.$$

Скористаємося оцінкою [8]

$$\|a(\tau,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\varepsilon)\|\leq c_1\varepsilon^{1/m}, \qquad (10)$$

правильною для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ в разі виконання умов 1) – 3) теореми для функцій ω, A і B, та оцінкою осциляційного інтеграла

$$\left|\int_0^\tau g_{kl}(x,\tau,s,\varepsilon)\exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(s_1,\varepsilon)ds_1\right]ds\right|\leq$$

$$\leq c_2\varepsilon^{1/m}\Big(\sup_{G_2}|g_{kl}|+\frac{1}{\|k+l\|}\sup_{G_2}\left|\frac{\partial g_{kl}}{\partial s}\right|\Big),$$

$G_2=\mathbb{R}\times[0,L]\times[0,L]\times(0,\varepsilon]$. Із умов 1 і 4 для $(x,\tau,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times[0,.L]\times(0,\varepsilon_0]$ одержимо

$$|g_{kl}(x,\tau,s,\varepsilon)|\leq\frac{2cL}{\varepsilon}\sup_{G_1}|f_{kl}|,$$

$$\left|\frac{\partial g_{kl}(x,\tau,s,\varepsilon)}{\partial\tau}\right|\leq\frac{2c(1+\sigma_1 L)}{\varepsilon}(\|k\|+\|l\|)\sup_{G_1}|f_{kl}|+$$

$$+\frac{2cL}{\varepsilon}\sup_{G_1}\left|\frac{df_{kl}}{d\tau}\right|. \qquad (11)$$

На підставі (10), (11) із (9) маємо

$$|u(x,\tau/\varepsilon,\varepsilon)-\overline{u}(x,\tau/\varepsilon,\varepsilon)|\leq\sigma_1c_1L^2\varepsilon^{1/m}+$$

$$+2c_2c\sum_{k+l\neq 1}\Big[(L+(1+\sigma_1 L)\times$$

$$\times(\|k\|+\|l\|))\sup_{G_1}|f_{kl}|+L\sup_{G_1}\left|\frac{df_{kl}}{d\tau}\right|\Big]\leq$$

$$\leq\varepsilon^{1/m}(\sigma_1c_1L^2+c_2\sigma_2(L(1+\sigma_1)+1))\sigma_2)\equiv c_3\varepsilon^{1/m}.$$

Якщо $2c_3\varepsilon_0^{1/m}\leq\rho$, то оцінка (8) виконується для всіх $(x,\tau,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$.

Теорему доведено.

4. Приклад. Розглянемо модельний приклад системи із $m=4$ частотами вигляду

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\varepsilon^2(d_1\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4-\varphi_{1\Delta})+$$

$$+d_2\cos(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_{1\Delta}-\varphi_{2\Delta})), \qquad (12)$$

$$\frac{da}{d\tau}=b_1\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4-\varphi_{1\Delta})+$$

$$+b_2\cos(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_{1\Delta}-\varphi_{2\Delta}), \qquad (13)$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau}=\frac{1}{\varepsilon},\quad\frac{d\varphi_2}{d\tau}=\frac{1+\tau}{\varepsilon},$$

$$\frac{d\varphi_3}{d\tau}=\frac{1+\tau+\tau^2}{\varepsilon},\quad\frac{d\varphi_4}{d\tau}=\frac{1+\tau^2+4\tau^3}{\varepsilon}.$$

Тут $c>0$, b_ν, d_ν – деякі сталі, $0<\Delta<\pi/4$, $\varphi_1(\tau,\varepsilon)=\tau/\varepsilon$, $\varphi_2(\tau,\varepsilon)=(\tau+0.5\tau^2)/\varepsilon$ при $\tau\leq 0$, $\varphi_3(0)=\varphi_4(0)=0$.

В системі є резонанс в момент часу $\tau=0$, оскільки $\gamma^{(1)}=2\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4-\omega_{1\Delta}=-4\tau^3$. Крім того, при $\tau\geq\varepsilon\Delta$ виконується резонансне співвідношення $\gamma^{(2)}=\omega_1-\omega_{1\Delta}+\omega_2-\omega_{2\Delta}=\varepsilon\Delta$. Відповідні фази набувають вигляду: $\psi^{(1)}=\Delta-\tau^4/\epsilon$ і $\psi^{(2)}=(\tau+2-\varepsilon\Delta/2)\Delta$, $\tau\geq 0$. Умова (6) виконується, оскільки $V(\tau)=24$.

Усереднимо перші два рівняння:

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\varepsilon^2d_2\cos(\varepsilon t+2)\Delta,$$

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau}=b_2\cos(\tau+2)\Delta.$$

Маємо

$$a(\tau,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,\varepsilon)=b_1\Big(cos\Delta\int_0^\tau\cos\frac{\tau^4}{\varepsilon}d\tau+$$

$$+\sin\Delta\int_0^\tau\sin\frac{\tau^4}{\varepsilon}d\tau\Big)+b_2\int_0^\tau(\cos(\tau+2-\frac{\varepsilon\Delta}{2})\Delta-$$

$$-\cos(\tau+2)\Delta)d\tau.$$

Нехай $L=1$, $\alpha=\Gamma(\frac{1}{4})\cos\frac{\pi}{8}$, $\Gamma(z)$ – гама-функція. На підставі асимптотичного розкладу узагальненого інтеграла Френеля [10]

$$\int\limits_0^1 \cos\frac{\tau^4}{\varepsilon}d\tau=\sqrt[4]{\varepsilon}\int\limits_0^{1/\sqrt[4]{\varepsilon}}\cos\tau^4 d\tau=$$

$$=\sqrt[4]{\varepsilon}(\alpha+O(\sqrt[4]{\varepsilon}))$$

та аналогічного розкладу для інтеграла від $\sin\tau^4$ одержимо

$$a(1,\varepsilon)-\overline{a}(1,\varepsilon)=2\sqrt[4]{\varepsilon}\alpha b_1\cos(\frac{\pi}{4}-\Delta)+$$

$$+\frac{4b_2}{\Delta}\sin\frac{\varepsilon\Delta^2}{4}\sin\frac{\Delta}{2}\sin\frac{\Delta}{2}(5-\frac{\varepsilon\Delta}{2})=$$
$$=O(\sqrt[4]{\varepsilon})+O(\varepsilon)=O(\sqrt[4]{\varepsilon})$$

при $\varepsilon\to 0$.

Зауважимо, що усереднивши в (12) і (14) за всіма компонентами векторів φ і φ_Δ без врахування резонансу $\gamma^{(2)}$, одержимо

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tau}=0.$$

Тоді для $\tau\in[0,1]$

$$a(\tau,\varepsilon)-\tilde{a}=b_1\int\limits_0^\tau\cos(\frac{\tau^4}{\varepsilon}-\Delta)d\tau+b_2\times$$

$$\times\int\limits_0^\tau\cos(\tau+2-\frac{\varepsilon\Delta}{2})\Delta d\tau=$$

$$=2\sqrt[4]{\varepsilon}b_1\alpha\cos(\frac{\pi}{4}-\Delta)+\frac{2}{\Delta}\cos\frac{\Delta}{2}\cos(5-\varepsilon\Delta)\frac{\Delta}{2}=$$
$$=O(1).$$

Отже, в цьому випадку розв'язки точної та усередненої задач не будуть близькими для $\tau\in[0,1]$, тобто для $t\in[0,1/\varepsilon]$.

Для розв'язків гіперболічного рівняння маємо

$$u(x,t,\varepsilon)-\overline{u}(x,t,\varepsilon)=\varepsilon^2\int\limits_0^t ds\int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}(d_1\cos(\Delta-$$

$$-\varepsilon^3s^4)+2d_2\sin\frac{\varepsilon\Delta^2}{4}\sin(\varepsilon s+2-\frac{\varepsilon\Delta}{4})\Delta)dz=$$

$$=2\alpha cd_1\sqrt[4]{\varepsilon}-\frac{1}{2}d_1c\sqrt{\varepsilon}+c_4\sin\frac{\varepsilon\Delta^2}{4}+o(\sqrt[4]{\varepsilon}),$$

де $c_4=\frac{2\sqrt{2}}{\Delta}\sin\frac{\Delta}{2}\cos(5\Delta-\varepsilon\Delta^2-\frac{\pi}{2})/2+\cos(5-\varepsilon\Delta)\Delta/2$, тобто маємо оцінку вигляду (8).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управление колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журнал выч. матем. и матем. физики. — 2005. — 45, № 10. – С. 1766 — 1784.

2. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием.— Минск: Изд-во "Университетское", 1985.— 143 с.

3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотический анализ динамических систем, подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ. — 1994. — 58, вып. 3. – С. 23 — 31.

4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

5. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк Н.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Київ: Наукова думка, 1991. – 232 с.

6. *Митропольский Ю.А., Лимаренко О.С.* К вопросу асимптотических приближениях для медленных волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах // Укр. мат. журн. — 1998. — 50, № 3. – С. 357 — 371.

7. *P. Brandia P., Salvadoria A., Kamontb Z.*Existence of generalized solutions of hyperbolic functional differential equations // Nonlinear Analysis. — 2002. — 50. – P. 919 — 940 p.

8. *Бігун Я.Й.* Про усереднення в багаточастотних крайових задачах із постійним запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 15 – 20.

9. *Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 333 с.*

10. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М,: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.*