УДК 512.815

©2007р. Л. Бедратюк

Хмельницький національний університет

ТЕОРЕМА РОБЕРТСА ДЛЯ ТЕРНАРНИХ ФОРМ

Для тернарних форм доводяться аналоги добре відомої в теорії інваріантів теореми Робертса. Встановлено, що незвідні коваріанти, контраваріанти та змішані конкомітанти тернарної форми однозначно визначаються їхніми старшими членами.

Analogues of the invariant theory's well-known Roberts theorem are proved for ternary forms. We established that invariants, contravariants and mixed concomitants of a ternary form are uniquely determined by their lead coefficients.

Вступ

Розглянемо $\mathbb{K}$-векторний простір T_n тернарних форм степеня n :

$$u(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-(i+j))!} a_{i,j} x_1^{n-(i+j)} x_2^i x_3^j,$$

де $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, а $\mathbb{K}$ – поле нульової характеристики. Координатне кільце R_n простору T_n ототожнимо з алгеброю многочленів $k[A] := \mathbb{K}[a_{0,0}, a_{1,0}, \dots, a_{0,n}]$ від $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ змінних, а координатне кільце простору $R_n \oplus \mathbb{K}^3 \oplus (\mathbb{K}^3)^*$ ототожнимо з кільцем многочленів $\mathbb{K}[A, X, U] := \mathbb{K}[A, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3]$. Стандартна дія групи SL_3 підстановками на T_n індукує дію SL_3 і на кільці $\mathbb{K}[A, X, U]$.

Поліноміальні функції з R_n, та $\mathbb{K}[A, X, U]$, які залишаються інваріантними відносно дії групи SL_3 утворюють кільця $R_n^{SL_3}$, та $\mathbb{K}[A, X, U]^{SL_3}$, які називаються, відповідно, кільцями інваріантів та змішаних конкомітантів тернарної форми степеня n. Кільце $\mathbb{K}[A, X]^{SL_3}$ та кільце $\mathbb{K}[A, U]^{SL_3}$ називаються кільцями коваріантів та контраваріантів тернарної форми степеня n (див. [1]). Зокрема, форма $u(x_1, x_2, x_3)$ буде коваріантом степеня n. Для довільного многочлена який є однорідним по кожному наборі змінних A, X та U, його степені відносно цих наборів називаються відповідно степенем, порядком та класом.

Знаходження явного вигляду комітантів – породжуючих елементів вищеозначених кілець інваріантів, є основною задачею класичної теорії інваріантів, яка була розв'язана ще Горданом [2], але лише для $n \leq 3$. Найвищим досягненням того періоду було обчислення в докторській дисертації Е. Нетер [3] мінімальної системи із 331 породжуючих кільця інваріантів $\mathbb{K}[A]^{SL_3}$ для $n \leq 4$.

Майже всі відомі конкомітанти отримані в неявному вигляді символічним методом, коли конкомітанти зображуються через трансвектанти, тобто як результат дії деякого SL_3-інваріантного диференціального оператора на конкомітанти менших степенів.

Одним із підходів до вивчення комітантів могло би бути встановлення аналогу теореми Робертса для тернарних форм. В класичному формулюванні теорема Робертса стверджує [4], [5], що всякий коваріант бінарної форми степеня n відносно дії групи SL_2 однозначно визначається своїм старшим членом – коефіцієнтом біля x_1^n. В свою чергу, старший член всякого коваріанта бінарної форми є інваріантом одновимірної підалгебри верхніх трикутних матриць, іншими словами, він є старшим вектором деякого незвідного sl_2-модуля. Тому проблема опису кільця коваріантів бінарних форм зводиться до питання опису кільця інваріантів підалгебри верхніх трикутних матриць в алгебрі Лі sl_2.

В даній роботі для комітантів тернарних форм степеня n доведені твердження, які є аналогами теореми Робертса. Показано, що коефіцієнти незвідного комітанта породжують незвідний sl_3-модуль в $k[A]$ і старший коефіцієнт комітанта буде старшим вектором цього модуля. Справедливе і обернене твердження – всякий інваріант алгебри верхніх трикутних матриць UT_3 є старшим вектором деякого sl_3-модуля. Таким чином, встановлені твердження зводять задачу знаходження породжуючих елементів кільця $\mathbb{K}[A, X, U]^{SL_3}$ до простішої задачі знаходження породжуючих елементів кільця $\mathbb{K}[A]^{UT_3}$.

Елементи Казиміра

Дамо означення елемента Казиміра, який буде головним обчислювальним засобом при вивченні комітантів тернарної форми.

Означення 1. *Симетричним добутком $U \cdot V$ векторних просторів V та U назвемо підалгебру симетричної алгебри $S(U \oplus V)$, породжену елементами вигляду $u\, v$, де $v \in V$, $u \in U$*

Якщо простори U, V є sl_3-модулями то їхній симетричний добуток $U \cdot V$ також буде sl_3-модулем, якщо покласти

$$g(uv) = g(u)\,v + ug(v),$$

для всіх $g \in sl_3$, $v \in V$, $u \in U$.

Означення 2. *Всякий інваріант sl_3-модуля $U \cdot V$ називається елементом Казиміра.*

Теорема 1. *Припустимо, що U, V – два sl_3-модулі. В sl_3-модулі $U \cdot V$ елемент Казиміра існує тоді і лише тоді, коли $U \cong V^*$.*

Доведення. Припустимо,що $U \cong V^*$, $m = \dim U$. Виберемо в просторах V і V^* дуальні базиси $\{v_i\}$, $\{v_i^*\}$, $i = 1 \dots m$. Довільний елемент $z \in sl_3$ діє як лінійний оператор в V і V^*. Добре відомо, що матриці $C = \{c_{i\,j}\}$, $C^* = \{c^*_{i\,j}\}$ цього оператора в дуальних базисах зв'язані співвідношенням $C^* = (-C)^{\mathrm{T}}$. Покажемо, що елемент

$$v_1 v_1^* + v_2 v_2^* + \cdots + v_m v_m^* \in V \cdot V^*,$$

є інваріантом. Маємо

$$\begin{aligned}
z\Big(\sum_{i=1}^m v_i v_i^*\Big) &= \sum_{i=1}^m (z(v_i) v_i^* + v_i\, z(v_i^*)) = \\
&= \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m c_{ij} v_j v_i^* + v_i z(v_i^*)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m c_{ji} v_i v_j^* + v_i\, z(v_i^*)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^m v_i \Big(\sum_{j=1}^m c_{ij} v_j^* + z(v_i^*)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Припустимо тепер, що елемент

$$v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_m u_m \in V \cdot U$$

є інваріантом. Аналогічно знаходимо

$$z\Big(\sum_{i=1}^m v_i u_i\Big) = \sum_{i=1}^m v_i \Big(\sum_{j=1}^m c_{ji} u_j + z(u_i)\Big).$$

Рівність нулю можлива лише тоді, коли для всіх i буде виконуватися $\sum_{j=1}^m c_{ji} u_j + z(u_i) = 0$, тобто дія z на U є контрагредієнтною до дії на V, а це означає, що $U \cong V^*$. □

Елемент Казиміра sl_3-модуля $U \cdot V$ будемо позначати $\Delta(U, V)$. Якщо в просторах U, V задано контрагредієнтні базиси

$$U := \langle u_1, u_2, \dots u_m \rangle,\ V := \langle v_1, v_2, \dots v_m \rangle,$$

то

$$\Delta(U, V) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_m v_m.$$

Можна показати, що елемент Казиміра не залежить від вибору пар дуальних базисів в просторах U і V^*.

Реалізація sl_3-модулів в $k[A]$.

Незвідний sl_3-модуль з старшою вагою $[m_1, m_2]$ будемо позначати $\Gamma_{m_1,\,m_2}$, або, бажаючи явно вказати старший вектор v – $\Gamma_{m_1,\,m_2}(v)$. Розмірність простору $\Gamma_{m_1,\,m_2}$ дорівнює [6]

$$\frac{1}{2}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2).$$

Старший вектор sl_3-модуля $\Gamma_{m_1,\,m_2}$ є інваріантом підалгебри UT_3 верхніх трикутних матриць. Аналогічно молодший вектор цього модуля є інваріантом підалгебри DT_3 нижніх трикутних матриць. Якщо вектор v є старшим вектором старшої ваги $[m_1, m_2]$, то справедливе співвідношення [7]

$$\Gamma_{m_1,m_2}(v) = \mathfrak{U}(DT_3)(v),$$

де через $\mathfrak{U}(L)$ позначено універсальну огортуючу алгебру алгебри Лі L. Аналогічно для молодшого вектора v ваги $[-m_1, -m_2]$ отримаємо

$$\Gamma_{m_1,m_2}(v) = \mathfrak{U}(UT_3)(v).$$

Позначимо через $E_{i\,j}$, $i, j = 1 \dots 3$, матричні одиниці, тобто такі матриці у яких на перетині i-го рядка та j-го стовпчика знаходиться одиниця, а на всіх інших місцях нулі. Має місце співвідношення

$$[E_{i\,j}, E_{k\,l}] := E_{i\,j} E_{k\,l} - E_{k\,l} E_{i\,j} = \delta_{j\,k} E_{i\,l} - \delta_{i\,l} E_{k\,j}.$$

Матриці $E_{1\,2}$, $E_{2\,3}$, $E_{1\,3}$ утворюють базис підалгебри UT_3 верхніх трикутних матриць, матриці $E_{2\,1}$, $E_{3\,2}$, $E_{3\,1}$ утворюють базис підалгебри DT_3 нижніх трикутних матриць. Матриці $E_{1\,1} - E_{2\,2}$, $E_{2\,2} - E_{3\,3}$, та $E_{1\,1} - E_{3\,3}$, породжують картанівську підалгебру в sl_3.

Для довільного sl_3-модуля V позначимо через D_1, D_2, D_3 лінійні оператори з $\mathrm{End}(V)$, які відповідають дії на V відповідно елементів $E_{1\,2}$, $E_{2\,3}$, $E_{1\,3}$. Аналогічно оператори $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$, $\hat{D}_3$ відповідають дії на V відповідно елементів $E_{2\,1}$, $E_{3\,2}$, $E_{3\,1}$, оператори E_1, E_2, і E_3 відповідають дії відповідно елементів $E_{1\,1} - E_{2\,2}$, $E_{2\,2} - E_{3\,3}$, $E_{1\,1} - E_{3\,3}$.

Випишемо комутаційні співвідношення між цими операторами, які нам будуть потрібні в подальшому:

$$\begin{array}{lll}
[E_1, D_1] = 2D_1, & [E_1, D_3] = D_3, & D_2, \hat{D}_1] = 0, \\
[E_1, \hat{D}_1] = -2\hat{D}_1, & [E_1, \hat{D}_3] = -\hat{D}_3, & [E_1, \hat{D}_2] = \hat{D}_2, \\
[D_1, \hat{D}_1] = E_1, & [D_1, \hat{D}_3] = -\hat{D}_2, & [D_1, \hat{D}_2] = 0, \\
[E_1, D_2] = -D_2, [& [D_2, \hat{D}_3] = -\hat{D}_1, & [D_2, \hat{D}_2] = E_2, \\
[D_3, \hat{D}_1] = -D_2, & [D_3, \hat{D}_3] = -D_1, & [D_3, \hat{D}_2] = E_2.
\end{array}$$

Алгебра sl_3 діє на векторному просторі

$$X := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle,$$

диференціюваннями, а саме

$$D_1=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1},\qquad D_2=-x_3\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$E_1=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}-x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\quad E_2=x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-x_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\hat{D}_1=-x_1\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad \hat{D}_2=-x_2\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$D_3=-x_3\frac{\partial}{\partial x_1},\qquad E_3=x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-x_1\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\hat{D}_3=-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Векторний простір X є стандартним незвідним sl_3-модулем ізоморфним до $\Gamma_{0,1}$, а векторний простір $U:=\langle u_1,u_2,u_3\rangle\cong X^*$ є незвідним sl_3-модулем ізоморфним до $\Gamma_{1,0}$. Відповідний елемент Казиміра

$$u:=\Delta(X,U)=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3,$$

називається універсальним коваріантом.

Симетричні степені $S^m(X)$ і $S^m(U)$ є незвідними sl_3-модулями ізоморфними відповідно до $\Gamma_{0,m}$ і $\Gamma_{m,0}$.

Вивчимо дію алгебри sl_3 на породжуючі елементи кільця R_n.

Твердження 1. *В sl_3-модулі R_n відповідні диференціальні оператори діють за формулами*

$$D_1(a_{i,j})=i\,a_{i-1,j},\qquad D_2(a_{i,j})=j\,a_{i+1,j-1},$$
$$\hat{D}_1(a_{i,j})=(n-(i+j))\,a_{i+1,j},\quad \hat{D}_2(a_{i,j})=i\,a_{i-1,j+1},$$
$$D_3(a_{i,j})=(n-(i+j))a_{i,j+1},\quad D_3(a_{i,j})=ja_{i,j-1},$$
$$E_1(a_{i,j})=(n-(2i+j))a_{i,j},\qquad E_2(a_{i,j})=(i-j)a_{i,j},$$

$$E_3(a_{i,j})=(d-(i+2j))a_{i,j}.$$

Доведення. Для доведення використаємо той факт, що форма $u(x_1,x_2,x_3)$ є коваріантом і тому кожен з операторів $D_i,\hat{D}_i$ повинен зануляти її. Зокрема, для диференціюваня D_1, маємо

$$D_1(u(x_1,x_2,x_3))=$$
$$=\sum_{i+j\le n}\frac{n!}{i!j!(n-(i+j))!}(D_1(a_{i,j})x_1^{n-(i+j)}x_2^ix_3^j+$$
$$+a_{i,j}D_1(x_1^{n-(i+j)}x_2^ix_3^j))=$$
$$=D_1(a_{0,1})x_1^{n-1}x_3+\cdots+D_1(a_{0,n})\frac{1}{n!}x_3^n+$$
$$+\sum_{\substack{i+j\le n\\ i>0}}\Big(D_1(a_{i,j})-i\,a_{i-1,j}\Big)x_1^{d-(i+j)}x_2^ix_3^j.$$

Тому рівність $D_1(u(x_1,x_2,x_3))=0$ можлива лише за умови, що всі коефіцієнти рівні нулю, отже, маємо $D_1(a_{0,j})=0$ для всіх $0\le j\le n$, і $D_1(a_{i,j})=i\,a_{i-1,j}$, що і потрібно було показати. В такий самий спосіб визначається дія інших операторів на кільці R_n. □

Якщо елемент $a\in K[A]$ є власним вектором оператора E_i, $i=1,2$, то його власне значення будемо позначати $\omega_i(a)$ і називати i-вагою елемента a, а такий елемент a будемо називати ваговим вектором. Зрозуміло, що i-вага є лінійною, адитивною функцією на множині вагових векторів. Однорідний многочлен a з $K[A]$ називається ізобарним, якщо він буде ваговим відносно обох операторів E_1, E_2. У цьому випадку набір $[\omega_1(a),\omega_2(a)]$ буде називатися вагою многочлена a.

Теорема 2. *Нехай $V:=\{v_k\}$ $V^*:=\{v_k^*\}$ – два дуальні sl_3-модулі, причому всі базисні вектори є ваговими векторами. Якщо для деякого номера i елемент $v_i\in V$ є старшим вектором у V, то v_i^* буде молодшим вектором у V^*.*

Доведення. Оскільки базисні вектори є ваговими, то ваговим буде і елемент $v_iv_i^*$, його вага рівна

$$[\omega_1(v_i)+\omega_1(v_i^*),\omega_2(v_i)+\omega_2(v_i^*)].$$

Із умов $E_1(\Delta(V,V^*))=E_2(\Delta(V,V^*))=0$ випливає що і $E_1(v_iv_i^*)=E_2(v_iv_i^*)=0$ звідки знаходимо, що $\omega_1(v_i^*)=-\omega_1(v_i)$, $\omega_2(v_i^*)=-\omega_2(v_i)$. Нехай для деякого номера i елемент v_i є старшим вектором sl_3-модуля V старшої ваги $[\omega_1(v_i),\omega_2(v_i)]$. Тоді вектор v_i^* має вагу $-[\omega_1(v_i),\omega_2(v_i)]$ і ця вага буде молодшою вагою sl_3-модуля V^*. □

Наступні теореми встановлюють правила обчислень в sl_3-модулі $\mathfrak{U}(UT_3)(a)$, де a є старшим вектором в $k[A]$.

Твердження 2. *Нехай a – однорідний, ізобарний многочлен з $k[A]$. Тоді*

$$E_1(\hat{D}_1^\alpha\hat{D}_2^\beta\hat{D}_3^\gamma(a))=(\omega_1(a)-2\alpha+\beta-\gamma)\hat{D}_1^\alpha\hat{D}_2^\beta\hat{D}_3^\gamma(a),$$
$$E_2(\hat{D}_1^\alpha\hat{D}_2^\beta\hat{D}_3^\gamma(a))=(\omega_2(a)+\alpha-2\beta+\gamma)\hat{D}_1^\alpha\hat{D}_2^\beta\hat{D}_3^\gamma(a).$$

Доведення. (i) Використовуючи комутаційне співвідношення $[E_1,\hat{D}_1]=-2\hat{D}_1$ отримаємо, що

$$E_1\hat{D}_1(a)=[E_1,\hat{D}_1](a)+D_1(E_1(a))=$$
$$=-2\hat{D}_1(a)+\omega_1(a)\hat{D}_1(a)=(\omega_1(a)-2)\hat{D}_1(a).$$

В загальному випадку маємо, що

$$E_1\hat{D}_1^\alpha(a)=(\omega_1(a)-2\alpha)\hat{D}_1^\alpha(a).$$

Враховуючи співвідношення $[E_1,\hat{D}_2]=\hat{D}_2$, та $[E_1,\hat{D}_3]=-\hat{D}_3$ знаходимо, що

$$E_1\hat{D}_2^\beta(a)=(\omega_1(a)+\beta)\hat{D}_2^\beta(a),$$
$$E_1\hat{D}_3^\gamma(a)=(\omega_1(a)-\gamma)\hat{D}_3^\gamma(a).$$

В загальному випадку отримаємо

$$E_1(\hat{D}_1^\alpha\hat{D}_2^\beta\hat{D}_3^\gamma(a))=(\omega_1(a)-2\alpha+\beta-\gamma)\hat{D}_1^\alpha\hat{D}_2^\beta\hat{D}_3^\gamma(a).$$

(ii)Аналогічними міркуваннями, враховуючи співвідношення

$$[E_2, \hat{D}_1] = D_1, [E_2, \hat{D}_2] = -2\hat{D}_2, [E_2, \hat{D}_3] = -\hat{D}_3,$$

знаходимо

$$E_2(\hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a)) = (\omega_2(a) + \alpha - 2\beta - \gamma)\hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a).$$

□

Як наслідок отримуємо, що довільний незвідний sl_3-модуль V в $k[A]$ із старшим вектором a старшої ваги $[d_1, d_2]$ розкладається в суму вагових підпросторів $V_{(i,\,j)}$, де

$$V_{(i,\,j)} = \{\hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a), \lambda_1 = i, \lambda_2 = j\}.$$

Тут $\lambda_1 := \omega_1(a) - 2\alpha + \beta - \gamma$, $\lambda_2 := \omega_2(a) + \alpha - 2\beta - \gamma$ і $[-d_1, -d_2] \leq [i, j] \leq [d_1, d_2]$.

Твердження 3. *Нехай a – однорідний ізобарний многочлен з $k[A]^{UT_3}$. Тоді*

$$D_1(\hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a)) = \alpha(\lambda_1 + \alpha + 1)\hat{D}_1^{\alpha-1} \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a) - \\ -\gamma \hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^{\beta+1} \hat{D}_3^{\gamma-1}(a),$$
$$D_2(\hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a)) = \beta(\omega_2(a) - \beta + 1)\hat{D}_1^\alpha \hat{D}_2^{\beta-1} \hat{D}_3^\gamma(a) + \\ +\gamma \hat{D}_1^{\alpha+1} \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^{\gamma-1}(a).$$

Доведення. Доведемо лише першу формулу, оскільки друга формула доводиться за тією ж схемою. Маємо

$$D_1 \hat{D}_3(a) = [D_1, \hat{D}_3](a) + \hat{D}_3 D_1(a) = -\hat{D}_2(a).$$

За індукцією неважко показати, що

$$D_1 \hat{D}_3^\gamma(a) = -\gamma \hat{D}_2 \hat{D}_3^{\gamma-1}(a),$$

і, враховуючи комутативність операторів D_1 і $\hat{D}_2$, знаходимо

$$D_1 \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a) = -\gamma \hat{D}_2^{\beta+1} \hat{D}_3^{\gamma-1}(a).$$

Для довільного однорідного ізобарного a' маємо

$$D_1 \hat{D}_1(a') = [D_1, \hat{D}_1](a') + \hat{D}_1 D_1(a') = \omega_1(a') + \hat{D}_1 D_1(a').$$

В загальному випадку отримаємо

$$D_1 \hat{D}_1^\alpha(a') = \\ = (\sum_{\tau=0}^{\alpha-1} \omega_1(\hat{D}_1^\tau(a'))D_1^{\alpha-1}(a') + D_1^\alpha D_1(a') = \\ = \alpha(\omega_1(a') - \alpha + 1)D_1^{\alpha-1}(a') + \hat{D}_1^\alpha D_1(a').$$

Підставивши $a' = \hat{D}_2^\beta \hat{D}_3^\gamma(a)$, отримаємо необхідне співвідношення. □

Коваріанти тернарної форми

Наступне твердження є аналогом відомої теореми Робертса про коваріанти бінарної форми.

Теорема 3. *Нехай*

$$f = \sum_{i+j \leq d} \frac{d!}{i!j!(d-(i+j))!} b_{i,j} x_1^{d-(i+j)} x_2^i x_3^j, \ \ b_{i\,j} \in k[A]$$

– незвідний коваріант порядку d. Тоді :

(i) векторний простір $B_d := \langle \{b_{i,j}\}, i+j \leq d \rangle$ буде незвідним sl_3-модулем ізоморфним до $\Gamma_{d,\,0}$.

(ii) елемент $b_{0,\,0}$ буде старшим вектором sl_3-модуля B_d з старшою вагою $[d, 0]$.

(iii) коваріант f є елементом Казимира, $f = \Delta(B_d, S^d(X))$ і записується у вигляді

$$f = \sum_{i+j \leq d} \frac{1}{i!j!} \hat{D}_1^i \hat{D}_3^j(b_{0,0}) x_1^{d-(i+j)} x_2^i x_3^j.$$

Доведення. (i) Очевидно, що f є інваріантом sl_3-модуля $B_d \cdot S^d(X)$. Тому із теореми 1 отримуємо $B_d \cong S^d(X)^* \cong \Gamma_{d,\,0}$.
(ii) Аналогічно, як і у пропозиції 1 знаходимо дію на B_d диференціальних операторів, які відповідають породжуючим елементам алгебри sl_3 :

$$D_1(b_{i,j}) = i\, b_{i-1,j}, \qquad D_2(b_{i,j}) = j\, b_{i+1,j-1},$$
$$\hat{D}_1(b_{i,j}) = (d - (i+j))\, b_{i+1,j}, \quad \hat{D}_2(b_{i\,j}) = i\, b_{i-1,j+1}.$$

Очевидно, що в B_d є лише один інваріант алгебри DT_3, а саме $b_{0,0}$, тому $b_{0,0}$ є старшим вектором sl_3-модуля B_d з вагою $[d, 0]$.
(iii) Оскільки $b_{0\,0}$ є старшим вектором незвідного модуля B_d, то $B_d = \mathfrak{U}(DT_3)(b_{0\,0})$ (див., наприклад, [7]). Тому всі $b_{i\,j}$ можна виразити через степені операторів $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$, і $\hat{D}_2$. Використовуючи явний вигляд дії цих операторів неважко показати, що

$$b_{i,j} = \frac{1}{m(m-1)\dots(m-(i+j-1)} \hat{D}_1^i \hat{D}_3^j(b_{0,\,0}).$$

Базиси $\left\{ \frac{d!}{i!j!(d-(i+j))!}\, b_{i,j} \right\} = \left\{ \frac{1}{i!j!} \hat{D}_1^i \hat{D}_3^j(b_{i,j}) \right\}$ та $\left\{ x_1^{d-(i+j)} x_2^i\, x_3^j \right\}$, $i+j \leq d$ є взаємно дуальними, тому

$$f = \Delta(B_d, S^d(X)) = \sum \frac{1}{i!j!} \hat{D}_1^i \hat{D}_3^j(b_{0,0}) x_1^{d-(i+j)} x_2^i\, x_3^j.$$

Тут сума береться по таких індексах i, j, для яких $i + j \leq d$. □

Отже, всякий незвідний коваріант однозначно визначається своїм старшим коефіцієнтом, який є інваріантом підалгебри UT_3, утвореної верхньо-трикутними матрицями.

Для формулювання оберненої теореми введемо поняття порядку многочлена відносно операторів $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$,.

Означення 3. *Для довільного многочлена* $z \in \mathbb{K}[A, X, U]$ *набір* $[z] := [\mathrm{ord}_1(z), \mathrm{ord}_2(z)]$, *де*

$$\mathrm{ord}_i(z) := \max\{s, \hat{D}_i^s(a) \neq 0\}, i = 1, 2$$

називається порядком z *відносно оператора* $\hat{D}_i$.

Цілі числа $\mathrm{ord}_i(z)$, $i = 1, 2$ будемо називати i-порядком многочлена z відносно диференціювання $\hat{D}_i$. Коректність означення порядку випливає із того, що оператори диференціювання $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$ є локально нільпотентними в кільці $\mathbb{K}[A, X, U]$.

Покажемо, що для однорідних, ізобарних елементів з $\mathbb{K}[A]^{UT_3}$ їхні порядки співпадають з відповідними вагами. Справедливе наступне твердження

Твердження 4. *Нехай* a *однорідний, ізобарний елемент з* $\mathbb{K}[A]^{UT_3}$. *Тоді* $[a] = [\omega_1(a), \omega_2(a)]$.

Доведення. Покажемо, що $\omega_1(a) = \mathrm{ord}_1(a)$. За означенням порядку елемента маємо, що

$$\hat{D}_1^{\mathrm{ord}_1(a)+1}(a) = 0.$$

З іншого боку, враховуючи пропозицію 2 отримаємо

$$D_1(\hat{D}_1^{\mathrm{ord}_1(a)+1}(a)) = \\ = (\mathrm{ord}_1(a) + 1)(\omega_1(a) - \mathrm{ord}_1(a))\hat{D}_1^{\mathrm{ord}_1(a)}(a) = 0.$$

Отже, $\omega_1(a) = \mathrm{ord}_1(a)$, що і потрібно було довести. Аналогічно показується, що $\omega_2(a) = \mathrm{ord}_2(a)$. □

Теорема 4. *Нехай* a *– однорідний, незвідний, ізобарний елемент з* $\mathbb{K}[A]^{DT_3}$ *порядку* $[d, 0]$. *Тоді*

(i) векторний простір

$$\overline{B}_d := \mathfrak{U}(UT_3)a = \Big\{\frac{1}{[d, i+j-1]!}\hat{D}_1^i\hat{D}_3^j(a), \\ i + j \leq d\Big\},$$

є незвідним sl_3*-модулем ізоморфним до* $\Gamma_{d,0}$.

(ii) елемент Казиміра $\Delta(\bar{B}_d, S^d(X))$ *є коваріантом порядку* d *тернарної форми.*

Доведення. (i) Покладемо

$$\bar{b}_{i,j} = \frac{1}{[d, i+j-1]!}\hat{D}_1^i\hat{D}_3^j(a).$$

Тоді

$$D_1(\bar{b}_{i,j}) = D_1\left(\frac{1}{[d, i+j-1]!}\hat{D}_1^i\hat{D}_3^j(a)\right) = \\ = \frac{i(\omega_1(a) - i - j + 1)}{[d, i+j-1]!}\hat{D}_1^{i-1}\hat{D}_3^j(a) - j\hat{D}_1^i\hat{D}_2\hat{D}_3^{j-1}(a).$$

Враховуючи комутативність операторів $\hat{D}_2$ та $\hat{D}_3$ і те, що $\mathrm{ord}_2(a) = 0$, тобто $\hat{D}_2(a) = 0$, отримаємо, що другий доданок рівний нулю. Взявши до уваги те, що $\omega_1(a) = d$, отримаємо

$$D_1(\bar{b}_{i,j}) = \frac{i}{[d, i+j-1]!}(d - i - j + 1)\hat{D}_1^{i-1}\hat{D}_3^j(a) = \\ = \frac{i}{[d, i+j-2]!}\hat{D}_1^{i-1}\hat{D}_3^j(a) = i\bar{b}_{i-1,j}.$$

Далі,

$$\hat{D}_1(\bar{b}_{i,j}) = \frac{1}{[d, i+j-1]!}\hat{D}_1^{i+1}\hat{D}_3^j(a) = \\ = \frac{d-(i+j)}{[d, i+j]!}\hat{D}_1^{i+1}\hat{D}_3^j(a) = (d - (i+j))\bar{b}_{i+1,j}.$$

Аналогічно знаходимо, що $D_2(b_{i,j}) = j\,\bar{b}_{i+1,j-1}$ і $\hat{D}_2(\bar{b}_{i,j}) = i\,\bar{b}_{i-1,j+1}$. Таким чином, векторний простір $\bar{B}_d$ є sl_3-модулем, причому дія алгебри sl_3 співпадає з її дією на sl_3-модулі R_d, див. пропозицію 1. Оскільки розмірності просторів $\bar{B}_d$ і R_d рівні $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$, то $\bar{B}_p \cong R_d \cong \Gamma_{d,0}$.

(ii) Розглянемо білінійну форму

$$(\cdot, \cdot) : \bar{B}_d \times S^d(X) \to \mathbb{K},$$

значення якої на базисних елементах відповідних просторів визначається за формулою

$$(\bar{b}_{k\,l}, x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j) = \frac{i!j!(d-(i+j))!}{d!}\delta_{i\,k}\delta_{j\,l},$$

тут $\delta_{i\,j}$ – символ Кронекера.

Перевіримо, що ця форма є sl_3-інваріантною, тоб-то для всіх $g \in sl_3$, $u \in \bar{B}_d$, $v \in S^d(X)$ має місце співвідношення $(g(u), v) + (u, g(v)) = 0$.

Для оператора D_1 маємо

$$\big(D_1(\bar{b}_{k\,l}), x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j\big) = k(\bar{b}_{k-1\,l}, x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j) = \\ = k\frac{i!j!(d-(i+j))!}{d!}\delta_{k-1\,i}\delta_{l\,j} = (i+1)\frac{i!j!(d-(i+j))!}{d!},$$

і

$$(\bar{b}_{k\,l}, D_1(x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j)) = -\frac{(\bar{b}_{k\,l}, x_1^{d-(i+j+1)}x_2^{i+1}x_3^j)}{(d-(i+j))^{-1}} = \\ = -(d-(i+j))\frac{(i+1)!j!(d-(i+j+1))!}{d!}\delta_{k\,i+1}\delta_{l\,j} = \\ = -\frac{(i+1)!j!(d-(i+j))!}{d!}.$$

Таким чином,

$$\big(D_1(\bar{b}_{k\,l}), x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j\big) + \big(\bar{b}_{k\,l}, D_1(x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j)\big) = 0.$$

Аналогічно виконується перевірка інваріантності і для операторів $\hat{D}_1$, D_2 і $\hat{D}_2$. Отже, білінійна форма $(\cdot, \cdot)$ є sl_3-інваріантною і тому базиси

$$\left\{\frac{d!}{i!j!(d-(i+j))!}\bar{b}_{i,j}\right\} \text{ та } \{x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j\}, i + j \leq d,$$

взаємно дуальні.

Відповідний елемент Казиміра є sl_3-інваріантом і має вигляд

$$\Delta(\bar{B}_d, S^d(X))=\sum_{i+j\leq d}\frac{n!}{i!j!(d-(i+j))!}\bar{b}_{i,j}x_1^{d-(i+j)}x_2^i x_3^j,$$

тобто є коваріантом степеня d. $\square$

Контраваріанти тернарної форми

Перейдемо до вивчення контраваріантів тернарної форми. Аналогічно, як і у випадку коваріантів мають місце наступні теореми

Теорема 5. *Нехай*

$$f=\sum_{i+j\leq d}\frac{d!}{i!j!(d-(i+j))!}c_{i\,j}u_3^{d-(i+j)}u_1^i u_2^j,\ c_{i,j}\in k[A],$$

– незвідний контраваріант порядку d. Тоді

(i) векторний простір $C_d := \langle\{c_{i,j}\}, i+j\leq d\rangle$ є незвідним sl_3-модулем ізоморфним $\Gamma_{0,\,d}$.

(ii) елемент $c_{0,0}$ є старшим вектором sl_3-модуля C_d з вагою $[0,d]$.

(iii) контраваріант f є елементом Казимира

$$f=\Delta(C_d, S^d(U)),$$

який записується у вигляді

$$f=\sum_{i+j\leq d}\frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}\hat{D}_2^j\hat{D}_3^i(c_{0,0})u_3^{n-(i+j)}u_1^i u_2^j.$$

Доведення. (i) Очевидно, що f є інваріантом sl_3-модуля $C_d\cdot S^d(U)$. Тому, із теореми 1 отримуємо

$$C_d\cong S^d(X)^*\cong\Gamma_{0,\,d}.$$

(ii) Аналогічно, як і у пропозиції 1 знаходимо дію на C_d диференціальних операторів, які відповідають породжуючим елементам алгебри sl_3 :

$$D_1(c_{i,j})=-\,i_{\,i-1,j+1},\qquad D_2(c_{i,j})=-\,j\,c_{i,j-1},$$
$$\hat{D}_2(c_{i,j})=-\,(d-(i+j))\,c_{i,j+1},\quad \hat{D}_1(c_{i,j})=-j\,c_{i+1,j-1},$$
$$\hat{D}_3(c_{i,j})=-\,(d-(i+j))\,c_{i+1,j},\quad D_3(c_{i,j})=-\,i\,c_{i-1,j}.$$

Очевидно, що в C_d є лише один інваріант алгебри DT_3, а саме $c_{0,0}$, тому $c_{0,0}$ є старшим вектором незвідного sl_3-модуля C_d з вагою $[0,d]$.
(iii) Оскільки елемент $c_{0,0}$ є старшим вектором незвідного sl_3-модуля C_d , то $C_d=\mathfrak{U}(DT_3)(c_{0,0})$. Тому всі $c_{i,j}$ можна виразити через степені операторів $\hat{D}_1$, $\hat{D}_2$, і $\hat{D}_3$. Використовуючи явний вигляд дії цих операторів неважко показати, що

$$b_{i,j}=\frac{(-1)^{i+j}}{[m,i+j-1]!}\hat{D}_2^j\hat{D}_3^i(c_{0,0}).$$

Базиси $\left\{\dfrac{d!\,c_{i,j}}{i!j!(d-(i+j))!}\right\}=\left\{\dfrac{(-1)^{i+j}}{i!j!}\hat{D}_1^i\hat{D}_3^j(c_{0,0})\right\}$ та $\left\{u_3^{d-(i+j)}u_1^i\,u_2^j\right\}$, $i+j\leq d$ є взаємно дуальними, тому

$$\Delta(B_d, S^d(U))=\sum_{i+j\leq d}\frac{(-1)^{i+j}\hat{D}_1^i\hat{D}_3^j(c_{0,0})u_3^{d-(i+j)}u_1^i\,u_2^j}{i!j!}.$$

$\square$

Отже, кожен незвідний контраваріант однозначно вичначає своїм старшим членом, який є інваріантом алгебри DT_3. В наступній теоремі доводиться справедливість оберненого твердження.

Теорема 6. *Нехай a є незвідний, однорідний, ізобарний елемент з $k[A]^{UT_3}$ мультипорядку $[0,d]$. Тоді*

(i) векторний простір

$$\overline{C}_d := \mathfrak{U}(UT_3)a=\left\{\frac{(-1)^{i+j}}{[d,i+j-1]!}\hat{D}_2^j\hat{D}_3^i(a), i+j\leq d\right\},$$

є незвідним sl_3-модулем ізоморфним до $\Gamma_{0,\,d}$.

(ii) елемент Казиміра $\Delta(\bar{C}_d, S^d(U))$ є контраваріантом порядку d тернарної форми.

Доведення. (i) Покладемо $\bar{c}_{i,j}=\dfrac{(-1)^{i+j}\hat{D}_2^j\hat{D}_3^i(a)}{[d,i+j-1]!}$. Тоді, використавши пропозицію 2, знайдемо

$$D_1(\bar{c}_{i,j})=D_1\left(\frac{(-1)^{i+j}}{[d,i+j-1]!}\hat{D}_2^j\hat{D}_3^i(a)\right)=$$
$$=\frac{-(-1)^{i+j}i}{[d,i+j-1]!}\hat{D}_2^{j+1}\hat{D}_3^{i-1}(a)=-i\bar{c}_{i-1,j+1}.$$

Неважко переконатися, використовуючи індукцію, що $\hat{D}_1\hat{D}_2^j(a)=-j\hat{D}_3\hat{D}_2^{j-1}$. Тому, знову взявши до уваги пропозицію 2, враховуючи комутативність операторів $\hat{D}_1$, і $\hat{D}_3$, а, також те, що мають місце рівності

$$\omega_2(a)=\mathrm{ord}_2(a)=d,$$

після нескладних обчислень отримаємо

$$D_2(\bar{c}_{i,j})=D_2\left(\frac{(-1)^{i+j}\hat{D}_2^j\hat{D}_3^i(a)}{[d,i+j-1]!}\right)=$$
$$=\frac{-(-1)^{i+j-1}j}{[d,i+j-2]!}\hat{D}_2^{j-1}\hat{D}_3^i(a))=-j\bar{c}_{i,j-1}.$$

Далі, аналогічно знаходимо

$$\hat{D}_1(\bar{c}_{i,j})=\frac{-j(-1)^{i+j}\hat{D}_2^{j-1}\hat{D}_3^{i+1}(a)}{[d,i+j-1]!}=-j\bar{c}_{i+1,j-1},$$

і

$$\hat{D}_2(\bar{c}_{i,j})=-(d-(i+j))\bar{c}_{i,j+1}.$$

Отже, векторний простір $\bar{C}_d$ є sl_3-модулем, причому дія алгебри sl_3 співпадає з її дією на sl_3-модулі C_d, див. (ii) попередньої теореми. Оскільки розмірності просторів $\bar{C}_d$ і C_d рівні $\dfrac{1}{2}(d+1)(d+2)$, то $\bar{C}_d \cong C_d \cong \Gamma_{0,d}$.

(ii)Розглянемо білінійну форму

$$(\cdot,\cdot) : \bar{C}_d \times S^d(U) \to \mathbb{K},$$

значення якої на базисних елементах відповідних просторів визначається за формулою

$$\left(\bar{c}_{k,l}, u_3^{d-(i+j)} u_1^i u_2^j\right) = \frac{(-1)^{i+j} i! j! (d-(i+j))!}{d!} \delta_{i\,k}\delta_{j\,l}.$$

Аналогічно, як і у випадку коваріантів можна показати, що ця форма є sl_3-інваріантною і тому базиси

$$\left\{\frac{(-1)^{i+j} d!}{i!j!(d-(i+j))!}\bar{c}_{i,j}\right\} \text{ та } \left\{u_3^{d-(i+j)} u_1^i u_2^j\right\}, i+j \le d,$$

будуть взаємно дуальними.

Відповідний елемент Казиміра є sl_3-інваріантом і має вигляд

$$\Delta(\bar{C}_d, S^d(U)) = \sum_{i+j \le n} \frac{(-1)^{i+j} d!}{i!j!(d-(i+j))!} \bar{b}_{i,j} u_3^{d-(i+j)} u_1^i u_2^j,$$

тобто є контраваріантом порядку d. □

Змішані конкомітанти тернарної форми

Перейдемо до вивчення змішаних конкомітантів тернарної форми. Як і у випадку коваріантів та контраваріантів мають місце наступні теореми

Теорема 7. *Нехай*

$$f = \sum_{\substack{i+j \le d_1 \\ k+l \le d_2}} \frac{d_1! d_2! B_{i,j}^{k,l} x_1^{d_1-(i+j)} x_2^i x_3^j u_3^{d_2-(k+l)} u_1^k u_2^l}{i!j!k!l!(d_1-(i+j))!(d_2-(k+l))!},$$

– незвідний змішаний конкомітант класу $[d_1, d_2]$. Тут $B_{i,j}^{k,l} \in k[A]$ і $d_1, d_2 > 0$. Тоді:

(i) векторний простір

$$B_{d_1}^{d_2} := \langle \{B_{i,j}^{k,l}\}, i+j \le d_1, k+l \le d_2 \rangle$$

є незвідним sl_3-модулем ізоморфним Γ_{d_1,d_2}.

(ii) елемент $B_{0,0}^{0,0}$ є старшим вектором sl_3- модуля $B_{d_1}^{d_2}$ з вагою $[d_1, d_2]$.

(iii) змішаний конкомітант f є елементом Казимира, причому $f = \Delta(B_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U))$.

Доведення. (i) Очевидно, що f є інваріантом sl_3-модуля $B_{d_1}^{d_2} \cdot S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)$. Тому із теореми 1 отримуємо

$$B_{d_1}^{d_2} \cong (S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U))^* = (S^{d_1}(X))^* \cdot (S^{d_2}(U))^*.$$

sl_3-модуль $S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)$ можна легко розкласти на незвідні підмодулі. Для цього знайдемо старші вектори в $S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)$, тобто вектори інваріантні відносно алгебри DT_3. Неважко переконатися, що за старші вектори можна взяти такі многочлени

$$v_i := x_3^{d_1-i} u_1^{d_2-i} u^i,\ i \le 0 \ldots i_0,\ i_0 := \min(d_1, d_2),$$

а $u := x\, u_1 + y\, u_2 + z\, u_3$ – універсальний коваріант.

Оскільки $\mathrm{ord}_1(u_1)$=1, і $\mathrm{ord}_1(x_3)$=$\mathrm{ord}_1(u) = 0$, то $\mathrm{ord}_1(v_i) = d_1 - i$. Аналогічно знаходимо, що і $\mathrm{ord}_2(v_i) = d_2 - i$. Оскільки, порядок інваріанта співпадає з його вагою, то вага кожного вектора v_i рівна $[d_1-i, d_2-i]$, і має місце розклад

$$S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U) = \Gamma_{d_1,\,d_2}(v_0) + \cdots + \Gamma_{d_1-i_0,\,d_2-i_0}(v_{i_0}).$$

Тут $\Gamma_{d_1-i,\,d_2-i}(v_i)$ – незвідний sl_3-модуль із старшим вектором v_i і вагою $[d_1-i,\ d_2-i]$.

Повністю аналогічно можна перевірити, що многочлени $\bar{v}_i := x^{d_1-i} u_3^{d_2-i} u^i$ є молодшими векторами sl_3-модуля $S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)$.

Задамо лінійне відображення векторних просторів $\varphi : S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U) \to B_{d_1}^{d_2}$, яке кожному елементу з $S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)$ ставить у відповідність дуальний йому елемент з $B_{d_1}^{d_2}$, тобто

$$\varphi\left(x_1^{d_1-(i+j)} x_2^i x_3^j u_3^{d_2-(k+l)} u_1^k u_2^l\right) =$$

$$= \frac{d_1! d_2!}{i!j!k!l!(d_1-(i+j))!(d_2-(k+l))!} B_{i\,j}^{k\,l}.$$

Врахувавши теорему 2, отримаємо, що відображеня φ переводить молодший вектор sl_3-модуля $S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)$ у старший вектор sl_3-модуля $B_{d_1}^{d_2}$. Позначимо через $w_i := \varphi(v_i)$ відповідні старші вектори, а через $\Gamma_{d_1-i,d_2-i}(w_i)$ – відповідні незвідні підмодулі. Має місце розклад

$$B_{d_1}^{d_2} = \Gamma_{d_1,d_2}(w_0) + \cdots + \Gamma_{d_1-i_0,d_2-i_0}(w_{i_0}).$$

Розглянемо тепер тепер елемент Казиміра

$$\Delta(B_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)).$$

Очевидно має місце розклад

$$\Delta(B_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)) = \Delta(\Gamma_{d_1,d_2}(w_0), \Gamma_{d_1,d_2}(v_0)) +$$

$$+ \cdots + \Delta(\Gamma_{d_1-i_0,d_2-i_0}(v_{i_0}), \Gamma_{d_1-i_0,d_2-i_0}(w_{i_0})).$$

Кожен із елементів Казиміра в правій частині, крім останнього, є змішаним конкомітантом, тому елемент

$\Delta(B_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U))$ буде незвідним лише тоді, коли всі змішані конкомітанти правої частини меншого класу будуть рівні нулю, а це можливо лише у випадку, коли всі старші вектори $w_i = 0$, $i = 1 \dots i_0$, а $w_0 \neq 0$. Таким чином отримаємо

$$\Delta(B_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)) = \Delta(\Gamma_{d_1,d_2}(w_0), \Gamma_{d_1,d_2}(v_0)),$$

звідки зразу випливає, що $B_{d_1}^{d_2} = \Gamma_{d_1,d_2}(w_0) \cong \Gamma_{d_1,d_2}$.
(ii)

Аналогічно до того, як це було зроблено в пропозиції 1, знаходимо дію породжуючих елементів алгебри sl_3 на $B_{d_1}^{d_2}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{D}_1(B_{i,j}^{k,l}){=}(d_1-(i+j))B_{i+1,j}^{k,l}{-}lB_{i,j}^{k+1,l-1},\\
&\hat{D}_2(B_{i,j}^{k,l}){=}iB_{i-1,j+1}^{k,l}{-}(d_2-(k+l))B_{i,j}^{k,l+1},\\
&\hat{D}_3(B_{i,j}^{k,l}){=}(d_1-(i+j))B_{i,j+1}^{k,l}{-}(d_2-(k+l))B_{i,j}^{k+1,l},\\
&D_1(B_{i,j}^{k,l}) = iB_{i-1,j}^{k,l} - kB_{i,j}^{k-1,l+1},\\
&D_2(B_{i,j}^{k,l}) = jB_{i+1,j-1}^{k,l} - lB_{i,j}^{k,l-1},\\
&D_3(B_{i,j}^{k,l}) = jB_{i,j-1}^{k,l} - kB_{i,j}^{k-1,l}.
\end{aligned}$$

Звідси зразу отримуємо, що

$$D_1(B_{0,0}^{0,0}) = D_2(B_{0,0}^{0,0}) = 0,$$

отже, $B_{0,0}^{0,0}$ – старший вектор у $B_{d_1}^{d_2}$.
(iii) Оскільки базиси

$$\left\{\frac{d_1!d_2!}{i!j!k!l!(d_1-(i+j))!(d_2-(k+l))!}B_{i,j}^{k,l}\right\}$$

та

$$\{x_1^{d_1-(i+j)}x_2^i x_3^j u_3^{d_2-(k+l)}u_1^k u_2^l\}, i+j \leqslant d_1, k+l \leqslant d_1$$

дуальні, то $f = \Delta(B_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U))$. □

Нехай a є незвідний, однорідний, ізобарний елемент з $k[A]^{UT_3}$ порядку $[d_1, d_2]$. Розглянемо векторний простір $\bar{B}_{d_1}^{d_2}$ породжений елементами $\left\{\bar{B}_{i,j}^{k,l}\right\}$, де $\bar{B}_{0,0}^{0,0}{:=}a$, а всі $\bar{B}_{i\,j}^{k\,l}$ знаходяться із умов

$$\begin{aligned}
&\hat{D}_1(\bar{B}_{i,j}^{k,l}) = (d_1-(i+j))\bar{B}_{i+1,j}^{k,l} - l\bar{B}_{i,j}^{k+1,l-1},\\
&\hat{D}_2(\bar{B}_{i,j}^{k,l}) = i\bar{B}_{i-1,j+1}^{k,l} - (d_2-(k+l))\bar{B}_{i,j}^{k,l+1},\\
&\hat{D}_3(\bar{B}_{i,j}^{k,l}){=}(d_1-(i+j))\bar{B}_{i,j+1}^{k,l}{-}(d_2-(k+l))\bar{B}_{i,j}^{k+1,l},
\end{aligned}$$

та із умов рівності нулю елементів $\bar{w}_i$, $i = 1 \dots i_0$.

Тут $\bar{w}_i$ утворюються із w_i заміною $B_{i,j}^{k,l}$ на $\bar{B}_{i,j}^{k,l}$.

Теорема 8. *Нехай a є незвідний, однорідний, ізобарний елемент з $k[A]^{UT_3}$ мультипорядку $[d_1, d_2]$. Тоді:*

(i) векторний простір $\bar{B}_{d_1}^{d_2} := \mathfrak{U}(UT_3)a$ є незвідним sl_3-модулем ізоморфним до Γ_{d_1,d_2}.

(ii) елемент Казиміра $\Delta(\bar{B}_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U))$ є змішаним конкомітантом тернарної форми класу $[d_1, d_2]$.

Доведення. (i) Пряма перевірка показує, що $\bar{B}_{d_1}^{d_2}$ є sl_3-модулем. Оскільки простір $\bar{B}_{d_1}^{d_2}$ побудований таким чином, що в ньому існує лише один старший вектор ваги $[d_1, d_2]$, а саме $\bar{B}_{0,0}^{0,0} = a$, то $\bar{B}_{d_1}^{d_2}$ є незвідним sl_3-модулем, причому $\bar{B}_{d_1}^{d_2} = \mathfrak{U}(UT_3)a$.

(ii) Розглянемо білінійну форму

$$(\cdot,\cdot) : \bar{B}_{d_1}^{d_2} \times S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U) \to \mathbb{K},$$

значення якої на базисних елементах відповідних просторів визначається за формулою

$$\left(\bar{B}_{i\,j}^{k\,l}, x_1^{d_1-(i+j)}x_2^{i'}x_3^{j'}u_3^{d_2-(k'+l')}u_1^{k'}u_2^{l'}\right) =$$

$$= \frac{i!j!k!l!(d_1-(i+j))!(d_2-(k+l))!}{d_1!d_2!}\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}\delta_{k,k'}.$$

Аналогічно, як і у випадку коваріантів та контраваріантів можна показати що ця форма є невиродженою та sl_3-інваріантною. Тому, базиси

$$\left\{\frac{d_1!d_2!}{i!j!k!l!(d_1-(i+j))!(d_2-(k+l))!}\bar{B}_{i\,j}^{k\,l}\right\},$$

та

$$\{x_1^{d_1-(i+j)}x_2^i x_3^j u_3^{d_2-(k+l)}u_1^k u_2^l\}, i+j \leq d_1, k+l \leq d_2,$$

є дуальними, а відповідний елемент Казиміра

$$\Delta(\bar{B}_{d_1}^{d_2}, S^{d_1}(X) \cdot S^{d_2}(U)),$$

є змішаним конкомітантом тернарної форми класу $[d_1, d_2]$. □

Приклад. Для $n = 3$, розглянемо в $k[A]$ многочлен $a := a_{0,0}a_{2,0} - a_{1,0}^2$ який є інваріантом підалгебри $k[A]^{DT_3}$. Оскільки $\hat{D}_1^3(a) = 0$, але $\hat{D}_1^2(a) \neq 0$, то $\operatorname{ord}_1(a) = 2$. Аналогічними міркуваннями отримуємо, що $\operatorname{ord}_2(a) = 2$, отже, порядок a рівний $[2, 2]$, і a буде старшим вектором зі старшою вагою $[2, 2]$ sl_3-підмодуля $\bar{B}_2^2 = \mathfrak{U}(UT_3)a$ в $k[A]$, ізоморфного стандартному sl_3-модулю $\Gamma_{2,2}$. Відповідно до вагової діаграми знайдемо базисні вектори вагових підпросторів $B_{(i,j)}$ sl_3-модуля $\mathfrak{U}(UT_3)a$

$$
\begin{aligned}
&B_{(2,2)} = \{B^{0\,0}_{0\,0} = a\},\\
&B_{(0,3)} = \{\hat{D}_1(a) = 2B^{0\,0}_{1\,0}\},\\
&B_{(3,0)} = \{D_2(B^{0\,0}_{0\,0}) = -2B^{0\,1}_{0\,0}\},\\
&B_{(4,-2)} = \{\hat{D}_2^2(a) = 2B^{0,2}_{0,0}\},\\
&B_{(-2,4)} = \{\hat{D}_1^2(a) = 2B^{0\,0}_{2\,0}\},\\
&B_{(-3,3)} = \{\hat{D}_1^2\hat{D}_3(a) = -4B^{1,0}_{2,0}\},\\
&B_{(-4,2)} = \{\hat{D}_1^2\hat{D}_3^2(a) = 4B^{2,0}_{2,0}\},\\
&B_{(3,-3)} = \{\hat{D}_2^2\hat{D}_2(a) = 4B^{0,2}_{0,1}\},\\
&B_{(2,-4)} = \{\hat{D}_2^2\hat{D}_3^2(a) = \{4B^{0,2}_{0,2}\},\\
&B_{(-2,-2)} = \{\hat{D}_3^4(a) = 24B^{2,0}_{0,2}\},\\
&B_{(1,1)} = \{\hat{D}_3(a) = 2B^{0,0}_{0,1} - 2B^{1,0}_{0,0},\\
&\hat{D}_1D_2(a) = -4B^{0,1}_{1,0} + 2B^{1,0}_{0,0}\},\\
&B_{(-1,2)} = \{\hat{D}_1\hat{D}_3(a) = -4B^{1,0}_{1,0} + 2B^{0,0}_{1,1},\\
&\hat{D}_1^2\hat{D}_2 = 8B^{1,0}_{1,0} - 4B^{0,1}_{2,0}\},\\
&B_{(2,-1)} = \{\hat{D}_1\hat{D}_2^2(a) = 4B^{0,2}_{1,0} - 4B^{1,1}_{0,0},\\
&\hat{D}_2\hat{D}_3(a) = 2B^{1,1}_{0,0} - 4B^{0,1}_{0,1}\},\\
&B_{(-2,1)} = \{\hat{D}_1\hat{D}_3(a) = 4B^{2,0}_{1,0} - 8B^{1,0}_{1,1},\\
&\hat{D}_1^2\hat{D}_2\hat{D}_3(a) = -8B^{2,0}_{1,0} + 4B^{1,1}_{2,0} + 8B^{1,0}_{1,1}\},\\
&B_{(1,-2)} = \{\hat{D}_2\hat{D}_3^2(a) = 8B^{1,1}_{0,1} - 4B^{0,1}_{0,2},\\
&\hat{D}_1\hat{D}_2^2\hat{D}_3(a) = 4B^{0,2}_{1,1} - 8B^{1,1}_{0,1}\},\\
&B_{(-1,-1)} = \{\hat{D}_1\hat{D}_2\hat{D}_3^2(a) = 8B^{1,1}_{1,1} - 8B^{2,0}_{0,1} + 4B^{1,0}_{0,2},\\
&\hat{D}_1^2\hat{D}_2^2\hat{D}_3(a) = -16B^{1,1}_{1,1} + 8B^{2,0}_{0,1}\},\\
&B_{(-3,0)} = \{\hat{D}_1^2\hat{D}_2\hat{D}_3^2(a) = -16B^{2,0}_{1,1}\},\\
&B_{(0,-3)} = \{\hat{D}_1\hat{D}_2^2\hat{D}_3^2(a) = -8B^{1,1}_{0,2}\},\\
&B_{(0,0)} = \{\hat{D}_3^2(a) = -8B^{1,0}_{0,1} + 2B^{2,0}_{0,0} + 2B^{0,0}_{0,2},\\
&\hat{D}_1\hat{D}_2\hat{D}_3(a) = 4B^{1,1}_{1,0} - 2B^{2,0}_{0,0} - 4B^{0,1}_{1,1} + 4B^{1,0}_{0,1},\\
&\hat{D}_1^2\hat{D}_2^2(a) = -16B^{1,1}_{1,0} + 4B^{2,0}_{0,0} + 4B^{0,2}_{2,0}\}.
\end{aligned}
$$

Отримали 27 рівнянь для 36 невідомих $B^{k,l}_{i,j}$. Інші 9 рівнянь знайдемо із наступних міркувань.

В sl_3-модулі $S^2(X)\cdot S^2(U)$ розглянемо молодші вектори

$$
\begin{aligned}
&v_1 = x_1u_1u = x_1u_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) =\\
&= x_1^2u_1^2 + x_1x_2u_1u_2 + x_1x_3u_1u_3,\\
&v_2 = u^2 = (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)^2.
\end{aligned}
$$

Тоді вектори

$$
\begin{aligned}
&\varphi(v_1) = B^{0,0}_{0,1} + B^{1,0}_{0,0} + B^{0,1}_{1,0},\\
&\varphi(v_2) = B^{2,0}_{0,0} + B^{0,2}_{2,0} + B^{0,0}_{0,2} + 2B^{1,1}_{1,0} + 2B^{1,0}_{0,1} + 2B^{0,1}_{1,1},
\end{aligned}
$$

будуть старшими векторами B_2^2 мультипорядків $[1,1]$ і $[0,0]$. Розмірність $\Gamma_{1,1}(\varphi(v_1))$ рівна 8 і розмірність $\Gamma_{0,0}(\varphi(v_2))$ рівна 1. Одномірні вагові підпростори $\Gamma_{1,1}(\varphi(v_1))$ породжуються такими елементами

$$
\begin{aligned}
&\varphi(v_1) = B^{0,0}_{0,1} + B^{1,0}_{0,0} + B^{0,1}_{1,0},\\
&\hat{D}_1(\varphi(v_1)) = B^{1,0}_{1,0} + B^{0,1}_{2,0} + B^{0,0}_{1,1},\\
&\hat{D}_1\hat{D}_3(\varphi(v_1)) = -B^{2,0}_{1,0} - B^{1,1}_{2,0} - B^{1,0}_{1,1},\\
&\hat{D}_2\hat{D}_3(\varphi(v_1)) = -B^{1,1}_{0,1} - B^{0,1}_{0,2} - B^{0,2}_{1,1},\\
&\hat{D}_1\hat{D}_2(\varphi(v_1)) = B^{2,0}_{0,0} - B^{0,2}_{2,0} - B^{0,1}_{1,1} + B^{1,0}_{0,1},\\
&\hat{D}_2(\varphi(v_1)) = -B^{1,1}_{0,0} - B^{0,1}_{0,1} - B^{0,2}_{1,0},\\
&\hat{D}_1\hat{D}_2\hat{D}_3(\varphi(v_1)) = B^{1,1}_{1,1} + B^{2,0}_{0,1} + B^{1,0}_{0,2},\\
&\hat{D}_3(\varphi(v_1)) = -B^{2,0}_{0,0} + B^{0,1}_{1,1} - B^{1,1}_{1,0} + B^{0,0}_{0,2}.
\end{aligned}
$$

Поклавши $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 0$ знайдемо необхідні 9 рівнянь. Роз'язавши в Maple отриману систему із 36 рівнянь знайдемо значення всіх 27 базисних елементів $B^{i,j}_{k,l}$. Отже, ми отримали реалізацію незвідного sl_3-модуля $B_2^2 \cong \Gamma_{2,2}$ в $\mathfrak{U}(sl_3)a$. Відповідний елемент Казиміра буде змішаним конкомітантом

$$
f := \Delta(B_2^2, S^2(X)\cdot S^2(U)) =
$$

$$
= \sum_{\substack{i+j\le 2\\ k+l\le 2}} \frac{2!2!B^{k\,l}_{i\,j}x_1^{2-(i+j)}x_2^ix_3^ju_3^{2-(k+l)}u_1^ku_2^l}{i!j!k!l!(2-(i+j))!(2-(k+l))!}.
$$

Обчисливши всі коєфіцієнти $B^{i,j}_{k,l}$ можна знайти явний вигляд f, який ми тут не подаємо в силу громіздскості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Grace J.H., Young A.* The Algebra of Invariants. – London, 1903.

2. *Gordan P.* Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen // Math.Ann.I. – 1869. – **1.** – P.57-89.

3. *Noether E.* Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form // J. für Math. – 1908. – **134**. – P.23-90.

4. *Glenn O. E.* Treatise on theory of invariants. – Boston,1915.

5. *Спрингер Т.* Теория инвариантов.–М.: Мир,1981.–192 с.

6. *Fulton W., Harris J.* Reptesemation theory: a first course, 1991.

7. *Humphreys J.* Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,1978.