УДК 517.956

©2007 р. Н.М.Шевчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Побудовані наближені розв'язки еволюційного рівняння гіперболічного типу з виродженням, дається оцінка похибки наближення.

The constructed approximate solutions of the evolutional equation of the hyperbolic type with degeneracy, the estimate of the error of the approximation is given.

Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння гіперболічного типу

$$u''(t) + t^\alpha Au(t) = 0, \quad \alpha \geq 0, t \in [0, T],$$

$$u(0) = f, u'(0) = g, \tag{1}$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі. У праці А.В.Бабина [1] методом теорії вагового наближення функцій на півосі одержано зображення розв'язку задачі Коші (1) у випадку $\alpha = 0$, $g = 0$, у вигляді $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t, A)f$, де $P_n(t, \lambda)$ – поліном степеня n (при фіксованому t). У припущенні, що вектор f належить до області визначення оператора $\operatorname{ch}\sqrt{A}$, за шукані поліноми у вказаній праці беруться поліноми, які наближають функцію $\cos t\sqrt{\lambda}$ на півосі з вагою $\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}$. При цьому дається оцінка швидкості збіжності: похибка $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t)-P_n(t, A)f\|$ спадає як $\exp\{-\delta n\}$, $\delta > 0$.

У книзі [2] пропонується інший метод побудови поліномів P_n, який базується на наближенні функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Лагерра, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0, \infty), \lambda^\alpha \exp(-\mu\lambda))$, де $\alpha > -1$, а $\mu > 0$ – число, залежне від вектора f. Цей метод дає точнішу, ніж у праці [1], оцінку відхилення, але у вужчому класі початкових даних.

У даній роботі будуються наближені розв'язки задачі Коші для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t^\alpha \varphi(A)u = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega,$$

$$u(0, x) = f(x), u'_x(0, x) = g(x),$$

де $\varphi(A)$ – деяка функція гармонійного осцилятора – оператора $A = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$. При цьому відповідні наближення є рівномірними по $(t, x) \in \Omega$. Основою проведених досліджень є методика, розроблена в [2].

1. Простори типу S. І.М.Гельфанд і Г.Є.Шилов ввели в [3] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності і зростання похідних із збільшенням порядку. Ці умови задаються за допомогою нерівностей

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}, \quad x \in \mathbb{R}, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $\{c_{km}\}$ – деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватись довільним чином разом з функцією φ), то маємо, очевидно, простір Л.Шварца швидко спадних функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільних α, $\beta \geq 0$ покладемо

$$S_{\alpha}^{\beta}(\mathbb{R}) \equiv S_{\alpha}^{\beta} := \{\varphi \in S | \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0$$

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_{+} \ \forall x \in \mathbb{R}: \ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq$$

$$\leq c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [3].

Простори S_{α}^{β} нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_{α}^{β} складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$$c > 0, a > 0, b > 0.$$

Простір S Л.Шварца формально відповідає символу S_{∞}^{∞}. У книзі [4] доведено, що $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \geq 1$, де A – гармонійний осцилятор, тобто оператор, породжений в $L_2(\mathbb{R})$ диференціальним виразом $-\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$, $G_{\{\beta\}}(A)$ – клас Жевре порядку β оператора A, тобто

$$G_{\{\beta\}}(A) = \{\varphi \in S \Big| \exists c, B > 0 \, \forall n \in \mathbb{Z}_{+}:$$

$$\|A^n \varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c B^n n^{n\beta}\}.$$

Ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$ утворюють функції Ерміта $h_n(x) = e^{-x^2/2} \hat{H}_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_{+}$, $x \in \mathbb{R}$, де $\hat{H}_n$ – ортонормовані многочлени Ерміта, тобто

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_{+}, x \in \mathbb{R}.$$

Функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_{+}$, є власними функціями оператора A, а $\lambda_k = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_{+}$ – його власними числами. Тоді, як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, елементи просторів S, S_{β}^{β}, $\beta \geq 1/2$, можна охарактеризувати за допомогою їхніх коефіцієнтів Фур'є за базисом $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_{+}\}$ так [4].

Якщо $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, $c_k = (f, h_k)_{L_2(\mathbb{R})}$ – коефіцієнти Фур'є-Ерміта, то правильними є наступні співвідношення еквівалентності:

а) $(f \in S) \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{N} \ \exists c = c(m) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_{+}$: $|c_k| \leq c(2k+1)^{-m})$;

б) $(f \in S_{\beta}^{\beta}) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_{+}$: $|c_k| \leq c \exp\{-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\})$.

Відомо [4], що якщо $\varphi \in S$, то A^n, $n \in \mathbb{N}$, де A – гармонійний осцилятор, діє на φ за правилом

$$(A^n \varphi)(x) = \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} c_{p,q}^{(n)} x^p \varphi^{(q)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

при цьому коефіцієнти $c_{p,q}^{(n)}$ задовольняють нерівність

$$|c_{p,q}^n| \leq 10^n n^{n - \frac{1}{2}(p+q)}.$$

Символом $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{C})$ позначимо сукупність аналітичних продовжень функцій φ з простору $S_{1/2}^{1/2}$ у комплексну площину, при цьому кожне з таких продовжень задовольняє нерівність

$$|\varphi(z)| \equiv |\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-a|x|^2 + b|y|^2\},$$

$$c > 0, a > 0, b > 0.$$

Оскільки у просторах $S_{1/2}^{1/2}$, $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{C})$ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну та диференціювання, то оператор A^n є неперервним у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ та у просторі $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{C})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ – деяка ціла функція. Говоритимемо, що *в просторі* $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{C})$ *задано оператор* $f(A) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n A^n$, *якщо для довільної основної функції* $\varphi \in S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{C})$ *ряд*

$$\psi(z) = (f(A)\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (A^n \varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{C})$.

Символом $\tilde{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$ позначимо сукупність тих функцій $\varphi \in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$, коефіцієнти Фур'є-Ерміта яких задовольняють умову б) з параметром $\mu \geq \sqrt{e}$.

У праці [5] доведено, що якщо ціла функція f задовольняє умову

$$\exists d > 0 \ \exists q \in (0,1) \ \forall z = x+iy : \ |f(z)| \leq de^{q|z|},$$

то у просторі $\tilde{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$ визначений і є неперервним оператор $f(A)$, який неперервно відображає $\tilde{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$ в $\tilde{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$.

Наприклад, в $\tilde{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$ визначений і є неперервним оператор

$$e^{qA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n A^n}{n!}, \quad q \in (0,1),$$

де A – гармонійний осцилятор. Якщо посилити умову на цілу функцію f, а саме, вважати, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall z = x+iy \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|z|},$$

то оператор $f(A)$ буде вже визначений на просторі $S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$ і відображатиме неперервно цей простір в себе. Надалі вважатимемо, що функція f задовольняє останню умову.

Звуження оператора $f(A)$ на простір $S^{1/2}_{1/2} \equiv S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R})$ позначатимемо символом A_f. Вважатимемо також, що на дійсній вісі функція f додатково задовольняє умову

$$\exists d_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq d_0|x|.$$

2. Наближені розв'язки задачі Коші для рівняння гіперболічного типу з виродженням. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + t^\alpha A_f u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \qquad (2)$$

де $\alpha > 0$ – фіксований параметр, A_f – оператор, побудований за функцією f.

Під розв'язком рівняння (2) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(t,\cdot) \in S^{1/2}_{1/2}$ при кожному $t \in [0,T]$;

2) $u(\cdot,x)$ двічі диференційвона по t при кожному $x \in \mathbb{R}$;

3) u задовольняє рівняння (2).

Відомо [6], що фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$\omega'' + bt^\alpha \omega = 0$$

($b > 0$ – число) утворюють функції

$$G_1(t,b,\alpha) \equiv G_1(t,b) = \pi\tau^\tau b^{\tau/2} t^{1/2} \times$$
$$\times (\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1} J_{-\tau}(2\tau b^{1/2} t^{1/(2\tau)}),$$
$$G_2(t,b,\alpha) \equiv G_2(t,b) = \Gamma(\tau)\tau^{1-\tau} t^{1/2} b^{-\tau/2} \times$$
$$\times J_\tau(2\tau b^{1/2} t^{1/(2\tau)}),$$

де $\tau = (\alpha+2)^{-1}$, $\Gamma(\cdot)$ – гама-функція, $J_\omega(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду порядку ω, $\omega \in \{-\tau, \tau\}$. Зазначимо, що $G_1(t,b,0) = \cos t\sqrt{b}$, $G_2(t,b,0) = b^{-1/2}\sin(t\sqrt{b})$.

Звідси випливає, що функція

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (G_1(t,\lambda_k)c_k(g) +$$
$$+ G_2(t,\lambda_k)c_k(\gamma))h_k(x),$$

де

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)h_k \in S^{1/2}_{1/2},$$
$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\gamma)h_k \in S^{1/2}_{1/2},$$
$$c_k(g) = (g,h_k), \quad c_k(\gamma) = (\gamma,h_k),$$
$$\lambda_k = f(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

є розв'язком рівняння (2), тобто розв'язком, який задовольняє початкові умови

$$u(0,x) = g(x), \quad u'_x(0,x) = \gamma(x). \qquad (3)$$

Функції $G_1(t,\lambda)$, $G_2(t,\lambda)$, $\lambda > 0$, за допомогою яких зображається розв'язок задачі Коші (2), (3), мають складну структуру. Виявляється, що ці функції допускають розвинення в ряди Фур'є за ортонормованими многочленами Чебишова-Лагерра, тобто в кожній точці $\lambda \in (0,\infty)$ правильними є співвідношення $G_i(t,\lambda) = \lim_{n\to\infty} P_n^{(i)}(t,\lambda)$,

$i \in \{1,2\}$, де $P_n^{(i)}(t,\lambda)$ – частинні суми рядів Фур'є функцій $G_i(t,\lambda)$ (при фіксованому $t>0$). Отже, можна говорити про наближені розв'язки задачі Коші (2), (3) у певному розумінні. Для того, щоб сформулювати відповідні твердження, наведемо основні означення, які стосуються поліномів Чебишова-Лагерра.

Узагальнені многочлени Лагерра. Символом $\hat{L}_{\omega,\mu,n}(\lambda)$ ($\lambda \in (0,\infty)$, $\omega > -1$, $\mu > 0$; ω, μ – фіксовані параметри) домовимося позначати узагальнені многочлени Лагерра, які утворюють ортонормований базис у гільбертовому просторі $L_2((0,\infty), \lambda^\omega \exp(-\mu\lambda))$. Легко переконатися в тому, що

$$\hat{L}_{\omega,\mu,n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1+\omega}}\hat{L}_{\omega,1,n}(\lambda), \tag{4}$$

де $\hat{L}_{\omega,1,n}$ – многочлени, ортонормовані з вагою $\lambda^\omega \exp(-\lambda)$, $\lambda > 0$. Врахувавши (4) та формулу Родріга для многочленів $\hat{L}_{\omega,1,n}$ (див. [7]) дістаємо, що

$$\hat{L}_{\omega,\mu,n}(\lambda) = \frac{(-1)^n\sqrt{\mu^{1+\omega}}}{\sqrt{n!\Gamma(n+\omega+1)}}(\mu\lambda)^{-\omega}e^{\mu\lambda}\times$$

$$\times[(\mu\lambda)^{\omega+n}e^{-\mu\lambda}]^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

За системою многочленів $\hat{L}_{\omega,\mu,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, як і за довільною іншою ортонормованою системою, можна будувати ряди Фур'є. Нехай функція $\varphi \in L_2((0,\infty), \lambda^\omega \exp(-\mu\lambda))$. Зіставимо цій функції у відповідність ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega,\mu)\hat{L}_{\omega,\mu,n}(\lambda), \tag{5}$$

коефіцієнти якого визначаються формулою

$$a_n(\omega,\mu) = \int_0^\infty \lambda^\omega e^{-\mu\lambda}\varphi(\lambda)\hat{L}_{\omega,\mu,n}(\lambda)d\lambda.$$

Ряд (5) завжди збігається до функції φ за нормою простору $L_2((0,\infty), \lambda^\omega \exp(-\mu\lambda))$.

Умови збіжності ряду (5) до функції φ у точці $\lambda \in (0,\infty)$ є такими [7]:

1) якщо $\omega > 0$, а функція $\varphi \in L_1((0,\infty), \lambda^\omega \exp(-\mu\lambda))$ в околі фіксованої точки $\lambda \in (0,\infty)$ задовольняє умову Ліпшиця і, крім того, існують інтеграли

$$\int_0^1 \lambda^{\omega/2-1/4}|\varphi(\lambda)|d\lambda, \int_1^\infty \lambda^{\omega/2+1/2}e^{-\mu\lambda/2}|\varphi(\lambda)|d\lambda,$$

то ряд Фур'є за многочленами $\hat{L}_{\omega,\mu,n}$ функції φ збігається до цієї функції у точці λ, тобто

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega,\mu)\hat{L}_{\omega,\mu,n}(\lambda); \tag{6}$$

2) якщо $-1 \le \omega \le 0$, а функція $\varphi \in L_1((0,\infty), \lambda^\omega \exp(-\mu\lambda))$ в околі точки λ задовольняє умову Ліпшиця і існують інтеграли

$$\int_0^1 \lambda^{\omega/2-3/4}|\varphi(\lambda)|d\lambda, \int_1^\infty \lambda^{\omega/2}e^{-\mu\lambda/2}|\varphi(\lambda)|d\lambda,$$

то правильною є формула (6).

Відомо [7], що розвинення функції

$$F(\lambda) = (\lambda a)^{-\omega/2}J_\omega(2\sqrt{\lambda a}),$$

$$\lambda \in (0,\infty), a > 0, \omega > -1,$$

в ряд Фур'є за многочленами $\hat{L}_{\omega,1,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, має вигляд

$$F(\lambda) = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k!\Gamma(k+\omega+1)}}\hat{L}_{\omega,1,k}(\lambda).$$

Звідси дістаємо, що

$$F(\mu\lambda) = \frac{e^{-a}}{\sqrt{\mu^{1+\omega}}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k!\Gamma(k+\omega+1)}}\hat{L}_{\omega,\mu,k}(\lambda), \tag{7}$$

де $\mu > 0$ – фіксований параметр. Поклавши в (7) $\omega = -\tau$, $\sqrt{\mu a} = \tau t^{1/(2\tau)}$ одержимо, що функція $G_1(t,\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є за многочленами $\hat{L}_{-\tau,\mu,k}$ і це розвинення має вигляд

$$G_1(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,\mu,\alpha)\hat{L}_{-\tau,\mu,k}(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

де

$$a_k(t,\mu,\alpha) = \frac{\pi e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\Gamma(\tau)\sin\pi\tau\sqrt{\mu^{1-\tau}k!\Gamma(k-\tau+1)}},$$

$$\delta = \frac{t^{\alpha+2}}{\mu(\alpha+2)^2}.$$

Аналогічно знаходимо, що функція $G_2(t,\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є за многочленами $\hat{L}_{\tau,\mu,k}$ і цей розклад зображається формулою

$$G_2(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,\mu,\alpha)\hat{L}_{\tau,\mu,k}(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

де

$$b_k(t,\mu,\alpha) = \frac{t\tau\Gamma(\tau)e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\sqrt{\mu^{1+\tau}k!\Gamma(k+\tau+1)}}.$$

Позначимо через $P^{(1)}_{\mu,t,n}$, $P^{(2)}_{\mu,t,n}$ n-і частинні суми рядів Фур'є функцій G_1, G_2 за многочленами $\hat{L}_{-\tau,\mu,k}$, $\hat{L}_{\tau,\mu,k}$ відповідно; при цьому $P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda) \to G_1(t,\lambda)$, $P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda) \to G_2(t,\lambda)$, $n \to \infty$, у кожній точці $\lambda \in (0,\infty)$ [7].

Символом $G_{\{\beta\}}(A_f)$, $\beta \geq 1$, позначимо сукупність тих функцій f з простору $S^{\beta/2}_{\beta/2}$, які задовольняють умову

$$\exists\mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(f)| \leq ce^{-\mu\lambda_k^{1/\beta}},$$

$$\lambda_k = f(2k+1), k \in \mathbb{Z}_+.$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ *– розв'язок задачі Коші (2), (3). Якщо* $\{g,\gamma\} \subset G_{\{1\}}(A_f) \subset G_{\{1\}}(A) = S^{1/2}_{1/2}$, *то*

$$\forall T > 0 \ \exists c_1 = c_1(g,\gamma) > 0 \ \exists\mu_1 = \mu_1(g,\gamma) > 0$$

$$\exists L = L(T) > 0 : \ \sup_{(t,x)\in\Omega} |u(t,x)-$$

$$-u_n^{(1)}(t,x) - u_n^{(2)}(t,x)| \leq c_1\frac{L^{n+1}}{(n+1)!},$$

де

$$u_n^{(1)}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda_k)c_k(g)h_k(x),$$

$$u_n^{(2)}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda_k)c_k(\gamma)h_k(x),$$

$$\lambda_k = f(2k+1), k \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведення. Для спрощення викладок припустимо, що $\gamma = 0$, тобто

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_1(t,\lambda_k)c_k(g)h_k(x).$$

Оскільки $g \in G_{\{1\}}(A_f)$, то

$$\exists\mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(g)| \leq ce^{-\mu\lambda_k}.$$

Покладемо $\mu_1 = \dfrac{\mu}{2}$. Тоді

$$u_n^{(1)}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda_k)c_k(g)h_k(x)$$

і

$$|u(t,x) - u_n^{(1)}(t,x)| = |\sum_{k=0}^{\infty}(G_1(t,\lambda_k)-$$

$$-P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda_k))c_k(g)h_k(x)| \leq$$

$$\leq c\sum_{k=0}^{\infty}|G_1(t,\lambda_k) - P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda_k)|e^{-\mu\lambda_k} =$$

$$= c\sum_{k=0}^{\infty}|G_1(t,\lambda_k) - P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda_k)|e^{-\mu_1\lambda_k}\cdot e^{-\mu_1\lambda_k}.$$

Тут врахована нерівність $|h_k(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки $P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda) \to G_1(t,\lambda)$ при $n \to \infty$ у кожній точці $\lambda \in (0,+\infty)$, то, взявши до уваги вигляд полінома $P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda)$ одержимо, що

$$e^{-\mu_1\lambda_k}|G_1(t,\lambda_k) - P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda_k)| =$$

$$= e^{-\mu_1\lambda_k}\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(t,\mu_1,\alpha)\hat{L}_{-\tau,\mu_1,j}(\lambda_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty}|a_j(t,\mu_1,\alpha)|e^{-\mu_1\lambda_k}|\hat{L}_{-\tau,\mu_1,j}(\lambda_k)|.$$

Для здійснення оцінки виразу $\exp(-\mu_1\lambda_k)|\hat{L}_{-\tau,\mu_1,j}(\lambda_k)|$ скористаємось такою нерівністю з [8]:

$$e^{-\lambda/2}|L_{\omega,1,j}(\lambda)| \leq \frac{1}{\Gamma(\omega+1)}\left(\frac{\Gamma(j+\omega+1)}{j!}\right)^{1/2},$$

$$\omega > -1, j \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in (0, \infty). \qquad (8)$$

Оскільки

$$\hat{L}_{-\tau,\mu_1,j}(\lambda) = \sqrt{\mu_1^{1-\tau}}\hat{L}_{-\tau,1,j}(\mu_1\lambda),$$

то, згідно з (8),

$$e^{-\mu_1\lambda_k}|\hat{L}_{-\tau,\mu_1,j}(\lambda_k)| \leq \frac{\sqrt{\mu_1^{1-\tau}}}{\Gamma(1-\tau)}\times$$

$$\times\left(\frac{\Gamma(j-\tau+1)}{j!}\right)^{1/2}.$$

Отже,

$$e^{-\mu_1\lambda_k}|G_1(t,\lambda_k) - P^{(1)}_{\mu_1,t,n}(\lambda_k)| \leq$$

$$\leq \frac{\pi e^{-\delta}}{|\Gamma(\tau)\Gamma(1-\tau)\sin\pi\tau|}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\delta^j}{j!} \leq$$

$$\leq \frac{e^{-\delta}\delta^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\delta^j}{j!} = \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{L^{n+1}}{(n+1)!},$$

де $L = T^{\alpha+2}/(\mu_1(\alpha+2))^2$. Таким чином,

$$|u(t,x) - u_n^{(1)}(t,x)| \leq c\frac{L^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\mu_1\lambda_k} \leq$$

$$\leq c\frac{L^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\mu_1 d_0(2k+1)} = c_1\frac{L^{n+1}}{(n+1)!},$$

де

$$c_1 = ce^{-\mu_1 d_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{2\mu_1 d_0}}\right)^k = c\frac{e^{\mu_1 d_0}}{e^{2\mu_1 d_0}-1}.$$

Сталі c_1, L не залежать від t та x. Теорема доведена.

Якщо початкові функції g, γ брати з ширшого, ніж $G_{\{1\}}(A_f)$ класу, а саме, з класу $G_{\{\beta\}}(A_f)$, де $\beta > 1$, то виявляється, що і в цьому випадку можна знайти наближені розв'язки задачі Коші (2), (3) і оцінити похибку відхилення $\sup\limits_{(t,x)\in\Omega}|u(t,x) - u_n(t,x)|$. Для того, щоб сформулювати основні твердження, нам потрібний буде наступний допоміжний результат.

Лема 1. *Нехай $\mu > 0$, $1 < \beta < 2$ – фіксовані параметри. Тоді правильними є наступні нерівності:*

$$\sup_{\lambda\geq 0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\hat{L}_{-\tau,1,n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \omega_0 L_0^n(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}n^{n(\beta-2)}, \qquad (9)$$

$$\sup_{\lambda\geq 0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\hat{L}_{\tau,1,n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \omega_1 L_0^n(n!\Gamma(n+\tau+1))^{1/2}n^{n(\beta-2)}, \qquad (10)$$

де $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\omega_0 = \max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}e^{2\tau}\},$$

$$L_0 = e + \beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta}$$

$$\omega_1 = \max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1+\tau)^{-}e^{-\tau}\}.$$

Доведення. Спершу зауважимо, що оскільки $1/\beta < 1$, то скористатися відомими асимптотичними властивостями многочленів Лагерра не можна. Для того, щоб одержати потрібні оцінки, використаємо наступне зображення многочленів $\hat{L}_{\nu,1,n}$ [8]:

$$\hat{L}_{\nu,1,n}(\lambda) = (-1)^n\frac{(n!\Gamma(n+\nu+1))^{1/2}}{n!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(k+\nu+1)}, \nu \in \{-\tau, \tau\}.$$

Нехай $\nu = -\tau$. Тоді

$$\varphi(n) \equiv \sup_{\lambda\geq 0}(\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})|\hat{L}_{-\tau,1,n}(\lambda)|) \leq$$

$$\leq \frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k}{\Gamma(k-\tau+1)}\sup_{\lambda\geq 0}((-\lambda)^k e^{-\mu\lambda^{1/\beta}})\right).$$

Урахувавши формулу Стірлінга

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi}\lambda^{\lambda+1/2}\exp(-\lambda+\theta/(12\lambda)),$$

$$0 < \theta < 1, \lambda > 0,$$

та співвідношення

$$\sup_{\lambda\geq 0}(\lambda^k\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})) = (\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^k k^{k\beta},$$

знайдемо, що

$$\varphi(n) \leq \frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!\Gamma(1-\tau)}+$$

$$+\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^k}{\Gamma(k-\tau+1)}k^{k\beta} \leq$$

$$\leq (n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)}+\frac{1}{2\pi}e^{n+\tau}\times\right.$$

$$\left.\times n^{n(\beta-2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^k}{e^k(1-\tau/k)^k(1-\tau/k)^{-\tau+1/2}}\right).$$

Оскільки

$$(1-\tau/k)^{-\tau+1/2} \geq (1-\tau)^{-\tau+1/2},$$

$$(1-\tau/k)^k \geq e^{-\tau}, \quad \forall k \geq 1,$$

то

$$\varphi(n) \leq (n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{n+2\tau}n^{n(\beta-2)}}{2\pi(1-\tau)^{1/2-\tau}}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-(1+\beta)})^k\right).$$

Покладемо

$$\omega_0 = \max\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\times$$

$$\times\exp(2\tau)\}.$$

Тоді

$$\varphi(n) \leq \omega_0(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}n^{n(\beta-2)}e^n\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-(1+\beta)})^k \leq$$

$$\leq \omega_0(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}n^{n(\beta-2)}(e+\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta})^n,$$

що й потрібно було довести.

Нерівність (10) доводиться аналогічно.

Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ – розв'язок задачі Коші (2), (3). Якщо $\{g,\gamma\} \subset G_{\{\beta\}}(A_f) \subset G_{\{\beta\}}(A) = S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $1 < \beta < 2$, то*

$$\forall T > 0 \ \exists c = c(g,\gamma,T,\alpha,\beta) > 0$$

$$\exists L = L(g,\gamma,T,\alpha,\beta) > 0: \sup_{(t,x)\in\Omega}|u(t,x)-$$

$$-\tilde{u}_n^{(1)}(t,x)-\tilde{u}_n^{(2)}(t,x)| \leq cL^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$\tilde{u}_n^{(1)}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}P_{1,t,n}^{(1)}(\lambda_k)c_k(g)h_k(x),$$

$$\tilde{u}_n^{(2)}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}P_{1,t,n}^{(2)}(\lambda_k)c_k(\gamma)h_k(x),$$

$$\lambda_k = f(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}+.$$

Доведення. Оскільки $\{g,\gamma\} \subset G_{\{\beta\}}(A_f)$, то

$$\exists\mu_1 > 0\exists c_1 > 0\forall k \in \mathbb{Z}_+: \ |c_k(g)| \leq c_1e^{-\mu_1\lambda_k^{1/\beta}},$$

$$\exists\mu_2 > 0\exists c_2 > 0\forall k \in \mathbb{Z}_+: \ |c_k(\gamma)| \leq c_2e^{-\mu_2\lambda_k^{1/\beta}}.$$

Нехай $\mu = \min\{\mu_1,\mu_2\}$, $\tilde{c} = \max\{c_1,c_2\}$. Тоді

$$|u(t,x)-\tilde{u}_n^{(1)}(t,x)-\tilde{u}_n^{(2)}(t,x)| \leq$$

$$\leq \tilde{c}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_1(t,n,\lambda_k)\exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_2(t,n,\lambda_k)\exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big)\right),$$

де

$$\varphi_1(t,n,\lambda_k) = |G_1(t,\lambda_k)-P_{1,t,n}^{(1)}(\lambda_k)|\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big)$$

$$\varphi_2(t,n,\lambda_k) = |G_2(t,\lambda_k)-P_{1,t,n}^{(2)}(\lambda_k)|\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big).$$

Урахувавши вигляд полінома $P_{1,t,n}^{(1)}$, а також нерівність (9) знайдемо, що

$$\sup_{t\in[0,T]}\varphi_1(t,n,\lambda_k) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty}|a_j(t,1,\alpha)|\times$$

$$\times\sup_{\lambda\geq 0}\Big(\exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda^{1/\beta}\Big)|\hat{L}_{-\tau,1,n}(\lambda)|\Big) \leq$$

$$\leq c_1\sum_{j=n+1}^{\infty}(BL_0)^jj^{j(\beta-2)} \leq c_2(BL_0)^{n+1}\times$$

$$\times(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_2 = c_1 \sum_{j=1}^{\infty} (BL_0)^{j-1} j^{(j-1)(\beta-2)} < \infty,$$

$$c_1 = \tilde{c}\pi\omega_0(\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1},$$

$$L_0 = e + \beta^\beta \Big(\frac{\mu}{2}\Big)^{-\beta} e^{-\beta}, B = T^{\alpha+2}(\alpha+2)^{-2}.$$

Далі, скориставшись нерівністю (10) знайдемо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \varphi_2(t,n,\lambda_k) \le c_3(BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_3 = \tilde{c}\omega_1 T\tau\Gamma(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} (BL_0)^{j-1} j^{(j-1)(\beta-2)} < \infty.$$

Отже,

$$\sup_{(t,x)\in\Omega} |u(t,x) - \tilde{u}_n^{(1)}(t,x) - \tilde{u}_n^{(2)}(t,x)| \le cL^{n+1}\times$$

$$\times(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$L = BL_0, c = (c_2+c_3)\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big) < \infty.$$

Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ *– розв'язок задачі Коші (2), (3). Якщо* $\{g,\gamma\} \subset G_{\{2\}}(A_f) \subset G_{\{2\}}(A) = S_1^1$, *то*

$$\forall T > 0 \;\; \exists T_1 = T_1(g,\gamma,\alpha) \le T$$

$$\exists c = c(g,\gamma,T,\alpha) > 0 \;\; \exists \rho = \rho(g,\gamma,T,\alpha) < 1 :$$

$$\sup_{\substack{t\in[0,T_1]\\ x\in\mathbb{R}}} |u(t,x) - \tilde{u}_n^{(1)}(t,x) - \tilde{u}_n^{(2)}(t,x)| \le$$

$$\le c\rho^{n+1}. \qquad (11)$$

Доведення. Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 2. Тому, використовуючи позначення, які були введені раніше (див. доведення теореми 2) знайдемо, що

$$\sup_{t\in[0,T_1]} \varphi_1(t,n,\lambda_k) \le c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (B_0L_0)^k, \quad n \ge 1$$

де

$$c_1 = \pi\omega_0(\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1}, \quad B_0 = \tau T^{1/\tau},$$

$$L_0 = e + 4e^{-2}\Big(\frac{\mu}{2}\Big)^{-2}.$$

Вказана оцінка має зміст, якщо $B_0L_0 < 1$, тобто

$$T < T_0 \equiv \Big(\frac{\mu}{2}e\Big)^{2\tau} \tau^{-\tau} \bigg(\Big(\frac{\mu}{2}\Big)^2 e^3 + 4\bigg)^{-\tau}.$$

Отже, якщо $T < T_0$, то покладемо $T_1 = T$; якщо ж $T \ge T_0$, то візьмемо $T_1 < T_0$. Зафіксувавши тепер таке T_1 знайдемо, що

$$\sup_{t\in[0,T_1]} \varphi_1(t,n,\lambda_k) \le c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k = c_2' \cdot \rho^{n+1},$$

де $\rho = B_0L_0 < 1$, $c_2' = c_1(1-\rho)^{-1}$. Далі, для того ж значення T_1 маємо:

$$\sup_{t\in[0,T_1]} \varphi_2(t,n,\lambda_k) \le c_3'\rho^{n+1}, \quad \rho = B_0L_0 < 1,$$

де $c_3' = \omega_1 T_1\tau\Gamma(\tau)(1-\rho)^{-1}$. Звідси вже випливає нерівність (11), де

$$c = (c_2' + c_3')\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{\mu}{2}\lambda_k^{1/2}\Big) < \infty.$$

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабин А.В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // Матем. сб. – 1984. – Т. 123, № 2. – С. 147 – 174.
2. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. - М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
4. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Гома Н.М., Городецький В.В.* Еволюційні рівняння з гармонійним осцилятором у просторах типу S та S' // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 13 – 25.

6. *Вайнерман Л.И.* Гиперболические уравнения с вырождением в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. – 1977. – Т. 18, № 4. – С. 736 – 746.
7. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – С.: Наука, 1976. – 328 с.
8. *Сёге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.