УДК 517.3

©2007 р. О.Г. Фотій

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НЕПЕРЕРВНІСТЮ ЗВЕРХУ І ЗНИЗУ, H^+-НЕПЕРЕРВНІСТЮ І H^--НЕПЕРЕРВНІСТЮ

Досліджено зв'язки між неперервністю зверху, знизу, H^+-неперервністю і H^--неперервністю для компактнозначних і замкненозначних відображень. Зокрема, побудовано замкненозначні H-неперервні відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які не є неперервними зверху скрізь, але є поточковими границями неперервних і H-неперервних замкненозначних відображень $F_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в метриці Гаусдорфа або в топології Віторіса.

The relations between upper continuity, lower continuity, H^+-continuity and H^--continuity for compact-valued and closed-valued mappings are investigated. Besides, we construct a closed-valued H-continuous mappings $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which are not everywhere upper continuous but are pointwise H-limits of continuous and H-continuous closed-valued mappings $F_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Hausdorff metric or in Vietoris topology.

1. В теорії многозначних відображень існує багато різновидів неперервності: неперервність зверху чи знизу, неперервність, H-неперервність, тощо. Добре відомо [1, с. 62], що неперервність компактнозначного відображення $F\colon X \to Y$ рівносильна його H-неперервності, тобто неперервності F як однозначного відображення зі значеннями у метричному просторі $(\mathcal{K}(Y), h)$, де $\mathcal{K}(Y)$ – сукупність всіх непорожніх компактних підмножин простору Y, а h – метрика Гаусдорфа. Функція h є метрикою і на сукупності $\mathcal{F}(Y)$ всіх непорожніх замкнених множин в Y. Тому природньо виникає питання: чи буде неперервність еквівалентна H-неперервності і для замкнених відображень?

В цій статті ми подаємо теореми про зв'язки між неперервністю зверху і H^+-неперервністю, а також неперервністю знизу і H^--неперервністю, які уточнюють відповідні результати з праці [1] (див. [1, с. 62]). Крім того, ми наводимо ряд прикладів, які показують, що умова компактності в отриманих результатах істотна. Більш того, ми подаємо два методи побудови замкненозначних H-неперервних відображень $F\colon X \to \mathbb{R}$, які в жодній точці простору X не є неперервними зверху.

Метрика Гаусдорфа дозволяє перенести деякі теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних однозначних функцій на многозначний випадок. Зокрема, з еквівалентності неперервності і H-неперервності та однієї теореми Калбрі-Труалліка [2] випливає, що для нарізно неперервного компактнозначного відображення $F\colon X \times Y \to Z$ будемо мати: а) множина $C_y(F) = \{x \in X : (x, y) \in C(F)\}$ є залишковою в X, якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності; б) множина $C_Y(F) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(F)\}$ є залишковою в X, якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності (тут X– топологічний простір, Z – метричний простір і $C(F)$ – множина точок сукупної неперервності відображення F).

Постає природне питання: чи вірний отриманий результат для замкненозначних відображень? Як перший крок до розв'язання цієї проблеми ми наводимо приклади послідовностей неперервних замкненозначних відображень $F_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які поточково збігаються до скрізь розривного замкненозначного відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у метриці Гаусдорфа або в топології Віторіса.

2. Нагадаємо означення основних понять. Нехай X і Y – топологічні простори і $x_0 \in X$. Нагадаємо, що многозначне відображення

$F\colon X \to Y$ називається *неперервним зверху /знизу/ в точці* x_0, якщо для кожної відкритої в Y множини V, такої, що $F(x_0) \subseteq V$ / $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$/ існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $F(x) \subseteq V$ /$F(x) \cap V \neq \emptyset$/ для кожного x з U. Кажуть, що відображення F *неперервне в точці* x_0, якщо воно одночасно є неперервним зверху і знизу в цій точці. Відображення F називається *неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці простору X.

Нехай (Y, d) – метричний простір і A – непорожня підмножина простору Y. Множина $V_\varepsilon(A) = \{y : d(y, A) < \varepsilon\}$ називається *відкритим ε-околом множини A в Y*, а множина $V_\varepsilon(A) = \{y : d(y, A) \leq \varepsilon\}$ називається *замкненим ε-околом множини A в Y*. Якщо $A = K$ – компактна множина в Y і множина V відкрита в Y, така, що $K \subseteq V$, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що $V_\varepsilon(K) \subseteq V$. Справді, нехай $x \in K$. Тоді $x \in U$ і існує $\varepsilon_x > 0$ таке, що $U_{2\varepsilon_x}(x) \subseteq U$. Покладемо $U_x = U_{\varepsilon_x}(x)$. Система $\{U_x : x \in K\}$ – відкрите покриття компактної множини K. Тому існує скінченна кількість точок $x_1, ..., x_n \in K$ таких, що $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Візьмемо $\varepsilon = min\{\varepsilon_{x_1}, ..., \varepsilon_{x_n}\} > 0$. Покажемо, що $U_\varepsilon(K) \subseteq U$. Нехай $x_0 \in U_\varepsilon(K)$. Тоді $d(x_0, K) < \varepsilon$, отже, існує точка $u \in K$ така, що $d(x_0, u) < \varepsilon$. Оскільки $u \in K$, то існує номер $i = 1, ..., n$ такий, що $u \in U_{x_i}$, тобто $d(u, x_i) < \varepsilon_{x_i}$. Тоді $d(x_0, x_i) \leq d(x_0, u) + d(u, x_i) < \varepsilon + \varepsilon_{x_i} \leq \varepsilon_{x_i} + \varepsilon_{x_i} = 2\varepsilon_{x_i}$, тобто $x_0 \in U_{2\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq U$. Отже, $V_\varepsilon(K) \subseteq V$.

Нехай A, B – непорожні підмножини простору Y. Покладемо $h^+(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : V_\varepsilon(A) \supseteq B\}$ і $h^-(A, B) = h^+(B, A)$.

Нехай $A, B \in \mathcal{F}(Y)$, де $\mathcal{F}(Y)$ сукупність всіх непорожніх замкнених множин в Y. Легко перевірити, що рівністю $h(A, B) = \max\{h^+(A, B), h^-(A, B)\}$ визначається метрика на $\mathcal{F}(Y)$, яка називається *метрикою Гаусдорфа*.

Нехай X – топологічний простір, (Y, d) – метричний простір і $x_0 \in X$. Відображення $F\colon X \to Y$ назвемо *H^+-неперервним / H^--неперервним/ в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $h^+(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$ /$h^-(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$/ для кожного x з U. Легко перевірити, що F є H^+-неперервним /H^--неперервним/ в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $V_\varepsilon(F(x_0)) \supseteq F(x)$ /$V_\varepsilon(F(x)) \supseteq F(x_0)$/ для кожного $x \in U$. Кажуть, що замкненозначне відображення $F\colon X \to Y$ є *H-неперервним в точці* x_0, якщо в цій точці неперервне однозначне відображення $F\colon X \to (\mathcal{F}(Y), h)$. Очевидно, що F буде H-неперервним в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли воно одночасно H^+-неперервне і H^--неперервне в цій точці. Відображення F називається H^+-неперервним, H^--неперервним або H-неперервним, якщо воно є відповідно H^+-неперервним, H^--неперервним, H-неперервним у кожній точці простору X.

Як відомо, неперервність компактнозначного відображення $F\colon X \to Y$ рівносильна його H-неперервності. Але виявляється, що умова компактнозначності відображення F не є істотною, коли іде мова про зв'язки між неперервністю зверху і H^+-неперервністю, а також неперервністю знизу і H^--неперервністю. В наступних чотирьох твердженнях ми точніше охарактеризуємо ці зв'язки. У вказаних твердженнях наперед будемо вважати, що X – топологічний простір, Y – метричний простір і $x_0 \in X$.

Твердження 1. *Нехай відображення $F\colon X \to Y$ неперервне зверху в точці x_0. Тоді F є H^+-неперервним в цій точці.*

Твердження 2. *Нехай відображення $F\colon X \to Y$ є H^--неперервним в точці x_0. Тоді F неперервне знизу в цій точці.*

Доведення тверджень 1 і 2 є очевидним [1,с.60].

Твердження 3. *Нехай відображення $F\colon X \to Y$ є H^+-неперервним в точці x_0 і $F(x_0)$ компактна множина. Тоді відображення F неперервне зверху в точці x_0.*

Доведення. Нехай множина V відкрита в Y, така, що $F(x_0) \subseteq V$. Оскільки $F(x_0)$ – компактна множина, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що

$F(x_0) \subseteq V_\varepsilon(F(x_0)) \subseteq V$. Відображення F – H^+-неперервне в точці x_0, тому для знайденого ε існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $h^+(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$, тобто $F(x) \subseteq V_\varepsilon(F(x_0))$ як тільки $x \in U$. Отже, $F(x) \subseteq V$ для кожного x з U.

Твердження 4. *Нехай відображення $F\colon X \to Y$ є неперервним знизу в точці x_0 і $F(x_0)$ – компактна множина. Тоді F – H^--неперервне в цій точці.*

Доведення. Оскільки множина $F(x_0)$ компактна, то існує скінченна кількість точок $y_1, \ldots, y_n \in F(x_0)$ і $\varepsilon > 0$, таких, що $F(x_0) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{\varepsilon/2}(y_i)$. Зрозуміло, що $F(x_0) \cap V_{\varepsilon/2}(y_i) \neq \emptyset$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Відображення F неперервне знизу в точці x_0, тому для кожного $i = 1, \ldots, n$ існують околи U_i точки x_0 в X, такі, що $F(x) \cap V_{\varepsilon/2}(y_i) \neq \emptyset$ для кожного $x \in U_i$. Покладемо $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ і покажемо, що $F(x_0) \subseteq V_\varepsilon(F(x))$ як тільки $x \in U$. Нехай $y_0 \in F(x_0)$. Тоді існує номер $i = 1, \ldots, n$, такий, що $y_0 \in V_{\varepsilon/2}(y_i)$, тобто $d(y_0, y_1) < \varepsilon/2$. З іншого боку, для кожного x з U перетин $F(x) \cap V_{\varepsilon/2}(y_i) \neq \emptyset$, тому існує точка $y \in F(x)$, така, що $d(y, y_i) < \varepsilon/2$. Тоді відстань $d(y_0, y) < d(y_0, y_i) + d(y_i, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Таким чином, $y_0 \in V_\varepsilon(F(x))$ для кожного $x \in U$. Отже, F є H^--неперервним в точці x_0.

З тверджень 1 – 4 негайно випливає

Теорема 1 [1, theorem 2.68]. *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір, $F\colon X \to Y$ компактнозначне відображення і $x_0 \in X$. Відображення F неперервне в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $F\colon X \to \mathcal{K}(Y)$ є H-неперервним у цій точці.*

Використавши теорему 1 і відому теорему Калбрі-Труалліка [2] про сукупну неперервність нарізно неперервних однозначних функцій легко довести наступний результат.

Теорема 2. *Нехай X, Y – топологічні простори, Z – метричний простір і $F\colon X \times Y \to Z$ компактнозначне нарізно неперервне відображення. Тоді*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(F) = \{x \in X : (x, y) \in C(F)\}$ залишкова в X.

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(F) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(F)\}$ є залишковою в X.

Доведення. Оскільки відображення F компактнозначне і нарізно неперервне, то за теоремою 1 відображення $F\colon X \times Y \to (\mathcal{K}(Z), h)$ нарізно неперервне і до нього, як до однозначного відображення, можна застосувати теорему Калбрі-Труалліка. Застосувавши знову теорему 1, отримаємо потрібне твердження.

3. Наведемо тепер ряд прикладів, які показують, що умова компактності в твердженнях 2, 3 і теоремі 1 є істотною. А саме, виявляється, що з H-неперервності не випливає неперервність і навпаки.

Підмножини числової прямої $\mathbb{R}$, які розглядаються в наступних прикладах, наділяються топологічною структурою, індукованою з $\mathbb{R}$.

Приклад 1. Нехай $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ і відображення $F\colon X \to \mathbb{R}$ діє таким чином: $F(\frac{1}{n}) = \mathbb{N} \setminus \{n\}$, і $F(0) = \mathbb{N}$. Покажемо, що дане відображення є неперервним в точці $x = 0$ і не є H^--неперервним в цій точці.

Оскільки $F(x) \subseteq F(0)$ для кожного $x \in X$, то звідси випливає, що F неперервне зверху в нулі. Розглянемо тепер довільну відкриту множину V в $\mathbb{R}$, таку, що $V \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Тоді, зрозуміло існує точка $n_0 \in V \cap \mathbb{N}$. Розглянемо окіл $U = \left(-\infty; \frac{1}{n_0}\right) \cap X$ точки $x = 0$ в X. Покажемо, що $F(x) \cap V \neq \emptyset$, як тільки $x \in U$. Зрозуміло, що $F(0) \cap V \neq \emptyset$, бо $F(0) = \mathbb{N}$. Нехай $x \in U \setminus \{0\}$. Тоді $x = \dfrac{1}{n}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. При цьому $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0}$, отже, $n > n_0$. Тому $n_0 \in F(x) = \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Отже, $F(x) \cap V \neq \emptyset$ для кожного $x \in U$.

Покажемо, що F не є H^--неперервним в точці $x = 0$, тобто існує $\varepsilon > 0$, таке, що в кожному околі нуля U знайдеться точка $x_\varepsilon \in U$, така, що $F(0) \not\subseteq V_\varepsilon(F(x_\varepsilon))$. Справді, нехай $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і $V_\varepsilon(F(\frac{1}{n})) = \bigcup\limits_{k\neq n}(k-\frac{1}{2};k+\frac{1}{2})$. Нехай U – довільний окіл нуля в X. Оскільки $\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, то існує номер n_0, такий, що для кожного $n\geq n_0$ маємо $\frac{1}{n}\in U$. Зрозуміло, що для кожного $n\geq n_0$ маємо $V_\varepsilon(F(\frac{1}{n}))\not\supseteq F(0)=\mathbb{N}$.

Приклад 2. Нехай відображення $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ діє таким чином: $F(x)=[0;\frac{1}{|x|}]$, якщо $x\neq 0$ і $F(0)=[0;+\infty)$. Тоді F замкненозначне і неперервне в нулі, але не є H^--неперервним в цій точці.

Зрозуміло, що оскільки $F(x)\subseteq F(0)$ для кожного $x\in\mathbb{R}$, то F є неперервним зверху в точці $x=0$. Покажемо, що F неперервне знизу в цій точці. Нехай V відкрита множина в $\mathbb{R}$, така, що $F(0)\cap V\neq\emptyset$. Тоді існує точка $y_0\in F(0)\cap V$. Множина V відкрита, тому існує $\varepsilon>0$, така, що $V_\varepsilon(y_0)=(y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon)\subseteq V$. Візьмемо $\delta>0$, таке, що $\frac{1}{\delta}>y_0-\varepsilon$. Тоді для кожного $x\in U=(-\delta;\delta)$ маємо $\frac{1}{|x|}>\frac{1}{\delta}>y_0-\varepsilon$. Отже, для околу U точки $x=0$ маємо, що $F(x)\cap V\neq\emptyset$, як тільки $x\in U$, бо $\emptyset\neq(y_0-\varepsilon,\frac{1}{|x|})\subseteq F(x)\cap V$ для кожного $x\in U$.

Нехай $\varepsilon>0$ і $V=V_\varepsilon(F(x))=(-\varepsilon;\frac{1}{|x|}+\varepsilon)$. Зрозуміло, що $[0;+\infty)\not\subseteq V$ для кожного $x\in\mathbb{R}$. Тобто F не є H^--неперервним в точці $x=0$.

Приклад 3. Нехай $X=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ і відображення $F\colon X\to\mathbb{R}$ діє таким чином: $F(\frac{1}{n})=\mathbb{N}\cup\{n+\frac{1}{n}\}$, і $F(0)=\mathbb{N}$. Тоді F – це замкненозначне відображення, яке є H-неперервним, але не є неперервним зверху в нулі.

З включення $F(0)\subseteq F(x)$ для кожного $x\in X$ випливає H^--неперервність відображення F в нулі. З'ясуємо, що F є H^+-неперервним в нулі . Нехай $\varepsilon>0$ і $\delta=\varepsilon$. Тоді для кожного $x=\frac{1}{n}\in U_\varepsilon(0)$ маємо $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Тоді $n+\frac{1}{n}\in V_\varepsilon(F(0))$, адже $|n+\frac{1}{n}-n|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ і $n\in F(0)$. Отже, $F(x)\subseteq V_\varepsilon(F(0))$ для кожного $x\in U_\varepsilon(0)$.

Покажемо, що F не є неперервним зверху в нулі. Розглянемо відкриту множину $V=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n-\frac{1}{n};n+\frac{1}{n})$, що містить $F(0)$. Нехай U – довільний окіл нуля в X. Зрозуміло, що існує такий номер $m\geq 2$, що $\frac{1}{m}\subseteq U$. Тоді $m+\frac{1}{m}\in F(\frac{1}{m})\setminus V$. Отже, $F(\frac{1}{m})\not\subseteq V$. Тому F не є неперервним зверху в точці $x=0$.

Приклад 4. Нехай відображення $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таке, що $F(x)=\mathbb{R}\setminus\{x\}$ для кожного $x\in\mathbb{R}$. Тоді F є H-неперервним і не є неперервним зверху у жодній точці з $\mathbb{R}$.

Справді, нехай $\varepsilon>0$ і $x_0\in\mathbb{R}$. Тоді $V_\varepsilon(F(x_0))=\mathbb{R}\supseteq F(x)$ для кожного $x\in\mathbb{R}$. Так само $V_\varepsilon(F(x))\supseteq F(x_0)$ для кожного $x\in\mathbb{R}$. Отже, F є H-неперервним у кожній точці $x_0\in\mathbb{R}$. Розглянемо тепер відкриту множину $V=\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, що містить $F(x_0)$. За побудовою $F(x)\not\subseteq F(x_0)$ для кожного $x\neq x_0$, бо $x_0\in F(x)\setminus F(x_0)$ при $x\neq x_0$, а, отже, $F(x)\not\subseteq V$ для кожного $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$. Отже, F не є неперервним зверху в точці x_0.

Приклад 5. Покладемо $P_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-\frac{1}{n})^2+(y-n)^2\leq\delta_n, y\geq n\}$, де $0<\delta_n<\frac{1}{2n(n+1)}$, і $\Delta_n=[\frac{1}{n}-\delta_n;\frac{1}{n}+\delta_n]$. Зауважимо, що $\Delta_n\cap\Delta_m=\emptyset$ при $n\neq m$. Позначимо через $h_n(x)=\sqrt{\delta_n^2-(x-\frac{1}{n})^2}$. Відображення $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що діє таким чином: $F(x)=\mathbb{N}$, якщо $x\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$, і $F(x)=\mathbb{N}\cup[n,n+h_n(x)]$, якщо $x\in\Delta_n$, для деякого $n\in\mathbb{N}$, є H-неперервним в нулі $x=0$ і не є неперервним зверху в цій точці.

Оскільки $F(x)\supseteq F(0)$ для кожного $x\in\mathbb{R}$, то відображення F є H^--неперервним в точці $x=0$. Покажемо, що F є H^+-неперервним в цій точці. Нехай $\varepsilon>0$. Оскільки за побудовою $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$, то існує номер n_0, такий, що для кожного $n\geq n_0$ маємо $\delta_n<\varepsilon$. Розглянемо окіл $U=(-\infty;\frac{1}{n_0})$ точки $x=0$. Нехай $x\in U$. Якщо $x\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$, то $F(x)=\mathbb{N}\subseteq V_\varepsilon(F(0))$. Нехай $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. Тоді існує номер n, такий, що $x\in\Delta_n$. Зрозуміло, що $n\geq n_0$, адже точки з проміжків Δ_m при $m<n_0$ знаходяться правіше від $\frac{1}{n_0}+\delta_{n_0}$ і не містять точки x, для якої $x<\frac{1}{n_0}$. Оскільки

$[n, n+h_n(x)] \subseteq [n, n+\delta] \subseteq [n, n+\varepsilon) \subseteq V_\varepsilon(\mathbb{N})$, то $F(x) \subseteq V_\varepsilon(F(0))$. Отже, для кожного $x \in U$ виконується включення $F(x) \subseteq V_\varepsilon(F(0))$.

Розглянемо тепер відкриту множину $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n - \frac{\delta_n}{2}; n + \frac{\delta_n}{2})$, що містить $F(0)$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ точка $n + \delta_n \in F(\frac{1}{n})$, але $n + \delta_n \notin V$, то $F(\frac{1}{n}) \subseteq V$. Нехай U – довільний окіл точки $x = 0$. Зрозуміло, що знайдеться номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такий, що $\frac{1}{n} \in U$ для кожного $n \geq n_0$. Отже, в кожному околі нуля знайдеться точка $x_n = \frac{1}{n}$, така, що $F(x_0) \nsubseteq V$, а це означає, що F не є неперервним зверху в нулі.

Приклад 6. Нехай відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таке, що $F(x) = \{x + n : n \in \mathbb{N}\}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Тоді F – це замкненозначне відображення, яке є H-неперервним і не є неперервним зверху в жодній точці $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $\varepsilon > 0$ і $x_0 \in \mathbb{R}$. Покажемо, що F є H-неперервним в точці x_0. Розглянемо окіл $U = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 в $\mathbb{R}$. Нехай $x \in U$. Тоді для x виконується така нерівність $x_0 + n - \varepsilon < x + n < x_0 + n + \varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $F(x) = \{x + n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V_\varepsilon(F(x_0)) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(x_0+n-\varepsilon; x_0+n+\varepsilon)$ у точці x_0. Так само з нерівності $|x - x_0| < \varepsilon$ випливає, що $x+n-\varepsilon < x_0+n < x+n+\varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $F(x_0) \subseteq V_\varepsilon(F(x))$.

Покажемо тепер, що F не є неперервним зверху в точці x_0. Покладемо $y_n = x_0 + n$, $\widetilde{V}_n = (x_0 + n - \frac{1}{2n}; x_0 + n + \frac{1}{2n})$ і $V_n = (x_0 + n - \frac{1}{4n}; x_0 + n + \frac{1}{4n})$. Зауважимо, що $V_n \subseteq \widetilde{V}_n$ і $\widetilde{V}_n \cap \widetilde{V}_m = \emptyset$ при $n \neq m$. Нехай $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Зрозуміло, що V – відкрита множина в $\mathbb{R}$, яка містить $F(x_0)$. Нехай U – довільний окіл нуля в $\mathbb{R}$. Оскільки послідовність $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує номер k, такий, що $x_* = x_0 + \frac{1}{4k} \in U$. Покажемо, що $F(x_*) \nsubseteq V$.Точка $y_* = x_* + k = x_0 + k + \frac{1}{4k} = y_k + \frac{1}{4k} \notin V_k$.Зрозуміло, що $y_* \notin \widetilde{V}_k$.Оскільки $\widetilde{V}_k \cap \widetilde{V}_n = \emptyset$ при $k \neq n$ і $V_n \subseteq \widetilde{V}_n$ для кожного n, то $\widetilde{V}_k \cap V_n = \emptyset$ при $k \neq n$. Отже, $y_* \notin V_n$ при $n \neq k$. Отже, $y_* \notin V$.

4. Розвиваючи ідею побудови прикладу 6, ми подамо тут два загальних методи для конструювання H-неперервних замкненозначних відображень $F\colon X \to \mathbb{R}$, які в жодній точці простору X не є неперервними зверху.

Спочатку нагадаємо означення потрібних для нас понять.

Нехай X– топологічний простір, Y – метричний простір і $(f_i : i \in I)$ – сім'я відображень з X в Y. Сім'я $(f_i : i \in I)$ називається *одностайно неперервною*, якщо для кожного $x \in X$ і для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться окіл U точки x, такий, що для кожного $i \in I$ виконується нерівність $|f_i(u) - f_i(x)| < \varepsilon$, як тільки $u \in U$.

Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення, задане на топологічному просторі X, і $x_0 \in X$. Кажуть, що x_0 – *точка локальної сталості* відображення f, якщо існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x) = f(x_0)$ для всіх $x \in U$.

Лема 1. *Нехай A, $B \subseteq \mathbb{R}$ і числа ε_1, ε_2 такі, що $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ і $A \subseteq V_{\varepsilon_2}(B)$. Тоді $\overline{A} \subseteq V_{\varepsilon_1}(B)$.*

Доведення. Нехай $x \in \overline{A}$. Покладемо $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$. Зрозуміло, що перетин $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Тоді існує точка $a \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon) \cap A$, для якої $|x-a| < \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Оскільки $a \in A$ і $A \subseteq V_{\varepsilon_2}(B)$ то існує точка $b \in B$, така, що $|a - b| < \varepsilon_2$. Тоді $|x - b| \leq |x - a| + |a - b| < \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Отже, $|x - b| < \varepsilon_1$, звідки випливає, що $x \in V_{\varepsilon_1}(B)$.

Теорема 3. *Нехай X – топологічний простір, $(f_i : i \in I)$ – одностайно неперервна сім'я функцій $f_i\colon X \to \mathbb{R}$. Тоді відображення $F\colon X \to \mathbb{R}$, таке, що $F(x) = \overline{\{f_i(x) : i \in I\}}$ є H-неперервним і замкненозначним.*

Доведення. Зафіксуємо деяку точку $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки сім'я $(f_i : i \in I)$ одностайно неперервна, то знайдеться окіл U точки x_0, такий, що для кожного $i \in I$ виконується нерівність $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/2$, як тільки $x \in U$. Отже, $\{f_i(x) : i \in I\} \subseteq V_{\varepsilon/2}(\{f_i(x_0) : i \in I\})$. За лемою маємо, що $F(x) = \overline{\{f_i(x) : i \in I\}} \subseteq V_\varepsilon(\{f_i(x_0) : i \in I\}) \subseteq V_\varepsilon(F(x_0))$ для кожного $x \in U$. Отже, F є

H^+-неперервним в точці x_0. Міркуючи аналогічно отримаємо, що F є H^--неперервним у цій точці.

Теорема 4. *Нехай X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, $(f_n : n \in \mathbb{N})$ – одностайно неперервна послідовність функцій f_n: $X \to \mathbb{R}$, які не є локально сталими в жодній точці $x \in X$, така, що для кожного $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ і $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді відображення F: $X \to \mathbb{R}$, для якого $F(x) = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ при $x \in X$ є замкненозначним і H-неперервним, але не неперервним зверху в жодній точці $x \in X$.*

Доведення. Замкненість множин $F(x)$ легко випливає з умови $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$. Тоді за теоремою 3 відображення F є H-неперервним.

Зафіксуємо деяку точку $x_0 \in X$ і покажемо, що F не є неперервним зверху в цій точці. Нехай $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ – спадна база околів точки x_0 в X. Покладемо $y_n = f_n(x_0)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. За побудовою $F(x_0) = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, причому $y_1 < y_2 < \cdots < y_n < \ldots$. Розглянемо тепер послідовність чисел $\delta_n > 0$ таких, що $y_n + \delta_n < y_{n+1} - \delta_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ функції f_n неперервні в точці x_0, то для кожного n існує номер $k_n \geq n$ такий, що виконується включення $f_n(U_{k_n}) \subseteq (y_n - \delta_n; y_n + \delta_n) = W_n$. З того, що f_n не є локально сталими жодній точці $x \in X$ маємо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_n \in U_{k_n}$, така, що $f_n(x_n) - y_n \neq 0$. Покладемо $\varepsilon_n = |f_n(x_n) - y_n|$. Ясно, що $\varepsilon_n < \delta_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо відкриту множину $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (y_n - \varepsilon_n, y_n + \varepsilon_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Розглянемо довільний окіл U точки x_0. Оскільки $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ – база околів точки x_0, то існує номер m, такий, що $U_m \subseteq U$. Точка $x_m \in U_{k_m}$ і $k_m \geq m$. Отже, $x_m \in U_m$, а значить, $x_m \in U$. Крім того, $f(x_m) \in W_m$, отже, $f(x_m) \notin \bigcup\limits_{n\neq m} W_n$, бо $W_n \cap W_m = \emptyset$ при $n \neq m$. Оскільки $\varepsilon_n < \delta_n$, то $f(x_m) \notin \bigcup\limits_{n\neq m} V_n$. До того ж, за вибором ε_n маємо, що $f(x_m) \notin V_m$. Отже, $f(x) \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = V$, що і треба було довести.

Послідовність функцій $f_n(x) = c_n e^{-x^2} + n$, де $0 < c_n \leq 1$ для всіх n, а також послідовність $f_n(x) = x + n$, яку ми розглядали у прикладі 6, ілюструють дану теорему для $X = \mathbb{R}$.

5. Добре відомо [3, с. 405], що у кожного однозначного відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у метризовний простір Y, яке належить до першого класу Бера $B_1(X, Y)$, тобто є поточковою границею послідовності неперервних відображень $f_n : X \to Y$, сукупність $D(f)$ всіх його точок розриву є множиною першої категорії. З цієї теореми та теореми 1 негайно випливає, що кожне компактнозначне відображення $F : X \to Y$ топологічного простору X у метризовний простір Y, для якого існує послідовність неперервних відображень $F_n : X \to Y$ така, що $h(F_n(x), F(x)) \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $x \in X$, саме є неперервним у кожній точці деякої залишкової множини. Якщо простір Y є скінченно компактним [4, с. 18], тобто у ньому кожна замкнена куля є компактною (як у просторі $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою), то можна довести і точніше твердження.

Теорема 5. *Нехай X – зв'язний топологічний простір, Y – скінченно компактний метричний простір і $F : X \to Y$ – компактнозначне відображення, яке є поточковою H-границею послідовності H-неперервних замкненозначних відображень $F_n : X \to Y$. Тоді множина $C(F)$ всіх точок неперервності відображення F є залишковою в X.*

Доведення цієї теореми спирається на таке твердження.

Лема 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – скінченно компактний метричний простір і $F : X \to Y$ – H-неперервне замкненозначне відображення. Тоді множина $K(F) = \{x \in X : F(x) -$ компактна множина в $Y\}$ є відкрито-замкненою в X. Зокрема, якщо простір X – зв'язний і*

$K(F) \neq \emptyset$, *то* $K(F) = X$.

Доведення. Переконаймося в тому, що множина $K(F)$ відкрита в X. Нехай $x_0 \in K(F)$, тобто множина $F(x_0)$ компактна в X. Оскільки відображення є H^+- неперервним в точці x_0, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V_\varepsilon[F(x_0)]$, як тільки $x \in U$. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ множина $V_\varepsilon[F(x_0)]$ буде обмеженою і замкненою, а значить компактною в Y. Оскільки множини $F(x)$ замкнені, то вони будуть компактними для всіх $x \in U$. Таким чином $U \subseteq K(F)$, що і дає нам відкритість $K(F)$.

Перевіримо тепер замкненість множини $K(F)$. Нехай $x_0 \in \overline{K(F)}$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки F є H^--неперервним в точці x_0, то існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $F(x_0) \subseteq V_\varepsilon[F(x)]$ для кожного $x \in U$. Але $U \cap K(F) \neq \emptyset$, отже, існує $x^* \in U \cap K(F)$. При цьому $F(x_0) \subseteq V_\varepsilon[F(x^*)]$ і множина $V_\varepsilon[F(x^*)]$ компактна. Тому і замкнена множина $F(x_0)$ теж буде компактною.

Доведення теореми 5. Зафіксуємо якусь точку x_0 з X і число $\varepsilon > 0$. Оскільки $h(F_n(x_0), F(x_0)) \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер N, що $F_n(x_0) \subseteq V_\varepsilon[F_n(x_0)]$ для всіх $n \geqslant N$. Це показує, що множини $F_n(x_0)$ є компактними при $n \geqslant N$. В такому разі $K(F_n) \neq \emptyset$ при $n \geqslant N$, отже, згідно з лемою 2 маємо $K(F_n) = X$ при $n \geqslant N$. Таким чином, відображення $F_n : X \to Y$ при $n \geqslant N$ є компактнозначними, отже, твердження теореми 5 випливає із зауважень, зроблених перед її формулюванням.

Оскільки для довільних замкненозначних відображень неперервність і H-неперервність це різні поняття, то постає природне питання: чи може замкненозначне відображення $F : X \to Y$, яке є поточковою H-границею послідовності неперервних замкненозначних відображень $F_n : X \to Y$, бути скрізь розривним? Наступний результат дає ствердну відповідь на поставлене питання.

Теорема 6. *Нехай X – топологічний простір, який задовольняє першу аксіому зліченності, f_n: $X \to \mathbb{R}$ – послідовність неперервних і обмежених функцій, що не є локально сталими у жодній точці $x \in X$, причому коливання функцій $\omega_n = \omega_{f_n}(x) = \sup f_n(X) - \inf f_n(X) \to 0$ при $n \to \infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ для кожного $x \in X$ і $F(x) = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ для кожного $x \in X$. Тоді*

(i) F: $X \to \mathbb{R}$ є замкненозначним і H-неперервним,

(ii) F не є неперервним зверху в жодній точці $x \in X$;

(iii) F є поточковою H-границею деякої послідовності неперервних і H-неперервних відображень F_n: $X \to \mathbb{R}$.

Доведення. Як і в теоремі 4, замкненість множин $F(x)$ легко випливає з умови $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$. Одностайну неперервність послідовності $(f_n : n \in \mathbb{N})$ можна вивести з умови $\omega_n \to 0$ і неперервності функцій f_n. Тому з теореми 3 випливає, що F є H-неперервним. Те, що F не є неперервним зверху в жодній точці x з X випливає з теореми 4.

Залишилося довести (iii). Нехай a – фіксована точка з X і $b_n = f_n(a)$ для кожного n. Для $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$F_n(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x), b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots\}$.

Неперервність і H-неперервність F_n випливає з неперервності функцій f_n. Покажемо, що $h(F_n(x), F(x)) \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $x \in X$. Нехай $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки $\omega_n \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер N, що $\omega_n < \varepsilon$, як тільки $n \geq N$. Тоді $|f_n(x) - b_n| = |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \omega_n < \varepsilon$ при $n \geq N$. Тоді при $n \geq N$ будемо мати $F_n(x) \subseteq V_\varepsilon(F(x))$ і $F(x) \subseteq V_\varepsilon(F_n(x))$. В такому разі $h(F_n(x), F(x)) \leq \varepsilon$ при $n \geq N$, отже, $h(F_n(x), F(x)) \to 0$ при $n \to \infty$.

Приклад 7. Нехай $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = n + \frac{1}{n}\sin nx$, $g_n(x) = n + \frac{1}{n}e^{-x^2}$. За теоремою 6 відображення $F(x) = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ і $G(x) = \{g_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ є замкненозначними відображеннями, які задовольняють умови (i) – (iii) теореми 6.

6. Нехай Y – топологічний простір і $\mathcal{P}(Y)$ – система всіх підмножин простору

Y. Для довільної скінченної послідовності $V_0, V_1, ..., V_n$ відкритих підмножин простору Y покладемо

$$\langle V_0; V_1, ..., V_n\rangle = \{E \in \mathcal{P}(Y) : E \subseteq V_0 \text{ і}$$

$$E \cap V_k \neq \emptyset \text{ для кожного } k = 1, ..., n\}.$$

Система множин $\langle V_0; V_1, ..., V_n\rangle$ є базою деякої топології $\mathcal{T}_V$ на $\mathcal{P}(Y)$, яка називається *топологією Віторіса* [1, с.11]. Очевидно, що многозначне відображення $F : X \to Y$ буде неперервним в точці $x_0 \in X$ тоді і тільки тоді, коли воно буде неперервним як однозначне відображення $F : X \to (\mathcal{P}(Y), \mathcal{T}_V)$. Використовуючи міркування, подібні до тих, що застосовувалися в доведенні тверджень 3 і 4 можна показати, що для компактної множини K_0 системи всіх її околів у топології Віторіса на просторі $\mathcal{F}(Y)$ всіх непорожніх замкнених підмножин Y, збігається з системою всіх околів множини K_0 у метричному просторі $(\mathcal{F}(Y), h)$. Це прояснює твердження 3 і 4. Якщо замість компактної множини K_0 взяти довільну замкнену множину E_0 , то це вже не так, причому для $Y = \mathbb{R}$ і $E_0 = \mathbb{N}$ можна навести приклади множин, які є околами точки E_0 у топології Віторіса, але не є околами точки E_0 у топології Гаусдорфа $\mathcal{T}_H$, що породжується метрикою h, і навпаки.

У зв'язку з цим виникає і таке питання: чи існує послідовність неперервних замкненозначних відображень $F_n : X \to Y$, яка поточково збігається в топології Віторіса до деякого скрізь розривного замкненозначного відображення $F : X \to Y$? Покажемо, що відповідь на це питання позитивна.

Спочатку зробимо одне просте спостереження.

Лема 3. *Нехай Y – топологічний простір, $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність підмножин E_n простору Y і $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Тоді $E_n \to E$ при $n \to \infty$ в топології Віторіса $\mathcal{T}_V$ на $\mathcal{P}(Y)$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{V} = \langle V_0; V_1, ..., V_m\rangle$ – довільний базисний окіл точки E в топології Віторіса. Нам потрібно знайти такий номер N, що $E_n \in \mathcal{V}$ при $n \geqslant N$. Оскільки $V_i \cap E \neq \emptyset$ при $i = 1, ..., m$, то для кожного $i = 1, ..., m$ існує номер n_i, такий, що $V_i \cap E_{n_i} \neq \emptyset$.

Покладемо $N = max\{n_1, ..., n_m\}$. Якщо $n \geqslant N$, то $n \geqslant n_i$, а значить, $E_n \supseteq E_{n_i}$ для кожного $i = 1, ..., m$. Тому $E_n \cap V_i \supseteq E_{n_i} \cap V_i \neq \emptyset$ при $n \geqslant N$ і $i = 1, ..., m$. Крім того $E_n \subseteq E \subseteq V_0$, для всіх n. Тому $E_n \in \mathcal{V}$ при $n \geqslant N$.

Теорема 7. *Нехай X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, $(f_n : n \in \mathbb{N})$ – одностайно неперервна послідовність функцій f_n: $X \to \mathbb{R}$, які не є локально сталими в жодній точці $x \in X$, така, що для кожного $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ і $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = \{f_k(x) : k = 1, ..., n\}$ і $F(x) = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ для $x \in X$. Тоді відображення F_n неперервні і поточково збігаються в топології Віторіса до замкненозначного відображення F, яке є H-неперервним і скрізь розривним на X.*

Доведення негайно випливає з теореми 4 і леми 3.

Явний приклад дають відображення $f_n(x) = x + n$ з прикладу 6.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Shouchuan Hu., Papageorgiou N.* Handbook of Multivalued Analysis. Theory // Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Pablishens. – 1997. – 964 p.

2. *Colbrix J., Troallic J.P.* Aplications separement continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Sec. A. – 1979. – 288. – P. 647 – 648.

3. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

4. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.