УДК 517.51

©2007 О.І. Філіпчук

ДО ПИТАННЯ ПРО СУКУПНУ НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА ЇХ АНАЛОГІВ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В СИЛЬНО σ-МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Доведено, що в результатах В.В. Михайлюка [4], Дж. Христенсена [5], та А. Бузіада [6] метризовний простір значень можна замінити на гаусдорфововий сильно σ-метризовний або супер-σ-метризовний простір.

It is proved that a metrizable space Z in the results of V.V. Mykhaylyuk [4], J.P.R. Christensen [5] and A. Bouziad [6] can be replaced by a Hausdorff strongly σ-metrizable or super-σ-metrizable one.

1. Нехай X, Y, Z – топологічні простори. Символом $CC(X \times Y, Z)$ ми позначаємо сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$, а символом $KC(X \times Y, Z)$ – відповідно сукупність відображень, які є квазінеперервними відносно першої змінної і неперервними відносно другої. Коротше нарізно неперервні відображення називають CC-функціями, а відображення з класу $KC(X \times Y, Z)$ – KC-функціями.

Впродовж XX століття різними математиками проводились дослідження величини множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень f та їх аналогів зі значеннями в метризовних просторах. В результаті цих досліджень з'явились нові поняття, які певним чином характеризують множину $C(f)$ даного відображення. Зокрема, кажуть, що відображення $f : X \times Y \to Z$ *має властивість Наміоки* [1], якщо множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ містить всюди щільну в X множину типу G_δ. Відображення f *має властивість Гана* [2], якщо множина $C_Y(f)$ є залишковою в X. Через $N(X \times Y, Z)$ /$H(X \times Y, Z)$/ позначатимемо сукупність відображень $f : X \times Y \to Z$, які мають властивість Наміоки /властивість Гана/.

При дослідженні множини $C(f)$ нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в метризовних просторах з'явились різні класи просторів, в яких дані відображення мають властивість Наміоки чи властивість Гана. Такими є, наприклад, наміокові, конаміокові простори та простори Кемпістого. Топологічний простір X називається *наміоковим* [1,3], якщо для довільного компакта Y кожна функція $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ має властивість Наміоки. Топологічний простір Y називається *конаміоковим* [1,2], якщо для довільного берівського простору X кожна функція $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ має властивість Наміоки. Використовуючи теорему Банаха про категорію, можна довести [2], що простір Y буде конаміоковим тоді і тільки тоді, коли для довільного топологічного простору X кожна функція $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ має властивість Гана. Топологічний простір Y називається *простором Кемпістого* [2,4], якщо для довільного топологічного простору X кожне відображення $f \in KC(X \times Y, \mathbb{R})$ має властивість Гана. Як і для конаміокових просторів, ця умова рівносильна тому, що для довільного берівського простору X кожна функція $f \in KC(X \times Y, \mathbb{R})$ має властивість Наміоки.

Різними авторами в різні роки було доведено, що в означеннях наміокових, конаміокових просторів та просторів Кемпістого можна числову пряму замінити на довільний метризовний простір Z. А саме, були встановлені наступні результати:

Теорема A [5]. *Нехай X – наміоковий простір, Y – компакт і Z – метризовний простір. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq N(X \times Y, Z)$.*

Теорема B [6]. *Нехай X – берівський простір, Y – конаміоковий компакт і Z – метризовний простір. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq N(X \times Y, Z)$.*

Теорема C [4]. *Нехай X – берівський простір, Y – компакт Кемпістого і Z – метризовний простір. Тоді $KC(X \times Y, Z) \subseteq N(X \times Y, Z)$.*

В серії праць В.К. Маслюченка, підсумованих у [2], було отримано ряд теорем про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень і KC-функцій зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах. Ці результати були розвинуті в [7,8]. Тут ми, розвиваючи методи цих робіт, покажемо, що умову метризовності простору Z у вищенаведених результатах можна замінити на таку: Z – гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір.

2. Нагадаємо, що топологічний простір Z називається *σ-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_m. Послідовність підпросторів Z_m, яка фігурує в цьому означенні, називається *вичерпуванням простору Z*. Якщо Z має таке вичерпування $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$, що для довільної збіжної в Z послідовності точок z_k існує номер m, для якого $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_m$, то кажуть, що Z – *сильно σ-метризовний простір*. В [9] було введене поняття супер-σ-метризовного простору. А саме, топологічний простір Z називається *супер-σ-метризовним*, якщо Z має таке вичерпування $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$, що кожна компактна в Z множина лежить у деякому дограничному просторі Z_m.

Твердження 2.1. *Кожен σ-метризовний компакт є метризовним.*

Доведення. Нехай Z – σ-метризовний компакт з вичерпуванням $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$. Оскільки для кожного номера m простір Z_m є метризовним компактом, то за теоремою про універсальність тихоновських кубів [10, с. 137] існують гомеоморфні вкладення $g_m : Z_m \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, де $g_m(z) = (g_{m,n}(z))_{n=1}^{\infty}$ для $z \in Z_m$.

Компакт Z є нормальним простором. Тому за теоремою Тітце-Урисона [10, с.116] кожну неперервну функцію $g_{m,n} : Z_m \to [0,1]$ можна продовжити до неперервної функції $f_{m,n} : Z \to [0,1]$. Подвійну послідовність функцій $f_{m,n}$ можна, очевидно, перенумерувати у звичайну послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, причому ця послідовність розділяє точки із Z. Співставивши точці $z \in Z$ набір $(f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z), \dots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, ми отримуємо ін'єктивне і неперервне відображення $f : Z \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, яке є гомеоморфним вкладенням, оскільки Z – компакт [10, с.199]. Таким чином, Z і $f(Z)$ – це гомеоморфні компакти. Але, простір $[0,1]^{\mathbb{N}}$ метризовний, отже, такими ж будуть і $f(Z)$ та Z. Таким чином, Z – метризовний простір.□

Твердження 2.2. *Замкнений підпростір /сильно/ σ-метризовного простору є /сильно/ σ-метризовним.*

Доведення. Нехай Z – даний сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$ і L – замкнений підпростір Z. Покладемо $L_m = L \cap Z_m$ для кожного номера m. Зрозуміло, що множини L_m замкнені в Z, а значить, L_m – замкнені в L. Легко бачити, що $L = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} L_m$. Крім того, кожна збіжна в L послідовність збігається і в Z, а, отже, лежить в деякому дограничному просторі Z_m. Звідси випливає, що кожна збіжна в L послідовність лежить у дограничному просторі L_m. Таким чином, L – сильно σ-метризовний простір.

Для випадку σ-метризовного простору використовуємо аналогічні міркування.□

Твердження 2.3. *Нехай Z – сильно σ-метризовний гаусдорфовий простір з вичерпуванням $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$ і K – компактна множина в Z. Тоді існує такий номер m, що $K \subseteq Z_m$.*

Доведення. Компактна множина K є замкненою в просторі Z. За твердженням 2.2 множина K є сильно σ-метризовним простором. Крім того, оскільки простір Z – гаусдорфовий, а K – його компактна підмножина, то K – компакт. Тоді за твердженням

2.1 компакт K є метризовним.

Покажемо, що $K \subseteq Z_m$ для деякого номера m. Нехай це не так. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує точка $z_m \in K \setminus Z_m$. Оскільки K – метризовний компакт, то з послідовності його точок $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну в K підпослідовність $(z_{m_j})_{j=1}^{\infty}$. Ця послідовність вся лежить в деякому дограничному просторі Z_m. Але $m_j \geq m$ для великих номерів j і за побудовою $z_{m_j} \notin Z_{m_j} \supseteq Z_m$ для $m_j \geq m$. Отримана суперечність показує, що K справді лежить у деякому дограничному просторі Z_m.□

З твердження 2.3 негайно випливає наступний результат.

Наслідок 2.4. *Кожен гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір є супер-σ-метризовним.*

3. Зараз ми встановимо одну властивість відображень, неперервних відносно другої змінної, зі значеннями в гаусдорфових сильно σ-метризовних просторах.

Твердження 3.1. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір, Z – гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно другої змінної, і*

$$A_m = \{x \in X : f^x(Y) \subseteq Z_m\}$$

для кожного номера m. Тоді:

(i) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X$;

(ii) якщо f до того ж є неперервним і відносно першої змінної (тобто $f \in CC(X \times Y, Z)$), то множини A_m є замкненими в X.

Доведення. (i). Покажемо, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X$. Включення $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq X$ очевидне. Встановимо обернене включення. Нехай $x \in X$. Множина $f^x(Y)$ є компактною в Z як образ компактної множини Y при неперервному відображенні $f^x : Y \to Z$. Тоді за твердженням 2.3 існує такий номер m, що $f^x(Y) \subseteq Z_m$. Отже, $x \in A_m$, і включення $X \subseteq A_m$ встановлено. Таким чином, справді, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X$.

(ii). Нехай $f \in CC(X \times Y, Z)$ і $m \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що $A_m = \bigcap\limits_{y \in Y} f_y^{-1}(Z_m)$. Множина $f_y^{-1}(Z_m)$ є замкненою в X як прообраз замкненої множини Z_m при неперервному відображенні $f_y : X \to Z$. Таким чином, множина A_m є замкненою в X як перетин замкнених в X множин $f_y^{-1}(Z_m)$. □

4. Для встановлення властивості Гана в основних теоремах нам буде потрібен наступний результат.

Твердження 4.1. *Нехай X, Y, Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, множини U_m – відкриті в X для кожного номера m, множина $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m$ – залишкова в X, $g_m = f|_{U_m \times Y}$, причому множина $C_Y(g_m)$ є залишковою в U_m для кожного номера m. Тоді множина $C_Y(f)$ є залишковою в X.*

Доведення. Покажемо, що множина $B = X \setminus C_Y(f)$ першої категорії в X. Покладемо $F = X \setminus G$. Тоді

$$B = (B \cap F) \cup (B \cap G) = (B \cap F) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} B \cap U_m).$$

Оскільки множини U_m відкриті в X для кожного номера m, то

$$C_Y(g_m) = U_m \cap C_Y(f).$$

Тому $B_m = B \cap U_m = U_m \setminus C_Y(g_m)$, отже, B_m – множина першої категорії в U_m (для кожного номера m), а значить, і в X (адже множини $C_Y(g_m)$ залишкові в U_m). Звідси випливає, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B \cap U_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ – множина першої категорії в X як об'єднання таких множин. Далі, множина F – першої категорії в X (оскільки G залишкова в X). Тому $B \cap F$ – множина першої категорії в X. Таким чином, B – множина першої категорії в X (як об'єднання таких множин), а значить, $C_Y(f)$ – залишкова в X множина. □

5. Ми будемо використовувати наступний результат про множину точок неперервності на вертикалях відображень з класу $CC(X \times Y, \mathbb{R})$(див., наприклад, [2, §2.1]):

Твердження D. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір і $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$. Тоді $C_Y(f)$ є G_δ-множиною в X.*

Крім того, нам буде потрібний один результат Сан-Ремо [3].

Теорема E. *Кожен цілком регулярний наміоковий простір є берівським.*

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Твердження 5.1. *Нехай X – цілком регулярний наміоковий простір і G – відкритий підпростір X. Тоді G є наміоковим простором.*

Доведення. Нехай Y – компакт і $g : G \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервне відображення. Нам треба довести, що $C_Y(g)$ містить всюди щільну G_δ-множину в G. Але, за теоремою D множина $C_Y(g)$ є типу G_δ в G. Тому залишається показати, що множина $C_Y(g)$ є всюди щільною в G. Для цього візьмемо відкриту непорожню в G множину H і покажемо, що

$$H \cap C_Y(g) \neq \emptyset$$

Нехай $x_0 \in H$. Оскільки X – регулярний простір, то в ньому існує база замкнених околів точки x_0. Тому існує відкритий в X окіл U точки x_0, такий, що

$$x_0 \in U \subseteq \overline{U} \subseteq H \subseteq G.$$

Далі, простір X є цілком регулярним, тому існує така неперервна функція $h : X \to [0, 1]$, що $h(x_0) = 1$ і $h(x) = 0$ на $X \setminus U$. Визначимо функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} h(x)g(x,y), & (x,y) \in G \times Y, \\ 0, & (x,y) \notin G \times Y \end{cases}$$

і покажемо, що $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$. Нехай $c = (a, b) \notin G \times Y$. Тоді $a \notin \overline{U}$, бо $\overline{U} \subseteq G$ і $a \notin G$. Множина $W = (X \setminus \overline{U}) \times Y$ є відкритою в $X \times Y$ і $f(x, y) = 0$ на W, адже $h(x) = 0$ на $X \setminus \overline{U}$. Оскільки $c \in W$, то f неперервна в точці c навіть за сукупністю змінних, а значить, вона буде й нарізно неперервною в цій точці. Нехай тепер $c = (a, b) \in G \times Y$. Перевіримо спочатку неперервність горизонтального розрізу $f_b : X \to \mathbb{R}$ в точці a. Очевидно, що $(f_b|_G)(x) = h(x)g_b(x)$ для кожного $x \in G$. Таким чином, звуження $f_b|_G$ є неперервним як добуток неперервних функцій $h|_G$ і g_b. Зокрема, воно є неперервним у точці a. Оскільки множина G є відкритою в X, то розріз f_b є неперервним в точці a. Тепер покажемо, що вертикальний розріз $f^a : Y \to \mathbb{R}$ є неперервним у точці b. Очевидно, що функція $f^a(y) = g^a(y)h(a)$ є неперервною як добуток неперервної функції $g^a(y)$ на константу $h(a)$. Зокрема, розріз f^a є неперервним в точці b. Таким чином, справді $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$. Оскільки X – наміоковий простір, то $C_Y(f)$ містить всюди щільну G_δ-множину в X, а значить, множина $C_Y(f)$ сама є всюди щільною в X. Введемо в розгляд множину

$$U_0 = \{x \in X : h(x) > 0\}.$$

Зрозуміло, що множина U_0 відкрита і $x_0 \in U_0 \subseteq U$. Оскільки $\overline{C_Y(f)} = X$, то існує точка $a \in U_0 \cap C_Y(f)$. На множині $U_0 \times Y$ маємо: $f(x, y) = h(x)g(x, y)$, причому $h(x) > 0$ на U_0. Нехай $y_0 \in Y$. Тоді з неперервності функції f в точці (a, y_0) випливає неперервність функції g в цій точці, адже U_0 – відкрита множина, $(a, y_0) \in U_0 \times Y$ і

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{h(x)} \text{ на } U_0 \times Y,$$

тобто g подається у вигляді частки неперервної і додатної функцій. Таким чином, $\{a\} \times Y \subseteq C(g)$, тобто $a \in C_Y(g)$. Оскільки $a \in U_0 \subseteq U \subseteq H$, то $a \in H \cap C_Y(g)$, отже, $H \cap C_Y(g) \neq \emptyset$. Таким чином, $C_Y(g)$ є всюди щільною G_δ-множиною в G. $\square$

Далі нам буде потрібний ще один результат.

Теорема F [11]. *Нехай X – топологічний простір, який подається у вигляді зліченного об'єднання замкнених в ньому множин F_m і $G_m = \mathrm{int} F_m$ для кожного номера m. Тоді множина $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$ є залишковою в X.*

Наступний результат показує, що в теоремі А можна замінити метризовний простір значень Z на гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір у випадку, коли X – цілком регулярний наміоковий простір.

Теорема 5.2. *Нехай X – цілком регулярний наміоковий простір, Y – компакт і Z – гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq N(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Нехай $f \in CC(X \times Y, Z)$, $m \in \mathbb{N}$ і $A_m = \{x \in X : f^x(Y) \subseteq Z_m\}$. За твердженням 3.1 множини A_m є замкненими в X і $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X$. Покладемо далі $U_m = \mathrm{int} A_m$ і $g_m = f|_{U_m \times Y}$. Зрозуміло, що $f(U_m \times Y) \subseteq f(A_m \times Y) \subseteq Z_m$ і звуження g_m залишаються нарізно неперервними. Отже, $g_m \in CC(U_m \times Y, Z_m)$. За твердженням 5.1 відкрита множина U_m буде наміоковим простором в індукованій з X топології. Тому за теоремою А множина $C_Y(g_m)$ містить всюди щільну G_δ-множину в U_m, а значить, множина $C_Y(g_m)$ є залишковою в U_m. Крім того, за теоремою F множина $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m$ є залишковою в X. Отже, за твердженням 4.1, множина $C_Y(f)$ є залишковою в X. За теоремою E простір X є берівським, а кожна залишкова множина в берівському просторі містить всюди щільну G_δ-множину. Тому $C_Y(f)$ є містить всюди щільну G_δ-множину в X. $\square$

Аналогічними міркуваннями доводиться наступний результат.

Теорема 5.3. *Нехай X – топологічний простір, кожен відкритий підпростір якого є наміоковим, Y – компакт і Z – гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq H(X \times Y, Z)$.*

У випадку, коли Y є конаміоковим компактом, отримується наступний результат, який узагальнює теорему В на випадок гаусдорфового сильно σ-метризовного простору значень Z.

Теорема 5.4. *Нехай X – топологічний простір, Y – конаміоковий компакт і Z – гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір. Тоді $CC(X \times Y, Z) \subseteq H(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Нехай $f \in CC(X \times Y, Z)$, $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \{x \in X : f^x(Y) \subseteq Z_m\}$, $U_m = \mathrm{int} A_m$ і $g_m = f|_{U_m \times Y}$. Зрозуміло, що і в цьому випадку множини A_m залишаються замкненими в X і $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X$. Аналогічно, за теоремою F множина $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m$ є залишковою в X. Крім того, міркуваннями, аналогічними тим, що проводились в ході доведення теореми 5.2, доходимо висновку, що $g_m \in CC(U_m \times Y, Z_m)$. Оскільки Y – конаміоковий простір, а Z_m – метризовний, то з теореми В випливає, що множина $C_Y(g_m)$ є залишковою в U_m. Тоді за твердженням 4.1 маємо, що множина $C_Y(f)$ є залишковою в X.

6. Нагадаємо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і для довільних околів U і V точок x_0 і y_0 відповідно у просторах X і Y існує точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Кажуть, що f *горизонтально квазінеперервне*, якщо воно є таким у кожній точці $p \in X \times Y$. Символом $K_hC(X \times Y, Z)$ ми позначаємо клас усіх горизонтально квазінеперервних відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної.

Для доведення основного результату цього пункту нам буде потрібна наступна лема з [7].

Лема 6.1. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, U і V – відкриті множини відповідно в X і Y, $A \subseteq X$ і $U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Наступний результат показує можливість заміни метризовного простору значень Z в теоремі С на гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір.

Теорема 6.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – компакт Кемпістого і Z – гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір. Тоді $KC(X \times Y, Z) \subseteq H(X \times Y, Z)$.*

Доведення. Нехай $f \in KC(X \times Y, Z)$,

$m \in \mathbb{N}$ і $A_m = \{x \in X : f^x(Y) \subseteq Z_m\}$. За твердженням 3.1 маємо, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = X$, але множини A_m не обов'язково замкнені в X. Покладемо $F_m = \overline{A_m}$, $U_m = \mathrm{int} F_m$ і $g_m = f|_{U_m \times Y}$. Зрозуміло, що тоді $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = X$. А значить, за теоремою F множина $G = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m$ є залишковою в X. Ясно, що звуження g_m залишається KC-функцією. Покажемо, що $g_m(U_m \times Y) \subseteq Z_m$. За побудовою множин A_m маємо, що

$$f(A_m \times Y) \subseteq Z_m.$$

Покладемо $A = U_m \cap A_m$. Тоді $A \subseteq U_m \subseteq \overline{A}$. Оскільки $KC(X \times Y, Z) \subseteq K_hC(X \times Y, Z)$, то з леми 6.1 випливає, що

$$g_m(U_m \times Y) = f(U_m \times Y) \subseteq \overline{f(A \times Y)}.$$

Тоді

$$g_m(U_m \times Y) = f(U_m \times Y) \subseteq \overline{f(A \times Y)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(A_m \times Y)} \subseteq \overline{Z_m} = Z_m.$$

Таким чином, $g_m \in KC(U_m \times Y, Z_m)$. З теореми C випливає, що множина $C_Y(g_m)$ є залишковою в U_m. А значить, за твердженням 4.1. множина $C_Y(f)$ є залишковою в X. $\square$

Зауважимо, що висновки теорем 5.2-5.4 і 6.2 справедливі і в тому випадку, коли Z є супер-σ-метризовним простором.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору Маслюченку Володимиру Кириловичу за постійну увагу до роботи та корисні поради.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, N1. – P.167-176.

2. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.

3. *Saint Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **87**, N3. – P.499-504.

4. *V.V.Mykhaylyuk.* The Namioka property of KC-functions and Kempisty spaces // Topology and its Applications. – 2006. – **153**. – P.2455-2461.

5. *Christensen J.P.R.* Joint continuity of separately continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – **82**, N3. – P.455-461.

6. *A.Bouziad.* Notes sur la Propriete de Namioka // Transactions of the American Mathematical Society. - 1994. - **344**, №2. - P.873-883.

7. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І.* Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 2002. – **45**, N1. – С.42-46.

8. *Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.* Точкова розривність K_hK-функцій зі значеннями в σ-метризовних просторах // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 191-192. Математика.– Чернівці: Рута, 2004.– С. 103-106.

9. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теорем Дебса про многозначні відображення // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 191-192. Математика.– Чернівці: Рута, 2004.– С. 61-66.

10. *Енгелькінг Р.* Топология. Т.1.– М.: Мир, 1966. – 594с.

11. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, N2. – P.191-203.