УДК 517.9

©2007 р. І.Д.Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЛОБАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АРГУМЕНТОМ, ЩО ВІДХИЛЯЄТЬСЯ, І МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Розглянуто систему диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, і малим параметром при частині похідних. Наведено умови, за яких глобальними розв'язками системи диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, і малим параметром є розв'язки системи диференціальних рівнянь, без відхилення аргументу.

The article touches upon a system of differential equations with deviating argument and with a small parameter at a part of derivatives. We present conditions under which global solutions of a system of differential equations with deviating argument and with a small parameter are solutions of a system of differential equations without deviating argument.

Глобальні розв'язки диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, досліджувалися багатьма авторами (див. [1-3] та ін.). У роботі [4] проблема глобальних розв'язків для рівняння

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + B(x)u(x+\lambda) + f(x) \quad (1)$$

розв'язана шляхом побудови диференціального рівняння

$$\frac{du(x)}{dx} = C(x)u(x) + g(x),$$

всі розв'язки якого є глобальними розв'язками рівняння (1).

У даній роботі для системи диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, і малим параметром при частині похідних вигляду

$$\frac{du}{dx} = A_0(x)u(x) + A_1(x)u(x+\lambda), \quad (2)$$

$$\varepsilon\frac{dv}{dx} = (B(x) + \varepsilon B_0(x))v(x) + \\ + B_1(x)v(x+\varepsilon\mu) + \varepsilon B_2(x)u(x), \quad (3)$$

запропоновано аналогічний підхід. Тут $u \in R^n$, $v \in R^2$, $\lambda \in R$, $\mu \in R$, $A_0(x)$, $A_1(x)$, $B(x)$, $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ – матричні функції визначені для $x \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малий параметр. Матриця $B(x)$ – матриця рівняння Ейрі [5]

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця $B(x)$ при $x = 0$ має кратне власне значення. У цьому випадку кажуть, що точка $x = 0$ є точкою повороту [5].

Побудуємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du}{dx} = C(x)u(x), \quad (4)$$

$$\varepsilon\frac{dv}{dx} = (D(x)+\varepsilon B_0(x))v(x)+\varepsilon D_1(x)u(x), \quad (5)$$

всі розв'язки якої є глобальними розв'язками системи (2), (3). Тут $C(x), D(x)$, $D_1(x)$ - деякі матричні функції.

У роботі [6] система (4), (5) зводиться до системи ще простішого вигляду, для якої побудовано асимптотичні розклади розв'язку. У праці [7] узагальнено одержані в [6] результати для системи (4), (5) з коефіцієнтами, що залежать від малого параметра. Ця методика дає змогу одержати розв'язки для ширшого класу задач, порівняно з результатами монографії [5].

Розглянемо спочатку рівняння (4). Припускатимемо, що $C(x)$ - вимірна на R і обмежена функція ($\|C(x)\| \leqslant M$). Тоді загальний розв'язок рівняння (4) дається формулою Коші

$$u(x) = \Omega_\tau^x(C)u_0, \qquad (6)$$

де $x \in R, \tau \in R$, стала $u_0 \in R^n$. Рівняння

$$\Omega_\tau^x(C) = I + \int_\tau^x C(s)ds +$$

$$+ \int_\tau^x C(s) \int_\tau^s C(s_1)ds_1 ds + ..$$

$$+ \int_\tau^x C(s) \int_\tau^s C(s_1).. \int_\tau^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{s_{n-1}}..ds_1 ds + ..$$

визначає фундаментальну матрицю розв'язків рівняння (4).

Функція (6) задовольнятиме рівняння (2), якщо

$$\frac{du(x)}{dx} = C(x)\Omega_\tau^x(C)u_0 =$$

$$= A_0(x)\Omega_\tau^x(C)u_0 + A_1(x)\Omega_\tau^{x+\lambda}(C)u_0, \qquad (7)$$

$$x \in R.$$

Поклавши в тотожності (7) значення $u_0 = 1$, одержимо

$$C(x)\Omega_\tau^x(C) =$$

$$= A_0(x)\Omega_\tau^x(C) + A_1(x)\Omega_\tau^{x+\lambda}(C), \quad x \in R. \qquad (8)$$

Із властивостей матриці $\Omega_\tau^x(C)$ випливає, що рівність (8) правильна лише у випадку, коли

$$C(x) = A_0(x) + A_1(x)\Omega_x^{x+\lambda}(C), \quad x \in R. \qquad (9)$$

Таким чином, ми отримали рівняння для знаходження матриці $C(x)$.

Тепер розглянемо рівняння (5). Як і в попередньому випадку, припускатимемо, що $D(x)$ і $D_1(x)$ – вимірні на R і обмежені функції ($\|D(x)\| \leqslant L, \|D_1(x)\| \leqslant P$). Тоді загальний розв'язок рівняння (5) дається формулою Коші

$$v(x) = \hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)v_0 +$$

$$+ \int_\tau^x \hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)D_1(s)u(s)ds, \qquad (10)$$

де $x \in R, \tau \in R$, стала $v_0 \in R^2$ і

$$\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D + B_0) = I + \int_\tau^x (\varepsilon^{-1}D(s) + B_0(s))ds +$$

$$+ \int_\tau^x (\varepsilon^{-1}D(s) + B_0(s))$$

$$\int_\tau^s (\varepsilon^{-1}D(s_1) + B_0(s_1)))ds_1 ds + ...$$

$$... + \int_\tau^x (\varepsilon^{-1}D(s) + B_0(s))...$$

$$\int_\tau^{s_{n-2}} (\varepsilon^{-1}D(s_{n-1}) + B_0(s_{n-1}))ds_{s_{n-1}}..ds + .. \qquad (11)$$

Ряд (11) визначає фундаментальну матрицю розв'язків однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (5).

Знову ж таки, функція (10) буде задовольняти рівняння (3), якщо

$$\varepsilon\frac{dv(x)}{dx} = (D(x) + \varepsilon B_0(x))\big[\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)v_0 +$$

$$+ \int_\tau^x \hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)D_1(s)u(s)ds\big] + \varepsilon D_1(x)u(x) =$$

$$= (B(x) + \varepsilon B_0(x))\big[\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)v_0 +$$

$$+ \int_\tau^x \hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)D_1(s)u(s)ds\big] +$$

$$+ B_1(x)\big[\hat{\Omega}_\tau^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D + B_0)v_0 +$$

$$+ \int_\tau^{x+\varepsilon\mu} \hat{\Omega}_s^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D + B_0)D_1(s)u(s)ds\big] +$$

$$+ \varepsilon B_2(x)u(x), \quad x \in R. \qquad (12)$$

Поклавши в тотожності (7) значення $v_0 = 0$, одержимо

$$(D(x) + \varepsilon B_0(x)) \int_\tau^x \hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D + B_0)D_1(s)u(s)ds +$$

$$+\varepsilon D_1(x)u(x) = (B(x)+\varepsilon B_0(x))\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{x}\hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)D_1(s)u(s)ds+$$

$$+B_1(x)\int\limits_{\tau}^{x+\varepsilon\mu}\hat{\Omega}_s^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0)D_1(s)u(s)ds+$$

$$+\varepsilon B_2(x)u(x),\quad x\in R. \tag{13}$$

Враховуючи (12) і (13), в результаті отримаємо рівняння:

$$(D(x)+\varepsilon B_0(x))\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)=$$

$$=(B(x)+\varepsilon B_0(x))\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)+$$

$$+B_1(x)\hat{\Omega}_\tau^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0),\quad x\in R. \tag{14}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, матимемо

$$D(x)\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)=$$

$$=B(x)\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)+$$

$$+B_1(x)\hat{\Omega}_\tau^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0),\quad x\in R. \tag{15}$$

З (15), враховуючи властивості матриці $\hat{\Omega}_\tau^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)$, одержимо

$$D(x)=B(x)+B_1(x)\hat{\Omega}_x^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0),$$

$$x\in R. \tag{16}$$

Отримано рівняння для знаходження матриці $D(x)$. Залишилося знайти представлення матриці $D_1(x)$. Для цього підставимо (16) у (13) і отримаємо, що (13) виконується у випадку, коли для $x\in R$:

$$\varepsilon D_1(x)u(x)=$$

$$=(B(x)+\varepsilon B_0(x))\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{x}\hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)D_1(s)u(s)ds+$$

$$+B_1(x)\int\limits_{\tau}^{x+\varepsilon\mu}\hat{\Omega}_s^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0)D_1(s)u(s)ds+$$

$$+\varepsilon B_2(x)u(x)-$$

$$-(B(x)+B_1(x)\hat{\Omega}_\tau^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0)+\varepsilon B_0(x))\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{x}\hat{\Omega}_s^x(\varepsilon^{-1}D+B_0)D_1(s)u(s)ds.$$

Враховуючи (6), для визначення матриці $D_1(x)$ отримаємо рівняння:

$$D_1(x)=\varepsilon^{-1}(\Omega_\tau^x(C))^{-1}B_1(x)\times$$

$$\times\int\limits_{x}^{x+\varepsilon\mu}\hat{\Omega}_s^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D+B_0)D_1(s)\Omega_\tau^x(C)ds+B_2(x),$$

$$x\in R. \tag{17}$$

Теорема. *Нехай* A_0,A_1,B,B_0,B_1,B_2 *- визначені і вимірні (за Лебегом) на* R *матриці, що задовольняють нерівності*

$$\|A_0(x)\|\leqslant\alpha_0,\quad \|A_1(x)\|\leqslant\alpha_1,\quad \|B(x)\|\leqslant\beta,$$

$$\|B_0(x)\|\leqslant\beta_0,\quad \|B_1(x)\|\leqslant\beta_1,$$

$$\|B_2(x)\|\leqslant\beta_2,\quad x\in R,$$

і такі, що

$$|\lambda|\alpha_1 e^{|\lambda|\alpha_0+1}<1, \tag{18}$$

$$|\mu|\beta_1 e^{|\mu|(\beta+\varepsilon_0\beta_0)+1}<1. \tag{19}$$

Нехай також для матриціанта системи (4) справедлива оцінка $\|\Omega_\tau^x(C)\|\leqslant N$.

Тоді існують визначені і вимірні на R *розв'язки* C,D,D_1 *рівнянь (9), (16), (17), які задовольняють нерівності*

$$\|C(x)\|\leqslant M,\quad \|D(x)\|\leqslant L,$$

$$\|D_1(x)\|\leqslant P,\quad x\in R, \tag{20}$$

де M,L,P *- деякі сталі, що залежать від* $|\lambda|,|\mu|,\alpha_0,\alpha_1,\beta,\beta_0,\beta_1,\beta_2$.

Тут норма вектора евклідова, норма матриці узгоджена із евклідовою нормою вектора.

Доведення проведемо згідно із запропонованою в [4] схемою.

Розглянемо рівняння (9) і зробимо заміну змінних

$$C=A_0+A_1Z. \tag{21}$$

Заміна (21) зводить рівняння (9) до вигляду
$$Z(x) = \Omega_\tau^{x+\lambda}(A_0 + A_1 Z), \qquad (22)$$
розв'язки якого є неперервними функціями.

За аналогією з [4] визначимо оператор S
$$SZ(x) = \Omega_\tau^{x+\lambda}(A_0 + A_1 Z) \qquad (23)$$
у просторі $C(m)$ матриць $Z = Z(x)$, заданих та неперервних на R і таких, що
$$\|Z\|_0 = \sup_{x\in R} \|Z(x)\| \le m.$$
$SZ(x)$ є неперервною на R матрицею і для $SZ(x)$ правильними є оцінки
$$\|SZ\|_0 = \sup_{x\in R} \Omega_\tau^{x+\lambda}(\|A_0\| + \|A_1\| m) =$$
$$= e^{|\lambda|(\alpha_0+\alpha_1 m)},$$
$$\|SZ_1(x) - SZ(x)\|_0 \le$$
$$\le |\lambda|\alpha_1 e^{|\lambda|(\alpha_0+\alpha_1 m)} \|Z_1(x) - Z(x)\|_0, \quad x \in R.$$
При виконанні нерівності (18) для значень m, що задовольняють оцінку
$$m < \frac{1}{|\lambda|\alpha_1},$$
оператор S, що заданий на $C(m)$ рівністю (23), відображає простір $C(m)$ в себе і є стискаючим.

Простір $C(m)$ щодо норми $\|\cdot\|_0 = \sup_{x\in R}\|\cdot\|$ є повним нормованим простором. Цього досить, щоб S мав в $C(m)$ єдину нерухому точку. Ця точка і є єдиним в $C(m)$ розв'язком рівняння (22).

Розглянемо тепер рівняння (16).

Зробимо заміну змінних
$$D = B + B_1 Y \qquad (24)$$
та отримаємо відносно Y рівняння
$$Y(x) = \hat{\Omega}_\tau^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}(B + B_1 Y) + B_0), \qquad (25)$$
розв'язки якого є неперервними функціями.

Визначимо оператор S_1 в просторі $C(l)$ матриць $Y = Y(x)$, заданих та неперервних на R і таких, що
$$\|Y\|_0 = \sup_{x\in R} \|Y(x)\| \le l.$$
$S_1 Y$ є неперервною на R матрицею, для якої є правильними оцінки
$$\|S_1 Y\|_0 =$$
$$= \sup_{x\in R} \hat{\Omega}_\tau^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}(\|B\| + \|B_1\|\|Y\|) + \|B_0\|) =$$
$$= e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)},$$
$$\|S_1 Z_1(x) - S_1 Z(x)\|_0 \le$$
$$\le |\mu|\beta_1 e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)} \|Y_1(x) - Y(x)\|_0, \quad x \in R.$$
При виконанні (19) для значень l, які задовольняють нерівність
$$l < \frac{1}{|\mu|\beta_1}, \qquad (26)$$
оператор S_1, що заданий на $C(l)$, відображає $C(l)$ в себе і є стискаючим.

Простір $C(l)$ щодо норми $\|\cdot\|_0 = \sup_{x\in R}\|\cdot\|$ є повним нормованим простором. Цього досить, щоб S_1 мав у просторі $C(l)$ єдину нерухому точку. Ця точка і є єдиним в $C(l)$ розв'язком рівняння (25).

Нарешті розглянемо рівняння (17).

Зробимо в ньому заміну
$$D_1 = B_2 + \varepsilon^{-1}(\Omega_\tau^x(C))^{-1} B_1 z.$$
Тоді для z отримаємо рівняння
$$z = \int_0^{\varepsilon\mu} \hat{\Omega}_{x+s}^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D + B_0) B_2(x+s)\Omega_\tau^{x+s}(C)ds +$$
$$+\varepsilon^{-1} \int_0^{\varepsilon\mu} \hat{\Omega}_{x+s}^{x+\varepsilon\mu}(\varepsilon^{-1}D + B_0) B_1(x+s) z(x+s) ds. \qquad (27)$$
Визначимо оператор S_2 у просторі $C(M)$ функцій $z = z(x)$, заданих та неперервних на R і таких, що
$$\|z\|_0 = \sup_{x\in R} \|z(x)\| \le M.$$
$S_2 z(x)$ є неперервною на R функцією. Більш того, для S_2 справедливі оцінки
$$\|S_2 z\|_0 \le |\mu| e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)}(\beta_2 N\varepsilon_0 + \beta_1 M),$$
$$\|S_2 z_1(x) - S_2 z(x)\|_0 \le$$

$$\leq |\mu|\beta_1 e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)}\|z_1(x)-z(x)\|_0, \quad x\in R,$$

де z_1, z - довільні функції із C(M).

Звідси, отримаємо нерівність для визначення M:

$$|\mu|e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)}(\beta_2 N\varepsilon_0+\beta_1 M)\leqslant M.$$

На підставі умов (19) і (26) для значень M, що задовольняють нерівність

$$M\geq \frac{\varepsilon_0|\mu|e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)}\beta_2 N}{1-|\mu|\beta_1 e^{|\mu|(\beta+\beta_1 l+\varepsilon_0\beta_0)}},$$

оператор S_2 відображає простір $C(M)$ в себе і є стискаючим. Простір $C(M)$ відносно норми $\|\cdot\|_0$ є повним нормованим простором. Оператор S_2 має у просторі $C(M)$ єдину нерухому точку. Ця точка і є єдиним в $C(M)$ розв'язком рівняння (27).

Теорему доведено.

Таким чином, якщо всі розв'язки системи (4), (5) є глобальними розв'язками системи (2), (3), то матриця $C(x)$ задовольняє рівняння (9), матриця $D(x)$ - рівняння (16), а матриця $D_1(x)$ - рівняння (17).

Очевидним є й обернений факт. Якщо вимірні на R функції $C(x), D(x)$ і $D_1(x)$ задовольняють рівняння (9), (16) і (17) відповідно, а також нерівність (20), то функції (6) і (10) є глобальними розв'язками системи (2), (3).

Звідси випливає, що необхідною і достатньою умовою того, щоб усі розв'язки системи рівнянь (4), (5) були глобальними розв'язками системи рівнянь (2), (3), є розв'язуваність рівнянь (9), (16), (17) у просторі вимірних на R і таких, що задовольняють нерівність (20), функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра Ляпунова-Пуанкаре в теории систем с запаздыванием // Инженерный журнал – 1961. – 1, выпуск 2. – С. 3 – 15.

2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнений с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 349 с.

3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

4. Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 5. – С. 631 – 640.

5. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Мир, 1968. – 464 с.

6. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 11. – С. 1505 – 1516.

7. Скутар І. Д. Зведення однієї системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром до простішого вигляду. // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 239. Математика. – 2005. – С.112-117.