УДК 517.95

©2007 р. Ю.І.Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА МАЛОЮ ДИСПЕРСІЄЮ

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та доведено теорему про оцінку його точності.

Algorithm of constructing asymptotic solutions to Cauchy problem for singular perturbed Korteweg-de Vries equation with varying coefficients is proposed. Theorem on estimation of its precision is proved.

1. Вступ. Рівняння Кортевега-де Фріза [1], запропоноване в 1895 році Д.Кортевегом і Дж. де Фрізом для математичного опису хвилі трансляції [2], відіграє визначну роль в сучасній математиці та фізиці. Перш за все, це пов'язано з тим, що дане рівняння моделює низку важливих процесів в теорії плазми, фізиці твердого тіла, а також в інших галузях природничих наук.

Рівняння Кортевега-де Фріза спонукало зародження та розвиток важливого нині розділу сучасної математичної фізики – так званої теорії оберненої задачі розсіювання, яка дозволила знайти точні розв'язки низки важливих нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, нелінійного рівняння Шредінгера, рівняння Кадомцева-Петвіашвілі, ланцюжків Ленгмюра, Тоди [3–7] та інш., які отримали назву інтегровних систем. Проте, не дивлячись на те, що теорія оберненої задачі розсіювання є потужним математичним засобом для побудови в явному вигляді розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь як звичайних, так із частинними похідними, методи цієї теорії не завжди дозволяють знайти розв'язки таких рівнянь у випадку, коли їх коефіцієнти є змінними.

У багатьох випадках важливе значення має вивчення так званих систем з малою дисперсією [8, 9], тобто систем, які описуються сингулярно збуреними диференціальними рівняннями із частинними похідними. Ефективними методами дослідження таких систем є асимптотичні методи, за допомогою яких можна побудувати наближені (асимптотичні), зокрема, так звані солітоноподібні розв'язки цих систем.

В [8, 9] для рівняння Кортевега-де Фріза з малою дисперсією було побудовано однофазові солітоноподібні розв'язки, в [10, 11] подібні розв'язки було побудовано у випадку, коли коефіцієнти рівняння Кортевега-де Фріза подаються у вигляді степеневих за малим параметром рядів. При цьому було показано, що вигляд асимптотичного ряду суттєво залежить від степеня малого параметра при старшій похідній: потрібно розглядати випадки, коли малий параметр при старшій похідній має першу степінь [10], парну степінь [11] та непарну, більшу ніж один, степінь [11].

В [12–14] побудовано однофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза з малою дисперсією у випадку, коли коефіцієнти рівняння Кортевега-де Фріза подаються у вигляді степеневих за малим параметром рядів. Наявність початкової умови викликає необхідність *уточнювати* шляхом додавання додаткових членів до асимптотичного розкладу для розв'язку відповідного рівняння Кортевега-де Фріза, що певним чином ускладнює дану задачу. При цьому також, як і у випадку побудови асимптотичного ряду для однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза, вигляд асимптотичного ряду для однофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші для даного рівняння суттєво залежить від степеня малого параметра при старшій похідній: потрібно розглядати випадки, коли малий параметр при старшій похідній має першу степінь [12], парну степінь [12, 13] та непарну, більшу ніж один, степінь.

В даній статті розглядається задача про побудову однофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші для рівняння рівняння Кортевега-де Фріза у випадку, коли малий параметр при старшій похідній має непарну, більшу ніж один, степінь. Нами подано алгоритм побудови асимптотичного ряду для такого розв'язку та встановлено оцінку для його точності.

2. Постановка задачі. Основні припущення і позначення. Розглядається рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду:

$$\varepsilon^{2p+1}u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad p \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p}\right), \tag{2}$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x), b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $k = 0, 1, \ldots$; функція $f(\eta), \eta \in \mathbf{R}$, належить простору Шварца; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Припускається, що незбурене ($\varepsilon = 0$) для (1) рівняння

$$a_0(x)u_t + b_0(x)uu_x = 0 \tag{3}$$

має нескінченно-диференційовний в $\mathbf{R} \times [0;T] \setminus \Gamma$, де $\Gamma = \{(t,x) : x = \varphi(t),\ t \in [0;T]\}$ – деяка крива, розв'язок, який є розривним лише на деякій гладкій кривій Γ. Такі розв'язки для рівняння вигляду (3), як відомо, існують [8, 9].

Нехай $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R})$ – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, p рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконуються такі умови [8]:

1. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t) \in K; \tag{4}$$

2. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} \big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\big) = 0, \quad (x,t) \in K. \tag{5}$$

Позначимо $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний підпростір простору $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in (\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R})$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, p рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ додатково до умов (4), (5) виконується співвідношення

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0, \tag{6}$$

а через $G_2^+ = G_2^+(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R} \times [0;\Theta])$, де Θ – деяке дійсне додатне число, – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(\tau_1,\tau_2) \in \mathbf{R} \times [0;\Theta]$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, q_1, q_2 рівномірно щодо змінних (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$, виконується умова [13]

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty} \tau_1^r \frac{\partial^{q_1}}{\partial\tau_1^{q_1}}\frac{\partial^{q_2}}{\partial\tau_2^{q_2}}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau_1,\tau_2) = 0, \quad (x,t) \in K, \quad \tau_2 \in [0;\Theta]. \tag{7}$$

3. Зображення асимптотичного розв'язку задачі Коші (1), (2). Можна показати, що наближений розв'язок задачі

Коші (1), (2) у вигляді асимптотичного ряду, який задовольняє асимптотичну умову

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \qquad (8)$$

де $Y_N(x,t,\varepsilon)$ – N–та частинна сума шуканого розв'язку, визначається рівністю

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \Big[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1) + $$
$$+ W_j(\tau_1,\tau_2)\Big], \qquad (9)$$

в якій

$$u_1(x,t) \equiv V_1(x,t,\tau_1) \equiv W_1(\tau_1,\tau_2) \equiv u_3(x,t) \equiv$$
$$\equiv V_3(x,t,\tau_1) \equiv W_3(\tau_1,\tau_2) \equiv \quad \ldots \quad \equiv$$
$$\equiv u_{2p-1}(x,t) \equiv V_{2p-1}(x,t,\tau_1) \equiv$$
$$\equiv W_{2p-1}(\tau_1,\tau_2) \equiv 0, \qquad (10)$$

змінні τ_1, τ_2 визначені рівностями

$$\tau_1 = \frac{x-\varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p}, \quad \tau_2 = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p} \ .$$

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}}\ u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (8), а функція

$$V_N(x,t,\varepsilon) + W_N(x,t,\varepsilon) =$$
$$\sum_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}}\ [V_j(x,t,\tau_1) + W_j(\tau_1,\tau_2)]$$

– сингулярною частиною асимптотики (8), (9). При цьому функція $V_N(x,t,\varepsilon)$ визначена в деякому околі кривої Γ, а функція $W_N(x,t,\varepsilon)$ – в деякому околі зв'язної множини $\{(t,x) : t = 0, x \in \mathbf{R}\} \cup \{(t,x) : x = \varphi(t), t \in [0;T]\}$.

Число N вважаємо довільним, але фіксованим.

Формулу (9) за умови (10) можна записати таким чином

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{p} \varepsilon[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1) +$$
$$+ W_j(\tau_1,\tau_2)] + \sum_{j=2p+1}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}}\ [u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1) +$$
$$+ W_j(\tau_1,\tau_2)],$$

тобто асимптотичний розклад для розв'язку задачі (1), (2) спочатку здійснюється за цілими степенями малого параметра, а потім – за дробовими. Саме в цьому полягає відмінність даного випадку від розглянутих раніше [12, 13].

Означення [13]. *Якщо для розв'язку $u(x,t,\varepsilon)$ задачі Коші (1), (2) при будь-якому цілому числі $N \geq 0$ має місце зображення (8), (9), де $\varphi(t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1_x \times [0;T])$ – деяка скалярна дійсна функція; функції $u_j(x,t)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, – нескінченно диференційовні (в точках $t = 0$, $t = T$ розглядаються відповідно ліва та права похідні); $V_0(x,t,\tau_1) \in G_1^0$; $V_j(x,t,\tau_1) \in G_1$, $W_j(\tau_1,\tau_2) \in G_2^+$, $j = \overline{1, 2N+1}$, то функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичним однофазовим солітоноподібним розв'язком задачі Коші (1), (2). Функція $S(x,t) = x - \varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x,t,\varepsilon)$ визначає лінію розриву розв'язку $u(x,t,\varepsilon)$ задачі Коші (1), (2) при $\varepsilon = 0$.*

Коефіцієнти асимптотичного розкладу (8), (9) визначаються із рівності

$$\varepsilon^{2p+1}\left[\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3} + \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2 \partial \tau_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{\varepsilon^{2p+1}}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x \partial \tau_1^2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^{3p+1}}\frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1^3}\right] =$$
$$= a(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial t} + \frac{\partial V_N}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p}\frac{\partial V_N}{\partial \tau_1}\varphi'(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p}\frac{\partial V_N}{\partial \tau_2}\right) + b(x,\varepsilon)\,(U_N + V_N) \times \qquad (11)$$

$$\times \left(\frac{\partial U_N}{\partial x} + \frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p} \frac{\partial V_N}{\partial \tau_1} \right) + g_N(x,t,\varepsilon),$$

де $g_N(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ – деяка нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, що визначається рекурентним (стосовно j) чином за функціями $Y_j(x,t,\varepsilon)$, $j = \overline{0, N-1}$.

Спрямувавши τ_1 до $+\infty$ в лівій та правій частинах (11) та врахувавши (8), (9), після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε отримаємо деяку систему диференціальних рівнянь для функцій $u_j(x,t)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, що входять до регулярної частини асимптотики в (8), (9). Якщо додатково вважати, що справджується умова узгодження $u_0(0,0) = 0$, то регулярна частина асимптотики (8), (9) визначається функціями, які є розв'язками задач вигляду:

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0,$$

$$u_0(0,0) = 0; \qquad (12)$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_j =$$

$$= f_j(x,t,u_0,u_1,\ldots,u_{j-1}), \qquad (13)$$

де $j = \overline{1, 2N+1}$. Зауважимо, що розв'язок задач (12), (13) існує при досить загальних умовах, а тому задачу про знаходження регулярної частини асимптотики (8) можна вважати розв'язаною.

4. Визначення сингулярної частини асимптотики $V_N(x,t,\varepsilon)$**.** Вважаючи відомими коефіцієнти регулярної частини асимптотики в (8), після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε (в лівій та правій частинах рівності (11)) з урахуванням рівнянь (12), (13), знаходимо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для визначення функцій $V_j(x,t,\tau_1)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, що входять до сингулярної частини асимптотики $V_N(x,t,\varepsilon)$. Ці функції визначаються в декілька кроків [11]: спочатку одержані диференціальні рівняння використовуються для знаходження функцій $V_j(x,t,\tau_1)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, на кривій розриву Γ, а потім – для продовження цих функцій в деякий 2μ–окіл кривої Γ – область $\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] : |x - \varphi(t)| < 2\mu\}$, де $\mu \in (0;1)$ – деяка (достатньо мала) стала. При цьому ми використовуємо в області $\Omega_\mu(\Gamma)$ зображення для (довільної) нескінченно диференційовної функції $g(x,t)$ у вигляді

$$g(\varphi(t) + \sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^p\ \tau_1, t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{j(p+\frac{1}{2})} \frac{1}{j!} \tau_1^j \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(x,t) \right) \Bigg|_{x=\varphi(t)} + O\left(\varepsilon^{(p+\frac{1}{2})(N+1)} \right). \qquad (14)$$

При цьому як область $\Omega_\mu(\Gamma)$, так і крива Γ поки що невідомі і визначаються дещо згодом.

4.1. Знаходження сингулярної частини асимптотики $V_N(x,t,\varepsilon)$ **на кривій** Γ**.** Позначимо

$$v_j^\Gamma = v_j^\Gamma(t,\tau_1) = V_j(x,t,\tau_1)\Bigg|_{x=\varphi(t)},$$

$$j = \overline{0, 2N+1}. \qquad (15)$$

Враховуючи (12), (13), з (11) одержуємо, що функції $v_j^\Gamma = v_j^\Gamma(t,\tau_1)$, $j = \overline{0, 2N+1}$, є розв'язками системи квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 v_0^\Gamma}{\partial \tau_1^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} - b_0(\varphi(t)) \times$$

$$\times \left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} + v_0^\Gamma \frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} \right] = 0, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^3 v_j^\Gamma}{\partial \tau_1^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_j^\Gamma}{\partial \tau_1} - b_0(\varphi(t)) \Bigg[u_0(\varphi(t),t) \times$$

$$\times \frac{\partial v_j^\Gamma}{\partial \tau_1} + \frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} v_j^\Gamma + v_0^\Gamma \frac{\partial v_j^\Gamma}{\partial \tau_1} \Bigg] = \mathcal{F}_j(t,\tau_1), \qquad (17)$$

де $j = \overline{1, 2N+1}$, функції

$$\mathcal{F}_j(t,\tau_1) = F_j(t, v_0^\Gamma(t,\tau_1), \ldots, v_{j-1}^\Gamma(t,\tau_1),$$

$$u_0(x,t), \ldots, u_j(x,t))\Bigg|_{x=\varphi(t)}$$

визначаються рекурентним чином і задовольняють умову (10).

Розв'язок рівняння (16) в просторі G_1^0 можна подати у вигляді [13]:

$$v_0^\Gamma(t,\tau_1) = A[\varphi] ch^{-2}\left((\tau_1 + C_0)\, H[\varphi]\right),$$

де

$$A[\varphi] = -2\frac{a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))},$$

$$H[\varphi] = \frac{2\sqrt{A[\varphi]}}{b_0(\varphi(t))},$$

при умові, що функція $\varphi = \varphi(t)$, визначена для $t \in [0;T]$ і для неї при всіх $t \in [0;T]$ виконуються нерівності $b_0(\varphi(t)) \neq 0$, $A[\varphi] > 0$. Необхідною і достатньою умовою розв'язності рівнянь (17) в просторі G_1 є умова ортогональності [13]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_j(t,\tau_1) v_0^\Gamma(t,\tau_1) d\tau_1 = 0, j = \overline{1, 2N+1}, \tag{19}$$

причому розв'язок рівняння (17) можна записати у вигляді

$$v_j^\Gamma(t,\tau_1) = \nu_j(t)\eta(t,\tau_1) + \psi_j(t,\tau_1),$$

де $\eta(t,\tau_1)$ – деяка функція з простору G_1 така, що $\lim\limits_{\tau_1\to-\infty} \eta(t,\tau_1) = 1$, $\psi_j(t,\tau_1) \in G_1^0$, $j = \overline{1, 2N+1}$.

Функція $\varphi(t)$ визначається [13] як розв'язок звичайного диференціального рівняння вигляду

$$a_0(\varphi)\frac{d}{dt}\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} + \left(2a_0'(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} - 2b_0'(\varphi)u_0(\varphi,t) - \right.$$

$$\left. - b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi}\right)\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} = 0, \tag{20}$$

яке можна отримати з умови ортогональності (19) при $j = 1$.

Вважаємо, що рівняння (20) має розв'язок, визначений при $t \in [0;T]$, який задовольняє початкову умову

$$\varphi(0) = 0. \tag{21}$$

4.2. Продовження сингулярної частини асимптотики $V_N(x,t,\varepsilon)$ в 2μ–окіл кривої Γ. Враховуючи (17), визначимо продовження функцій $v_j^\Gamma(t,\tau_1)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ за допомогою формул:

$$V_0(x,t,\tau_1) = v_0^\Gamma(t,\tau_1),\ \ V_j(x,t,\tau_1) = v_j^-(x,t)\times$$

$$\times\eta(t,\tau_1) + \psi_j(t,\tau_1),\quad j = \overline{1, 2N+1},$$

де $v_j^-(x,t)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, – деякі функції, що є розв'язками задач Коші вигляду:

$$\Lambda v_j^-(x,t) = f_j^-(x,t), \tag{22}$$

$$v_j^-(x,t)\bigg|_\Gamma = \nu_j(t), \tag{23}$$

де $j = \overline{1, 2N+1}$, а диференціальний оператор Λ має вигляд

$$\Lambda = a_0(x)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}.$$

Зазначимо, що диференціальне рівняння (22) для функцій $v_j^-(x,t)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, отримано з (11) за допомогою граничного переходу, коли $\tau_1 \to -\infty$.

Оскільки крива Γ при всіх $t \in [0;T]$ трансверсальна характеристикам оператора Λ, то згідно з теоремою Коші-Ковалевської початкова задача (22), (23) має розв'язок $v_j^-(x,t) \in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$, $j = \overline{1, 2N+1}$, принаймні в деякій області $\Omega_\mu(\Gamma)$ за умови, що число μ – достатньо мале. Надалі припускаємо, що задача Коші (22), (23) має розв'язок і в області $\{(x,t) : x - \varphi(t) \leq -\mu,\ t \in (0;T)\}$.

Зауваження 1. *Для функції* $u_0(x,t) + V_0(x,t,\tau_1)$ *мають місце співвідношення:*

$$u_0(x,t) + V_0(x,t,\tau_1) \to u_0(x,t)$$

в D' *при* $\varepsilon \to 0$*;*

$$\frac{V_0(x,t,\tau_1)}{\varepsilon^{p+\frac{1}{2}}} \to g(t)\delta(x - \varphi(t))$$

в D' *при* $\varepsilon \to 0$.

Таким чином, N–те наближення розв'язку рівняння (1) можна записати за допомогою формули вигляду

$$U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(x,t,\tau_1,\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \ [u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1)], \\ u_0(x,t) + \sum\limits_{j=1}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \ \left[u_j(x,t) + v_j^-(x,t)\right], \\ \sum\limits_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \ u_j(x,t), \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ (x,t) \in D_- \backslash \Omega_\mu(\Gamma), \\ (x,t) \in D_+ \backslash \Omega_\mu(\Gamma), \end{array} \qquad (24)$$

де

$$D_- = \{(x,t) \in \mathbf{R}^1 \times [0;T] : \varphi(t) - x \geq \mu\},$$

$$D_+ = \{(x,t) \in \mathbf{R}^1 \times [0;T] : x - \varphi(t) \geq \mu\},$$

а функції $v_j^-(x,t)$, $j = \overline{0, 2N+1}$, визначені як розв'язки задач Коші (22), (23) як в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, так і в області $\{(x,t) : x - \varphi(t) \leq -\mu, \ t \in (0;T)\}$.

Зауваження 2. *При вказаному вище продовженні функції $V_j(x,t,\tau_1)$, $j = \overline{0, 2N+1}$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$, у випадку $N \geq p$ функція $Y_N(x,t,\varepsilon)$, що визначена формулою (24), при $\tau_1 \to -\infty$ задовольняє рівняння (1) з точністю $O\left(\sqrt{\varepsilon}\ \varepsilon^{N+1}\right)$.*

Зауваження 3. *У випадку, коли розв'язки задач Коші (22), (23) визначені лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, то N–те наближення розв'язку рівняння (1) можна записати за допомогою формули вигляду:*

$$U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(x,t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}} [u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1)], \\ \sum\limits_{j=0}^{2N+1} \varepsilon^{\frac{j}{2}} u_j(x,t), \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (x,t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ (x,t) \in (D_+ \cup D_-) \backslash \Omega_\mu(\Gamma), \end{array}$$

і це наближення при $\tau_1 \to -\infty$ задовольняє рівняння (1) з точністю $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$.

5. Визначення сингулярної частини асимптотики $W_N(x,t,\varepsilon)$**.** Сингулярна частина асимптотики $W_N(x,t,\varepsilon)$ в (8), (9) дозволяє врахувати початкову умову (2). Стандартним чином з (11) можна отримати диференціальне рівняння для її знаходження. Функції $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, що задають цю частину асимптотики, визначаються в деякому околі зв'язної множини $\mathcal{M} = \{(t,x) : t = 0, x \in \mathbf{R}^1\} \cup \{(t,x) : x = \varphi(t), t \in [0;T]\}$, як розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^3 W_0}{\partial \tau_1^3} = -a_0(0) \left[\varphi'(0) \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau_2}\right] + \qquad (25)$$

$$+ b_0(0) \left[V_0(0,\tau_1) \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial \tau_1} W_0 + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1}\right],$$

$$\frac{\partial^3 W_j}{\partial \tau_1^3} = -a_0(0) \left[\varphi'(0) \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} - \frac{\partial W_j}{\partial \tau_2}\right] + \qquad (26)$$

$$+ b_0(0) \left[V_0(0,\tau_1) \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial \tau_1} W_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} W_j + W_0 \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1}\right] + \mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2),$$

де $\mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, обчислюються рекурентним чином за $W_0(\tau_1,\tau_2)$, $W_1(\tau_1,\tau_2)$, $\ldots$, $W_{j-1}(\tau_1,\tau_2)$, причому, крім того, функції $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1, 2N+1}$, задовольняють умову (10) та початкові умови при $\tau_2 = 0$ вигляду

$$W_0(\tau_1, 0) = f(\tau_1) - V_0(0,\tau_1), \qquad (27)$$

$$W_{2j}(\tau_1, 0) = -V_{2j}(0,0,\tau_1), \quad j = \overline{1,p}, \qquad (28)$$

$$W_j(\tau_1, 0) = -V_j(0,0,\tau_1) + Q_j(\tau_1), \quad j = \overline{2p+1, 2N+1}, \qquad (29)$$

де функції Q_j, $j = \overline{2p+1, 2N+1}$, обчислюються рекурентним чином після визначення $W_0(\tau_1,\tau_2), W_1(\tau_1,\tau_2), \ \ldots, \ W_{j-1}(\tau_1,\tau_2)$. Початкові умови (27) – (29) отримано з початкової умови (2) шляхом урахування асимптотичних розкладів для функцій $U_N(x,t,\varepsilon)$, $V_N(x,t,\varepsilon), W_N(x,t,\varepsilon)$ в (8), (9) та умови (10).

Задачі (25), (27) та (26), (28) мають розв'язки у просторі G_2^+ за умови, що $\mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2) \in G_2^+$. При цьому розв'язки цих задач існують для $\tau_2 \in [0;\Theta]$, де Θ – деяке додатне число.

Справедливі такі твердження.

Лема 1. *Функції $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{0,p}$, що є розв'язками задач (25), (27) та (26), (29), належать простору G_2^+.*

Лема 1 випливає з умови $W_0(\tau_1,0)\in G_1^0$.

Лема 2. *Якщо функція* $-V_j(0,\tau_1)+Q_j(\tau_1)$, $j=\overline{2p+1,2N+1}$, *належить простору* G_1^0, *а функція* $\mathcal{G}_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{2p+1,2N+1}$, *належить простору* G_2^+, *то функція* $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{2p+1,2N+1}$, *яка є розв'язком задачі (26), (29), належить простору* G_2^+.

Лема 2 випливає з теореми 2.1 [14].

Теорема 1. *Нехай виконуються такі припущення:*

1. *функції* $a_k(x)$, $b_k(x)\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$, $k\geq 0$;
2. *задача Коші (20), (21) має розв'язок* $\varphi(t)$, $t\geq 0$, *для якого справедлива нерівність* $A[\varphi]>0$;
3. *функції* $\mathcal{F}_j(t,\tau_1)$, $j=\overline{1,2N+1}$, *належать простору* G_1^0 *та задовольняють умову ортогональності (19);*
4. *виконуються умови леми 2.*

Тоді функція (8), (9) за умови (10) є асимптотичним розвиненням для однофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (1), (2) для рівняння Кортевега-де Фріза при $0\leq t\leq\sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon^p\,\Theta$, *де* Θ – *деяке додатне число.*

Оцінку між точним $u(x,t,\varepsilon)$ і наближеним $Y_N(x,t,\varepsilon)$ розв'язками задачі (1), (2) встановлює наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, функції* $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ *та* $Y_N(x,t,\varepsilon)$, N – *довільне натуральне число, належать простору* G_1^0 *для* $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, *функція* $a(x,\varepsilon)<0$ *для всіх* $x\in\mathbf{R}^1$ *та для всіх* $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$. *Тоді має місце оцінка між точним* $u(x,t,\varepsilon)$ *і наближеним* $Y_N(x,t,\varepsilon)$ *розв'язком задачі (1), (2) такого вигляду:*

$$\max_{t\in[0;\varepsilon^{p+\frac{1}{2}}\Theta]}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\alpha(x)\left[u(x,t,\varepsilon)-Y_N(x,t,\varepsilon)\right]^2dx\leq$$

$$\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\alpha(x)h^2(x,\varepsilon)dx,$$

де $\alpha\in\mathbf{N}\cup\{0\}$; *функція* $h(x,\varepsilon)\in G_1^0$ – *деяка функція, для якої виконується нерівність* $|h(x,\varepsilon)|\leq C\varepsilon^{N+1}$, *а функція* $\rho_\alpha(x)$ *має вигляд*

$$\rho_\alpha(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0,\\ (1+x)^\alpha, & x>0.\end{cases}$$

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 2 з [13].

Висновок. Запропоновано алгоритм побудови однофазового солітоноподібного асимптотичного розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та встановлено асимптотичну оцінку для нього.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – N. 39. – P. 422 – 433.
2. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Хвиля трансляції та математична теорія солітонів // Математичний вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 126 – 148.
3. *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. – P. 1095.
4. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications Pure Applied Mathematics. – 1968. – V. 21, N. 15. – P. 467 – 490. (Переклад російською мовою: Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. – 1969. – Т. 13, № 15. – С. 128–150.
5. *Lax P.D.* Periodic solutions of the Korteweg-de Vries equation // Lecture in Appl. Mathem. – 1974. – V. 15. – P. 467 – 490.
6. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
7. *Самойленко В.Г.* Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, N. 3. – С. 322 – 327.
8. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124.
9. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Provedence: American Math. Society. – 2001. – 243 p.
10. *Samoylenko Yul.* Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-

de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – T. 3. – P. 1435 – 1441.

11. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, N. 1. – С. 111 – 124.

12. Samoilenko V.Hr., Samoylenko Yu.I. Asymptotical expansion of solution to Cauchy problem to Korteweg-de Vries equation with varying coefficients and a small parameter // Communications of CERMCS International Conference of Young Scientists. – Chisinau. – 2006. – P.186–192.

13. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 122 – 132.

14. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Вып. 13. – С. 56 – 105.