УДК 51(091)

©2007 р. О.М.Рябухо*, В.І.Сущанський**

* Слов'янський державний педагогічний університет
** Сілезький політехнічний інститут, м. Глівіце, Польща

ПЕРША УКРАЇНОМОВНА МОНОГРАФІЯ З МАТЕМАТИКИ

Проведено аналіз монографії Миколи Чайковського "Метациклічні рівняння та їх групи" та порівняльний аналіз з іншими тогочасними монографіями з теорії Ґалуа .

The monograph "Metacyclic equations and their group"by Mykola Chaikovskii and its comparative analysis with other monographs of that time, concerned with Galois theory, is analyzes in our work.

Вступ.

Коли з'явилась друком перша математична монографія українською мовою? Що це була за книга і хто її автор? Важко сподіватися отримати відповідь хоча б на одне з поставлених питань навіть від тих фахівців-математиків, яких цікавить історія математики. Напевно й приблизна оцінка часу виходу такої монографії не буде правильною, бо більшість математиків скаже, що це трапилось десь в двадцятих роках минулого століття. Оцінка така не є безпідставною, адже добре відомо, що на території Російської держави до 1917 року офіційне використання української мови було заборонено; зокрема заборонено було друкувати книги українською мовою. А оскільки перші кілька років після лютневої революції 1917-го року було не до написання математичних монографій, то таким чином і виникає названа вище оцінка. Але вона не є правильною, бо при цьому не враховуються українські землі, які входили до складу Австро-Угорської держави. На її теренах заборони на офіційне використання української мови не було, функціонувало ряд гімназій, де мовою викладання була українська, існувала спеціальна квота для прийому студентів-українців в державні університети, друкувалися книги і періодичні видання українською мовою. Вирішальну роль у видавництві наукової літератури рідною мовою відігравало тоді Наукове Товариство імені Шевченка (коротко НТШ). В його періодичних виданнях було опубліковано й першу статтю з математики українською мовою і першу україномовну математичну монографію. Огляду цієї монографії і присвячено основну частину нашої статті.

1. Математично-природничий часопис НТШ.

Наукове товариство імені Шевченка розпочало свою діяльність в 1873 році і функціонувало спочатку на теренах Австро-Угорщини, а згодом – в Польщі. Члени товариства працювали в одній з кількох його секцій, була серед них і секція математично-природничого характеру, яка називалась математично-природописно-лікарською. В 1892 році НТШ розпочало випуск наукового журналу під назвою "Записки Наукового Товариства імені Шевченка". Це був журнал переважно гуманітарного профілю, хоча друкувались в ньому також наукові розвідки членів Товариства – вчених-природознавців, медиків, фізиків, математиків. Першу наукову статтю з математики було опубліковано в "Записках"в 1894 р., нею стала стаття випускника Львівського університету Володимира Левицького "Про симетричні вираження функцій по модулю m". В зв'язку з тим, що в секціях товариства велася активна наукова робота і готувалося до друку багато статей, через кілька років було вирішено розпочати видання нових журналів – збірників праць окремих секцій. Так, в 1897 році математично-природописно-лікарська секція розпочала друкувати новий науковий часопис "Збірник математично-природописно-лікарської секції НТШ". Друкувалися в ньому статті з математики, фізики, хімії, медицини, біології, географії. Навколо цього журналу об'єдналася група молодих вчених-математиків, до якої в різні часи входили Володимир Левицький, Клим Глібовицький, Микола Чайковський, Василь Каліцун, Тома Цюропайлович, Василь Стасюк, Мирон Зарицький та інші. Проблематика математичних праць, які друкувались в журналі, досить різноманітна: роботи з алгебри, теорії чисел, диференціальних рівнянь, геометрії, страхової математики, тощо. Важливою ділянкою творчості секції було створення української наукової термінології.

Наукове товариство імені Шевченка припинило свою діяльність в 1939 році після встановлення радянської влади на західноукраїнських землях. Тоді призупинено було видання всіх журналів НТШ, зокрема й "Збірника математично-природописно-лікарської секції НТШ". Починаючи з 1947 року НТШ відновило свою діяльність у Західній Європі, Сполучених Штатах Америки і Канаді, а з 1989 року його діяльність відновлено і в Україні. Після відновлення діяльності НТШ за межами України, видавництво основного часопису – "Записки Наукового Товариства імені Шевченка"також було відновлено, на сьогоднішній день вийшло друком близько 250 томів цього журналу. Видавництво "Збірника математично-природописно-лікарської секції НТШ"вже не поновлювалося, всього було надруковано 32 томи цього журналу. Томи 1 - 17 мають окрему нумерацію сторінок кожної із статей, оскільки одночасно статті можна було замовляти у вигляді окремих брошур чи книг (залежно від обсягу). Кожен з томів складався з окремих випусків (від одного до трьох) залежно від наявності наукових праць. Серед перших двадцяти томів часопису, проаналізованих нами, є один з'єднаний том. Це том 18/19, який вийшов друком в 1919 році після трирічної перерви, викликаної подіями першої світової війни, розпадом Австро-Угорщини, утворенням Західноукраїнської держави та Польщі і війною між ними. Праця, аналізу, якої присвячено дану статтю – монографічний виклад Миколи Чайковського "Метациклічні рівняння та їх групи", обсягом 144 сторінки. Вона була надрукована в т. 14 "Збірника математично-природописно-лікарської секції НТШ". На момент публікації автору – Миколі Чайковському виповнилося 23 роки. Він закінчив Віденський університет, студіював теорію Ґалуа під керівництвом відомого фахівця в галузі алгебри і теорії чисел, професора Ф. Мертенса. Опублікований монографічний виклад став основою його докторської дисертації, яку було захищено в 1911 році у Віденському університеті.

2. Загальна характеристика монографії М.Чайковського.

Монографічний виклад М.Чайковського серед математиків був відомий у вигляді окремого видання. Саме на це видання як на окрему монографію посилався в своєму огляді праць з теорії Галуа М.Г. Чеботарьов [1, с.213]. Всі попередні томи "Збірника математично-природнописно-лікарської секції НТШ"містять лише порівняно невеликі математичні статті, жодна з яких не має монографічного характеру. А оскільки наукові праці українською мовою в Галичині друкувалися тоді лише у виданнях НТШ, то звідси ми робимо висновок, що праця Миколи Чайковського "Метациклічні рівняння та їх групи", видавництво НТШ, Львів, 1910 р., обсягом 144 стор. є першою монографією з математики, написаною українською мовою. Зазначимо, що на момент виходу в світ праці М.Чайковського вже існувало ряд монографій, великих оглядових робіт і підручників для університетів, які повністю або частково були присвячені розгляду теорії розв'язування алгебраїчних рівнянь в радикалах – теорії Ґалуа. В країнах західної Європи найбільшою популярністю користувались книги К. Жордана [2], [3], і особливо трьохтомник Г.Вебера [4], який був одночасно і довідниковим виданням і університетським підручником протягом багатьох років. На теренах Російської держави першими публікаціями, де розглядались проблеми розв'язування рівнянь в радикалах, були магістерська дисертація випускника (згодом професора) Харківського університету Д.М. Деларю (1839-1905) "Загальна терія алагебраїчного розв'язування рівнянь", опублікована в 1834 році в Харкові, університетський підручник М.Е. Ващенка-Захарченка [5], та велика оглядова стаття В.П. Єрмакова [6], в якій запропоновано нові цікаві підходи до викладу теорії Галуа і характеризації скінченних розв'язних груп.

Охарактеризуємо коротко саму монографію. Автори працювали з оригіналом, який зберігається в фондах Національної бібліотеки України ім.Вернадського, інв.номер Ж 20869/МПЛ. Монографія Миколи Чайковського складається з трьох частин: "Основи", "Теорія рівнянь"та "Рішимі рівняння". Передує їм невелика історична розвідка, в якій автор зазначив найважливіші етапи в розвитку теорії розв'язування рівнянь в радикалах. Про мету свого дослідження він пише: "Нашим намаганням буде, представити в головних начерках теорію Galois, доповнену пізнішими дослідженнями. В першій частині подаємо основи, потрібні до теорії рівнянь (теорію груп), в другій властиву теорію рівнянь, а в третій примінене тої теорії до ріжних типів рішимих рівнянь: при рівнянях степеня p^2 подані деякі наші власні розсліди. Жерелами, якими ми користувалися, були переважно твори Netto'na, Weber'a, Jordan'a й ін.; всі вони цитовані у відповідних місцях"(тут і далі в цитатах збережено орфографію автора). Докладніше зміст трьох названих частин праці можна охарактеризувати таким чином.

Частина перша, сторінки 3-42 тексту монографії, присвячена викладу необхідних відомостей з теорії груп і теорії груп підстановок. В ній наводиться також ряд потрібних для подальшого понять і фактів щодо груп симетрій алгебраїчних виразів.

Частина друга, сторінки 43-98, присвячена обговоренню основних понять, пов'язаних з розв'язуванням рівнянь в радикалах. Докладно досліджуються рівняння поділу кола та їх узагальнення – так звані абелеві рівняння. Обговорюються властивості груп підстановок, які відповідають розв'язним рівнянням.

В третій частині, стор. 99-143, проведено грунтовний аналіз рівнянь степенів p і p^2, (p – деяке просте число), які розв'язуються в радикалах, і пов'язане з цим дослідження будови метациклічних груп підстановок степеня p^2. Зокрема, тут представлено і власні дослідження автора щодо рівнянь степеня p^2.

В додатку до роботи подано невеликий словник (всього 53 терміни), в якому українською мовою тлумачаться німецькі назви основних понять теорії Ґалуа. Словник цей далеко не повний, оскільки, як зазначає автор в ньому вміщено лише ті терміни, яких не було в праці В.Левицького [7], або які автор пропонує ввести до ужитку замість запропонованих В.Левицьким.

Завершують монографію показчик термінів та імен і тристорінкове Resume' німецькою мовою.

3. Характеристика змісту окремих частин.

3.1. Перша частина монографії Чайковського розбита на п'ять підрозділів. В першому з них, затитулованому "Пермутації і субституції"наводяться елементарні відомості про підстановки і перестановки, вводиться дія множення підстановок, розглядається цикловий розклад підстановки, поняття спряженої (в тексті – трансформованої) підстановки. В другому підрозділі "Групи"вводяться початкові визначення і наводяться необхідні твердження з теорії груп. Визначено поняття системи твірних групи, введено до розгляду симетричну, циклічну та знакозмінну групи. Наводиться визначення підгрупи і доведено теорему Лагранжа (в тексті її названо теоремою Коші) про те, що порядок підгрупи є дільником порядку групи. Розглянуто поняття спряженої підгрупи, перетину підгруп. Окремий параграф присвячено скінченним групам, що породжені двома підстановками. Тут автор припускається помилки: він вважає, що кожен елемент такої групи можна записати у вигляді добутку $g^\alpha h^\beta$, де g, h – її твірні підстановки, а α і β – деякі натуральні числа. Насправді це буде так у випадку, коли виконується комутаторне співвідношення між твірними, тобто співвідношення вигляду $gh = h^\lambda g$ для певного цілого числа λ. В тій ситуації, яка виникає далі при дослідженні метациклічних груп це співвідношення справді буде виконуватися, але для довільних підстановок g і h воно не має місця. Закінчує підрозділ доведення основної теореми про скінченні абелеві групи.

В тетьому підрозділі "Головні прикмети груп"вводяться поняття транзитивної та інтранзитивної, примітивної та імпримітивної групи підстановок (в тексті, відповідно, перехідні і неперехідні та первісні і непервісні групи підстановок). При визначенні імпримітивних груп вводяться до розгляду системи імпримітивності. Далі визначаються поняття ізоморфізму та гомоморфізму груп, простої і непростої (зложеної) групи. Для нормальних підгруп вживається термін "визначальні", а прості групи називаються поодинокими. Розвинуто теорію субнормальних рядів в групах, в її простішій - арифметичній версії. При такому підході факторами ряду підгруп називаються числа, що є індексами меншої з сусідніх підгруп в більшій для всіх підгруп ряду. Виділяються композиційні і головні ряди підгруп, доводиться теорема Жордана про послідовності факторів композиційних рядів. Пізніша версія Жордана-Гельдера цієї теореми не розглядається, але наводяться дві відомі властивості головних рядів. Охарактеризовано композиційні ряди симетричних груп, зокрема, наведене доведення простоти знакозмінної групи степеня вищого ніж 5. Воно ґрунтується на допоміжному твердженні про те, що транзитивна група, яка містить цикл довжини 3 збігається з симетричною або знакозмінною групами. Нині таке доведення вважається стандартним. Далі докладно обговорюється композиційний ряд в знакозмінній групі S_4 і версія Гельдера теореми про композиційні ряди, для чого вводиться поняття фактор-групи даної групи за її нормальною підгрупою (в термінах автора – доповнююча група даної групи в віднесенні до визначальної підгрупи).

В четвертому підрозділі "Групи в віднесенні до алгебраїчних функцій"досліджуються групи симетрій многочленів (алгебраїчних функцій). Нехай $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – деяка функція від n змінних, $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ – деякий числовий вектор значень цієї функції. Переставляючи між собою координати вектора за допомогою підстановок τ із симетричної групи S_n, поряд із значенням функції $f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ отримуватимемо значення $f(x_{\tau(1)}^0, x_{\tau(2)}^0, ..., x_{\tau(n)}^0)$, $\tau \in S_n$. Максимальне можливе число таких різних значень дорівнює $n!$. Функція f є інваріантною відносно підстановки τ, якщо для довільного вектора $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ має місце рівність

$$f(x_{\tau(1)}^0, x_{\tau(2)}^0, ..., x_{\tau(n)}^0) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \quad (1)$$

Всі підстановки τ, для яких рівність (1) справджується при будь-якому векторові $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, утворюють групу; її автор називає групою функції f. Про функції, які мають одну й ту ж саму групу G говориться, що вони належать до ряду G. Кількість значень функцій ряду G при перестановках змінних дорівнює $n!/|G|$. Основним твердженням четвертого підрозділу є теорема про те, що функції одного й того ряду можна виразити раціонально через яку-небудь одну з них, і всі функції, які раціонально виражаються через одну функцію належать до того ж самого ряду. Для подальшого важливим є також таке тверджeня:

Якщо функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при перестановках змінних набуває m різних значень, то ці значення є коренями рівняння m-го степеня, коефіцієнтами якого будуть значення деяких симетричних функцій від $x_1, x_2, ..., x_n$.

В п'ятому підрозділі "Циклічні й метациклічні функції"розглядаються основні групи перетворень, які використовуються в подальших міркуваннях. Докладно описано циклічні групи підстановок, абелеві групи підстановок степеня p^2, метациклічні групи степеня p^2 та охарактеризовано класи функцій з відповідними групами.

3.2. Друга частина монографії розбита на підрозділи VI-X. В шостому підрозділі "Алгебраїчні рівняння"вводяться поняття розв'язного в алгебраїчному сенсі рівняння, зведеного і незведеного (над полем раціональних чисел) рівняння, даються визначення (числового) поля, розширення полів і многочлена, незвідного над деяким числовим полем.

Автор вводить поняття резольвенти Ґалуа для незвідного рівняння $f(x) = 0$ степеня n таким чином. Виберемо деякий лінійний многочлен вигляду

$$\xi = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n, \qquad (2)$$

коефіцієнти $a_1, a_2, ..., a_n$ якого є деякими числами, так, щоб при підстановці в нього замість $x_1, x_2, ..., x_n$ найможливіших перестановок коренів рівняння $f(x) = 0$ отримувались різні значення. Тепер резольвенту будуємо як рівняння вигляду

$$F(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)...(\xi - \xi_{n!}) = 0, \qquad (3)$$

де $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n!}$ – всі значення многочлена (2) при перестановках коренів $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ рівняння $f(x) = 0$. Далі автор пише (цитуємо): "Знаючи один корень рівняння (3) можемо знайти всі інші, бо всі вони мають ту саму групу. Отже, нашу проблему розв'язати рівнанє n-го степеня, т.е. знайти всі n корінів, заступаємо иншим, а саме, знайти один корінь рівняння степеня $n!$".

Рівняння $x^n + c_1x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n = 0$ називається загальним, якщо його корені і коефіцієнти "є зовсім від себе независимі", тобто між ними немає нетривіальних залежностей. В противному разі, якщо такі залежності існують, наприклад

$$\Phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, .., n)$$

то їх можна, при належному виборі коефіцієнтів λ_i $(1 \leq i \leq n)$ замінити однією залежністю – їх лінійною комбінацією

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i \qquad (4)$$

Група симетрій функції Φ називається групою Ґалуа даного рівняння. Твердження, що визначає зв'язок між рівняннями, функціями коренів рівняння та їх групами, формулюється таким чином:

Нехай дано рівняння $f(x) = 0$ степеня n, всі корені якого є різними, а коефіцієнти належать до деякого числового поля K. Тоді існує група підстановок G така, що значення кожного многочлена від n змінних, інваріантного відносно групи G , на коренях рівняння належать до поля K. Навпаки, кожен многочлен від n змінних, значення якого на коренях даного рівняння належать до поля K є інваріантним відносно групи G.

Далі формулюється важливе твердження про властивості групи Ґалуа алгебраїчного рівняння, а саме:

Група Ґалуа рівняння $f(x) = 0$ буде транзитивною тоді і лише тоді, коли це рівняння є незвідним над полем коефіцієнтів многочлена $f(x)$.

Після такої порівняно невеликої загальної частини, автор розпочинає докладний аналіз методів розв'язування рівнянь третього і четвертого степеня, застосовуючи ідеологію теорії Ґалуа. Для кубічного рівняння формули для обчислення розв'язків виводяться за допомогою методу Лагранжа. А відомі формули Кардано виводяться методом Худда, при цьому автор наслідує виклад з монографії Серре [8].

Аналіз методів розв'язування рівнянь четвертого степеня розпочинається з характеризації ґратки підгруп симетричної групи S_4. Після цього описуються методи Лагранжа та Ейлера розв'язуванння рівнянь четвертого степеня, а також модифікація методу Ейлера, запропонована Т.Цвойдзінським та метод Дивільковського.

Спеціальні рівняння четвертого степеня

можуть мати групи Ґалуа, відмінні від симетричної. Оскільки досить розглядати незвідні рівняння, то така група повинна бути транзитивною, а це означає, що вона є:

1) знакозмінною групою A_4;

2) однією з трьох підгруп восьмого порядку, що ізоморфні групі діедра;

3) четверною групою Клейна в її транзитивному зображенні;

4) однією з трьох циклічних підгруп четвертого порядку.

Охарактеризовано типи рівнянь, які мають групи Ґалуа вигляду 1)-4).

На закінчення підрозділу автор описує в загальних рисах метод резольвент розв'язування алгебраїчних рівнянь, пов'язуючи розклад резольвенти з послідовними розширеннями поля коефіцієнтів рівняння, і докладно аналізує підхід Лагранжа, який опирається на використання так званої резольвенти Лагранжа.

У сьомому підрозділі "Алгебраїчна розв'язка рівнянь"доводиться теорема Абеля про те, що загальне рівняння степеня вищого ніж четвертий, тобто рівняння з неозначеними коефіцієнтами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

де $a_0 \neq 0$, $n \geq 5$, не розв'язується в радикалах. Запропоноване доведення цієї теореми є спрощеним варіантом початкового доведення Абеля, яке запропонував Ванцель. Воно запозичене з монографій Серре [8] і Фогта [9]. Доведення опирається на редукційні твердження, які дозволяють зводити загальні рівняння до рівнянь простих степенів, а також твердження про те, що для знаходження кореня рівняння простого степеня p досить розширити поле коефіцієнтів, приєднуючи до нього лише один корінь p-го степеня.

У восьмому підрозділі "Рівняння поділу кола"досліджується двочленні рівняння, тобто рівняння вигляду

$$x^n = a + bi \tag{5}$$

Кожне рівняння вигляду (5) за допомогою підстановки

$$x' = x/|\sqrt{a + bi}|$$

зводиться до рівняння $x^n - 1 = 0$.

Поділивши многочлен $x^n - 1$ на $x - 1$, дістанемо незвідне над полем раціональних чисел рівняння

$$x^{n-1} + x^{n-2} + .. + x + 1 = 0. \tag{6}$$

Розв'язки рівняння (6) в алгебраїчній формі вперше охарактеризував ще К.Ф.Гаусс. М.Чайковський наводить запропоновану П.Бахманом [10] модифікацію методу Гауса включно з аналізом можливостей побудови правильного n-кутника за допомогою циркуля і лінійки.

В дев'ятому підрозділі "Рівняння Абеля"розглядаються рівняння з абелевою групою Ґалуа. Спочатку аналізуються рівняння, кожен корінь яких є певною раціональною функцією від іншого кореня. При цьому виділяється випадок, коли всі корені рівняння n-го степеня, $n = mr$ можна розташувати в таблицю вигляду:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & \varphi(x_1) & ... & \varphi^{m-1}(x_1) \\ x_2 & \varphi(x_2) & ... & \varphi^{m-1}(x_2) \\ ... & .... & ... & .... \\ x_r & \varphi(x_r) & ... & \varphi^{m-1}(x_r), \end{array}$$

де φ – деяка раціональна функція, $\varphi^m(x_i) = x_i$ $(1 \leq i \leq r)$, причому m – найменше число, яке задовольняє кожній з цих умов. Для такого рівняння охарактеризовано його групу Ґалуа, яка є, вживаючи сучасні терміни, вінцевим добутком симетричної групи степеня r і циклічної групи степеня m. Абелеві рівняння визначаються як рівняння, кожен корінь яких є раціональною функцією попередніх. Встановлюється, що такі рівняння розв'язуються в радикалах, а група Ґалуа абелевого рівняння є абелевою, наводяться редукційні твердження, які ґрунтуються на теоремі про розклад скінченної абелевої групи на пряму суму циклічних p-груп для певної множини простих чисел p.

В десятому підрозділі "Групи рішимих рівнянь"характеризуються рівняння з імпримітивними групами Ґалуа і доводиться основна теорема теорії Ґалуа (стор. 97). Сформульовано її в арифметичних термінах. А саме, для групи Ґалуа G рівняння

$f(x) = 0$ будується "ряд зложення", тобто деякий спадний ряд підгруп

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > ... > G_r > G_{r+1} = 1,$$

в якому кожна наступна підгрупа є максимальним нормальним дільником в попередній (головний ряд, в сучасних термінах) і вводиться "ряд чинників"групи G – ряд чисел

$$r_i = |G_i|/|G_{i+1}| \quad (i = 0, 1, ..., r) \ , \qquad (7)$$

які визначаються рядом зложення. Основну теорему про розв'язність рівнянь в радикалах сформульовано таким чином

"Конечною і достаточною умовою для рішимості рівнання $f(x) = 0$ є те, щоби ряд чинників зложення групи G, тобто ряд (7) складав ся з самих первих чисел".

Наведено також групову версію цієї теореми. Завершує підрозділ теорема редукції, яка зводить аналіз рівняння складеного степеня $n = k \cdot l$, $(k, l) = 1$, до аналізу певної сукупності рівнянь степеня k, які розглядаються над розширенням поля коефіцієнтів утвореним приєднанням до основного поля коренів деякого рівняння степеня l.

3.3. Третя частина монографії розбита на чотири підрозділи. В одинадцятому підрозділі "Рішимі рівняння первого степеня"розглядаються рівняння простого степеня, які розв'язуються в радикалах. Встановлено, що найбільшою групою, яка може виступати в якості групи Ґалуа рівняння степеня p (p – просте), розв'язного в радикалах, є група G всіх цілих лінійних перетворень над полем Z_p лишків за модулем p. Цілими лінійними перетвореннями називаються перетворення Z_p вигляду

$$x \longrightarrow ax + b, x \in Z_p,$$

де $a, b \in Z_p$, $a \neq 0$. Порядок цієї групи дорівнює $p(p-1)$; всі інші розв'язні групи підстановок степеня p – так звані метациклічні групи – ізоморфно занурюються в групу G.

Рівняння простого степеня, кожен з коренів якого можна представити як раціональну функцію деяких двох його коренів, автор вслід за [3] називає рівнянням Ґалуа. Згідно з теоремою Ґалуа рівняння простого степеня є розв'язним в радикалах в тому і лише в тому разі, коли воно є рівнянням Ґалуа. Далі в підрозділі докладно описується алгоритм розв'язування рівняння простого степеня в радикалах. Розв'язування рівняння степеня p зводиться до розв'язування двох рівнянь:

1) циклічного рівняння степеня $p - 1$ або $p - 1/\tau$, де τ - деякий дільник числа $p - 1$;

2) циклічного рівняння степеня p.

Виведено явні формули для знаходження радикальних виразів, які завдають розв'язки рівняння. При побудові таких виразів використовується спеціальна функція, інваріантна, щодо групи Ґалуа рівняння, яка була введена до розгляду російським математиком І.Долбнею [11].

Дванадцятий і тринадцятий підрозділи "Рішимі рівняння степеня p^2"та "Метациклічні групи степеня p^2"присвячено дослідженню алгебраїчних рівнянь степеня p^2 (p – деяке фіксоване просте число) і характеризації, в зв'язку з цим, розв'язних груп степеня p^2. В оригінальних працях Е.Ґалуа докладно було досліджено на розв'язність в радикалах рівняння степеня p. Подальше природне просування в цьому напрямку зробив К.Жордан [2]. Підхід Жордана істотно використовує розроблені ним методи класифікацій лінійних розв'язних груп степенів p^n, $n \in N$. Саме при розв'язуванні цієї задачі Жорданом було вперше використано зведення матриць до певного канонічного вигляду (який дістав назву Жорданової нормальної форми) за допомогою перетворень подібності. Нині це добре відомий і по-суті центральний розділ лінійної алгебри, який розглядається як в алгебраїчному так і в геометричному аспектах, - зведення матриць лінійних операторів до жорданової нормальної форми. Оскільки множину що містить p^2 елементів можна природним чином ототожнити з векторним простором розмірності 2 над полем Z_p лишків за модулем p, то розглядається зведення до канонічної форми саме в цій ситуації. Для цього досліджується характеристичне рівняння над Z_p (інакше, – характеристична конфігурація за модулем p) вигляду

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} \equiv 0(mod p), \qquad (8)$$

яка має різні розв'язки залежно від того, чи дискримінант квадратного відносно λ рівняння з лівої частини (8):

$$D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 - 4bc$$

ділиться на p, чи є квадратним лишком, чи є квадратним нелишком за модулем p. Докладно аналізуються ці три можливості, в кожному з випадків наводиться загальний вигляд лінійних підстановок, які задовольняють описаним обмеженням. Потім визначаються три типи примітивних розв'язних підгруп повної лінійної групи $GL_2(Z_p)$, які позначаються G_I, G_{II} і G_{III}. Ці групи мають, відповідно, порядки

$$|G_I| = 2(p-1)^2 p^2,$$
$$|G_{II}| = 2(p^2-1)p^2,$$
$$|G_{III}| = 24(p-1)p^2.$$

Доведено, що інших типів примітивних лінійних розв'язних груп в $GL_2(Z)$ немає. Для кожної з груп G_I, G_{II} і G_{III} будується субнормальний ряд з циклічними факторами (ряди зложення цих груп). Встановлено, що при $p=3, p=5$ група G_I, міститься в G_{III}, а при $p=3$ група G_{II} належить до G_{III}.

Далі автор пише:

"Визначення ряду зложення для груп G надає заразом дорогу, як треба вести розвязку рівняння степеня p^2. Приймім, що дане рівнанє $f(x)=0$ має сочинники з обсягу (R). Той обсяг розширюємо так, що долучаємо до нього по одному коріневи рівнань первих степенів, так що поміж тими степенями будуть всї числа з ряду показчиків з виїмом двох остатнїх. Через те група редукується постепенно аж до M; коли назвемо сей розширений обсяг (R'), то то рівнанє яке має групу M є Абелевим рівнанєм степеня p^2. Отсе рівнанє можна розвязати зовсїм, розвязуючи два Абелеві рівнаня степеня p."

Закінчення підрозділу і присвячене реалізації описаного методу, пов'язаного з побудовою ланцюга розширень поля коефіцієнтів рівняння.

Останній, чотирнадцятий підрозділ "Закінченє"дуже короткий, в ньому автор пише, що описаний вище метод Жордана можна застосувати для дослідження рівнянь степенів p^k, $k > 2$.

Це твердження вимагає певних застережень. В принципі, розроблена схема досліджень може бути використана в більш загальній ситуації. Але при більших значеннях показника k значно ускладнюється з технічної точки зору опис примітивних підгруп повної лінійної групи $GL_k(Z_p)$, експоненційно зростає число варіантів, які потрібно переглянути, і, що найважливіше, з'являються залежності такого опису від вибору числа p. Тому якоїсь одноманітної класифікації примітивних підгруп в групах $GL_k(Z_p)$, при всіх натуральних показниках k важко сподіватися, хоча з того часу вже отримано багато різних характеризаційних теорем і розроблено різноманітні "грубі"класифікації [12]. Дослідження з теорії Ґалуа в цьому напрямку проводилися ще з часів Жордана і нині продовжуються в рамках математичної дисципліни, яка дістала назву конструктивної або алгоритмічної теорії Ґалуа.

§4. Порівняльний аналіз монографічного викладу Чайковського з іншою тогочасною літературою з теорії Ґалуа.

Зміст монографії Чайковського природно ділиться на 2 частини. В першій – викладаються основи теорії Ґалуа, а друга присвячена розгляду рівнянь степенів p і p^2 (p – просте число), які розв'язуються в радикалах. Праць різних математиків, присвячених основам теорії Ґалуа на той час було вже досить багато; з'являлися такі праці і пізніше. Як пише М.Г.Чеботарьов [13], такі роботи можна поділити на дві категорії. До першої категорії відносяться роботи, в яких розглядаються нові підходи до обгрунтування класичної теорії Ґалуа; в роботах другої – поглиблюється і узагальнюється поняття групи Ґалуа і розширюють сфери його застосування. Серед робіт першої категорії слід зазначити праці вчителя М.Чайковського – професора Віденського університету Ф.Мертенса (див. напр. [14]). В цих працях поняття групи Ґалуа даного рівняння і пов'язані з цим поняттям основні теореми наводяться без введення таких понять як резольвента даного рівняння, нормальне розширення поля коефіцієнтів, тощо. Замість них Ф.Мертенс вводить до розгляду так звану систему фундаментальних модулів, а група Ґалуа даного рівняння складається з підстановок, які зберігають його систему фундаментальних модулів в цілому. Подібний підхід дещо пізніше було розвинено в праці С.Шатуновського [15], а ще трохи згодом – в працях А.Льові, напр. [16].

Як видно з проведеного вище аналізу, виклад основ теорії Ґалуа в монографії М.Чайковського здійснюється в класичному руслі, з використанням поняття резольвенти. Певні аналогії з теорією систем фундаментальних модулів можна прослідкувати в підрозділі VI при аналізі проблеми розв'язності в радикалах загального рівняння $n-$того степеня. Проте, це лише аналогії, самі системи фундаментальних модулів не використовуються. Отже, з точки зору основного підходу до викладення основ теорії Ґалуа монографія Чайковського близька до книг [3], [4], мемуару [6] та оглядових праць з теорії Ґалуа [17], [10].

Більш самостійною, на наш погляд, є та частина монографії, де розглядаються розв'язні в радикалах рівняння степенів p, p^2. Підхід до розгляду проблеми був вже добре відомий і пов'язаний з дослідженням розв'язних підгруп повної лінійної групи $GL_n(Z_p)$. Як уже зазначено вище, фундаментальний вклад в розв'язання цієї проблеми зробив К.Жордан [2]. Але його опис розв'язних лінійних підгруп порівняно громіздкий і спроби покращити неодноразово здійснювались і пізніше.

В монографії М.Чайковського при дослідженні рівнянь степенів p^2, що розв'язуються в радикалах, поряд з групами розглядаються раціональні функції, від багатьох змінних, групи інерцій яких є розв'язними групами підстановок. Така відповідність також має характер відповідності Ґалуа і використовується в різних розділах сучасної математики. При підході Чайковського маємо справу з 3−членною відповідністю:

рівняння $\longleftrightarrow$ розв'язні групи $\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$ спеціальні раціональні функції.

При цьому досліджуються взаємовідношення між властивостями кожної з сусідніх пар відповідностей, а далі ці властивості використовуються для вивчення основної проблеми – розв'язності рівнянь в радикалах. Докладний аналіз цієї схеми, проведений в монографії Чайковського є новим і поряд з наведеними оригінальними прикладами аналізу рівнянь становить власний вклад автора в розгляд проблеми.

§5. Деякі висновки.

Перша україномовна монографія з математики – монографія М.Чайковського "Метациклічні рівняння та їх групи"була написана на надзвичайно актуальну тему, яка і на той час і ще довгий період після опублікування монографії знаходилась в центрі зацікавлень математиків. Виклад основ теорії Ґалуа за Чайковським у порівнянні з іншими монографічними виданнями більш стислий, методично добре зважений і продуманий. Саме тому зміст монографії легко сприймається і вона, в свій час, могла бути використана як посібник для ознайомлення з основами теорії Ґалуа. З іншого боку, в монографії представлено цікаві нові результати, які стосуються рівнянь степеня p^2 (p – просте число), розв'язних в радикалах. Зазначимо також, що монографія відіграла важливу роль і з точки зору становлення української математичної термінології. Хоча стаття В.Левицького [7], в якій закладено основи наукового підходу до впровадження математичної термінології українською мовою, була опублікована в "Збірнику праць математично-природописно-лікарської секції НТШ"на два роки раніше, ряд термінів які в ній впроваджувались, були дискусійними і в монографії Чайковського вони замінені на інші. Крім того, тут зустрічається цілий ряд термінів, які в порівняно невелику статтю [7] просто не було включено. Автор виходить з традицій німецької алгебраїчної школи і нові терміни, ним запроваджені, – це переклади (іноді прямі запозичення) відповідних німецькомовних термінів. Не всі впроваджені М.Чайковським математичні терміни ввійшли в математичну практику. Але переважна більшість з них і понині використовується в україномовній математичній літературі.

Підсумовуючи, можна сказати, що монографія М.Чайковського "Метациклічні рівняння та їх групи"стала помітним явищем в тогочасній математичній літературі і відіграла важливу роль у розвитку досліджень з теорії Ґалуа на теренах України. На жаль ця праця нині незаслужено забута, хоча її перевидання, поза всякими сумнівами, зацікавило би нині багатьох математиків і цінителів математики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Чеботарев Н.* Основы теории Галуа. Москва-Ленинград: Государственное технико-теоретическое издательство (ОНТИ), 1934, 221 с.

2. *Jordan C.* Traite des substitutions et des equations algebriques. Paris: Goutier Villard, 1870.

3. *Netto E.* Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra, Leipzig: Teubner, 1882.

4. *Weber H.* Lehrbuch der Algebra. Braunschweig, Bd I (1898), Bd. II (1899), Bd. III. (1908).

5. *Ващенко-Захарченко М.Е.* Высшая алгебра. Теория подстановлений и ее приложение к алгебраическим уравнениям. Киев – Санкт-Петербург: Из-во Киевского университета, 1890.

6. *Ермаков В.П.* Алгебраические уравнения, решаемые в радикалах // Университетские известия, (1901) №5. - С. 1-65. - №6. - С. 65-101.

7. *Левицький В.* До математичної термінології // Збірник математично-природописно-лікарської секції НТШ, т. 8, вип. 2 (1902), С. 1-6.

8. *Serret J.A.* Cours d'algebre superieure, v.1,2. Paris: Goutier Villard. 1878.

9. *Vogt H.G.* Lecons sur la resolution algebrigue des equations. – Paris: Nony, – 1895.

10. *Bachmann P.* Niedere Zahlentheorie. Sammlung Schubert, Leipzig, Goschen, 1907.

11. *Dolbnia I.* Sur la forme plus precise des raines des equationes algebriques resoluble par radicoux // Darboux Bulletine de sci. Math (2) XVIII, (1894).

12. *Супруненко Д.А.* Групы матриц. Москва: Наука, 1972.

13. *Чеботарев Н.Г.* Проблемы современной теории Галуа. В кн.: Н.Г.Чеботарев. Собрание сочинений. Т.III. Москва-Ленинград: Изд-во Академии Наук СССР, 1950, 5-46.

14. *Mertens F.* Ein Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes. Sitsber. Winer Akad. 111 (1902), 17-37.

15. *Шатуновский С.И.* Алгебра как учение о сравнениях по функциональному модулю. Одесса: Изд-во Новороссийского университета, 1917.

16. *Loewy A.* Neuere elementare Begrundung ung Erweiterung der Galoisschen Teorie. Sitzber. Heidlb. Akad. I, 7 Abh., 1925; II, 1 Abh., 1927.

17. *Pierpoint J.* Galois Theory of Algebraic Equations // Ann. of Math. 1 (1899), N 1-4, 113-143.

18. *Bolza O.* On the Theory of Substitution Groups and its Applications to Algebraic Equations // Amer. J. Math., 13 (1890), N 1, 59-96.