УДК 517.95

©2007 р. О.Т.Панат

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

У необмеженій за просторовими змінними області досліджено мішану задачу для нелінійного еволюційного рівняння третього порядку. Умови існування розв'язку такої задачі отримано в узагальнених просторах Соболєва.

It is investigated the mixed problem for a nonlinear evolution equation of the third order in an unbounded domain with respect to spatial variables. In generalized Sobolev spaces some conditions for existence of solution of such problem are obtained.

Диференціальні рівняння в частинних похідних третього порядку є предметом дослідження багатьох вчених ще починаючи з другої половини XX століття (див., наприклад, [1-13]). Рівняння такого типу моделюють, зокрема, поширення збурень у в'язкопружному матеріалі, розповсюдження звуку у в'язкому газі, поміщеного в трубу, а також інші процеси подібної природи.

У праці [1] вперше було досліджено мішану задачу для рівняння

$$\rho u_{tt} = G'(u_x, u_{xt}) + g(u, u_t) + f(x,t), \qquad (1)$$

$(x,t) \in \Omega\times(0,+\infty)$, ρ - додатна стала, G, g, f - деякі функції, G' - похідна за просторовими змінними, Ω - обмежена область,
у випадку $\Omega = (0,1)$, $G' = \sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx}$, $g = f = 0$. Доведено, що при виконанні, зокрема, умов

$$\sigma'(\xi) > 0,\ \xi \in \mathbb{R},\ \sigma \in C^3(\mathbb{R}), \lambda > 0$$

існує єдиний класичний розв'язок u такої задачі, стійкий до збурень початкових даних. Також досліджено поведінку цього розв'язку ($u \to 0$) при $t \to \infty$. Крім того, в [3] знайдено умови існування локального та глобального розв'язку такої ж задачі ($t \in [0,T]$), але вже у просторах Соболєва. Для доведення основних результатів автор використовує оцінки функції Ґріна задачі Діріхле для рівняння теплоровідності та принцип максимуму.

Випадок, коли в рівнянні (1) функція G - нелінійна за двома аргументами, $g = f = 0$, вивчено в [2]. Для розв'язності такої задачі в класі гладких функцій автором одержано слабші умови на вихідні дані, ніж в [1].

У працях [4, 5] досліджено рівняння (1), в якому $G'(u_x, u_{xt}) = \triangle u + \sum\limits_{i=1}^{n}(|u_{x_it}|^{p-2}u_{x_it})_{x_i}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $p > 2$. Знайдено умови на коефіцієнти рівняння та показники нелінійностей, що забезпечують існування єдиного узагальненого розв'язку розглядуваних задач в просторах Соболєва. Випадок, коли у головній частині рівняння показник нелінійності є функцією від просторових змінних ($p = p(x)$), вивчено в [6].

Мета цієї роботи - в необмеженій за просторовими змінними області одержати умови розв'язності мішаної задачі для рівняння (1) у випадку виродження.

Нехай $T > 0$ – фіксоване число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ – необмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$ класу C^1, така що $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ – область для кожного $R > R_0$ з регулярною за Кальдероном ([14], с. 45) межею $\partial\Omega^R$, $R_0 > 0$ – деяке число. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $Q^R_\tau = \Omega^R \times (0,\tau)$, $S^R_\tau = \partial\Omega^R \times (0,\tau)$, $\Omega^R_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega^R, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $R > R_0$; $x_i' = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$, $i = 1,..,n$.

В області Q_T розглянемо гіперболічне

рівняння

$$Au \equiv u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x_i^{'}, t)|u_t|^{p-2} u_{x_i t})_{x_i} -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x,t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t) u_{x_i} + \qquad (2)$$
$$+ c_0(x,t) u + g(x,t,u_t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$$

з початковими

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \;\; (3)$$

та крайовою

$$u|_{S_T} = 0 \qquad (4)$$

умовами.

Говоритимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови **(A), (BC), (Q), (G)**, якщо:

(**A**): $a_i \in L^{\infty}(Q_T)$, $a_i(x_i^{'}, t) \geq a_0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $a_0 > 0$, $i = 1, ...n$;

(**BC**): $b_{ij}, b_{ijt} \in L^{\infty}(Q_T)$, $b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $i,j = 1, ..., n$,
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \theta_0 |\xi|^2$, $\theta_0 > 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,t) \in Q_T$,
$c_i \in L^{\infty}(Q_T)$, $i = 1, ..., n$, $c_0 \in L^{\infty}(Q_T)$;

(**Q**): $q : \Omega \to (0, +\infty)$, $q \in L^{\infty}(\Omega)$, $1 < \overline{q} \leq q(x) \leq \widehat{q}$, $\overline{q} = \operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega} q(x)$, $\widehat{q} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} q(x)$;

(**G**): функція $g(\cdot, \cdot, \xi)$ вимірна в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}$;
функція $g(x,t,\cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;
$(g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta))(\xi - \eta) \geq g_0 |\xi - \eta|^{q(x)}$,
$|g(x,t,\xi)| \leq g_1 |\xi|^{q(x)-1}$ для всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ і для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де g_0, g_1 – невід'ємні сталі.

Під $L^{q(x)}(\Omega^R)$ розуміємо узагальнений простір Лебега, тобто вимірні на Ω^R функції v, що задовольняють умову $\int\limits_{\Omega^R} |v|^{q(x)} dx < +\infty$. В [15] доведено, що $L^{q(x)}(\Omega^R)$ є банаховим простором з нормою

$$||v; L^{q(x)}(\Omega^R)|| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega^R} |v(x)/\lambda|^{q(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Позначимо

$$L^{q(x)}_{loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in L^{q(x)}(\Omega^R) \; \forall \, R > R_0 \right\}.$$

Розглядатимемо ще такі функціональні простори

$$H^1_0(\Omega^R) = \left\{ u : u \in H^1(\Omega^R), u|_{\partial\Omega \cap \Omega^R} = 0 \right\},$$

$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in H^1_0(\Omega^R) \; \forall \, R > R_0 \right\},$$

$$W^{1,p}_0(\Omega^R) = \left\{ u : u \in W^{1,p}(\Omega^R), u|_{\partial\Omega \cap \Omega^R} = 0 \right\},$$

$$W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in W^{1,p}_0(\Omega^R) \; \forall \, R > R_0 \right\}.$$

Вивчимо спочатку питання про існування в області Q^R_T розв'язку рівняння

$$Au = f, \quad (x,t) \in Q^R_T, \qquad (5)$$

який задовольняє умови

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega^R, \; (6)$$

$$u|_{S^R_T} = 0. \qquad (7)$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови **(A)**, **(BC)**, **(G)**, **(Q)**, $p, \overline{q} > 2$ і, крім того, $f \in L^{q'(x)}(Q^R_T)$, $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R)$, $u_1 \in$

$L^2(\Omega^R)$. Тоді існує розв'язок u^R задачі (5)-(7) (в сенсі розподілів) такий, що $u^R \in L^\infty((0,T);\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R))$, $|u_t^R|^{\frac{p-2}{2}}u_t^R \in L^2((0,T);\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R))$, $u_t^R \in L^{q(x)}(Q_T^R)$.

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Позначимо через s найменше натуральне число, для якого виконується вкладення $H_0^s(\Omega^R) \subset L^{q(x)}(\Omega^R)$ і, крім того, умова

$$w \in H_0^s(\Omega^R) \Rightarrow w_{x_ix_i} \in L^p(\Omega^R).$$

Розглянемо ортонормовану в $L^2(\Omega^R)$ систему всіх власних функцій задачі

$$(u,v)_{H_0^s(\Omega^R)} = \lambda(u,v)_{L^2(\Omega^R)}, \quad \text{де} \tag{8}$$

$(\cdot,\cdot)_{H_0^s(\Omega^R)}$, $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega^R)}$ - скалярні добутки в просторах $H_0^s(\Omega^R)$ і $L^2(\Omega^R)$ відповідно. Наближений розв'язок задачі (5)-(7) шукаємо у вигляді $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi^k(x)$, де φ^k - власні функції задачі (8), а коефіцієнти C_k^N, $k=1,...,N$ визначаються як розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega^R}\Bigg[u_{tt}^N\varphi^k + \sum_{i=1}^n a_i(x_i',t)|u_t^N|^{p-2}u_{x_it}^N\varphi_{x_i}^k + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}^N\varphi^k + c_0(x,t)u^N\varphi^k + g(x,t,u_t^N)\varphi^k - f(x,t)\varphi^k\Bigg]dx = 0, \tag{9}$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^N,\ C_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N. \tag{10}$$

Тут $u_0^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N u_{0,k}^N\varphi^k(x)$, $u_1^N(x) = \sum\limits_{k=1}^N u_{1,k}^N\varphi^k(x)$ і $\left\|u_0^N - u_0\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R)} \to 0$,

$$\left\|u_1^N - u_1\right\|_{L^2(\Omega^R)} \to 0. \tag{11}$$

На підставі теореми Каратеодорі ([16], с. 54) існує розв'язок задачі (9), (10), визначений на деякому проміжку $(0,t_0]$, що має абсолютно неперервну похідну. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_0 = T$.

Помножимо (9) відповідно на функції $C_{kt}^N e^{-\eta t}$, $\eta > 0$, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $(0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$:

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i=1}^n a_i(x_i',t)|u_t^N|^{p-2}|u_{x_it}^N|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N + c_0(x,t)u^N u_t^N + g(x,t,u_t^N)u_t^N - f(x,t)u_t^N\Bigg]e^{-\eta t}dxdt = 0. \tag{12}$$

Перетворимо та оцінимо кожний доданок з (12), враховуючи умови теореми. Маємо

$$I_1^1 := \int\limits_{Q_\tau^R} u_{tt}^N u_t^N e^{-\eta t}dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\left|u_t^N\right|^2 e^{-\eta\tau}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R}\left|u_1^N\right|^2 dx + \frac{\eta}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^N\right|^2 e^{-\eta t}dxdt;$$

$$I_2^1 := \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n a_i(x_i',t)|u_t^N|^{p-2}|u_{x_it}^N|^2 e^{-\eta t}dxdt \geq \frac{4a_0}{p}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n\left[\left(|u_t^N|^{\frac{p-2}{2}}u_t^N\right)_{x_i}\right]^2 e^{-\eta t}dxdt;$$

$$I_3^1 := \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N e^{-\eta t}dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,\tau)u_{x_i}^N u_{x_j}^N e^{-\eta\tau}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,0)u_{0,x_i}^N u_{0,x_j}^N dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n b_{ijt}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_j}^N e^{-\eta t}dxdt + \frac{\eta}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{x_j}^N e^{-\eta t}dxdt \geq \frac{\theta_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}\left|\nabla u^N\right|^2 e^{-\eta\tau}dx -$$

$$-\frac{B_0}{2}\int\limits_{\Omega_0^R}\left|\nabla u_0^N\right|^2 dx+$$

$$+\left(\frac{\eta\theta_0}{2}-\frac{B^0}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|\nabla u^N\right|^2 e^{-\eta t}dxdt,$$

$$B_0=n\max_{i,j}\operatorname{ess\,sup}_{\Omega^R}\left|b_{ij}(x,0)\right|,$$

$$B^0=n\max_{i,j}\operatorname{ess\,sup}_{Q_T^R}\left|b_{ijt}(x,t)\right|;$$

$$I_4^1:=\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N e^{-\eta t}dxdt\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\left[C_1\left|\nabla u^N\right|^2+\left|u_t^N\right|^2\right]e^{-\eta t}dxdt,$$

$$C_1=\operatorname{ess\,sup}_{Q_T^R}\sum_{i=1}^n c_i^2(x,t);$$

$$I_5^1:=\int\limits_{Q_\tau^R}c_0(x,t)u^N u_t^N e^{-\eta t}dxdt\le$$

$$\le TC_2\int\limits_{\Omega_0^R}|u_0^N|^2dx+\frac{C_2}{2}(2T^2+$$

$$+1)\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2e^{-\eta t}dxdt,$$

$$C_2=\operatorname{ess\,sup}_{Q_T^R}\left|c_0(x,t)\right|;$$

$$I_6^1:=\int\limits_{Q_\tau^R}g(x,t,u_t^N)u_t^N dxdt\ge$$

$$\ge g_0\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^{q(x)}dxdt;$$

$$I_7^1:=\int\limits_{Q_\tau^R}f(x,t)u_t^N\le\frac{1}{2\delta}\int\limits_{Q_\tau^R}|f|^{q'(x)}dxdt+$$

$$+\frac{\delta}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^{q(x)}dxdt;$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1^1-I_7^1$, з (12) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}\left[\left|u_t^N\right|^2+\theta_0\left|\nabla u^N\right|^2\right]e^{-\eta\tau}dx+$$

$$+\frac{8a_0}{p}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n\left[\left(|u_t^N|^{\frac{p-2}{2}}u_t^N\right)_{x_i}\right]^2e^{-\eta t}dxdt+$$

$$+(\eta-1-C_2(2T^2+1))\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2e^{-\eta t}dxdt+$$

$$+(\eta\theta_0-B^0-C_1)\int\limits_{Q_\tau^R}|\nabla u^N|^2e^{-\eta t}dxdt+$$

$$+(2g_0-\delta)\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^{q(x)}e^{-\eta t}dxdt\le$$

$$\le\int\limits_{\Omega_0^R}\left[\left|u_1^N\right|^2+B^0\left|\nabla u_0^N\right|^2+2TC_2\left|u_0^N\right|^2\right]dx+$$

$$+\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_\tau^R}|f(x,t)|^{q'(x)}e^{-\eta t}dxdt.$$

Вибиремо δ і параметр η так, щоб виконувалися умови: $\eta-1-C_2(2T^2+1)\ge 1,\ \eta\theta_0-B^0-C_1\ge 1,\ 2g_0-\delta\ge 1$. Тоді матимемо оцінки

$$||u^N||_{L^\infty((0,T);\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R))}\le M_1,$$

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))\cap L^{q(x)}(Q_T^R)}\le M_1,$$

$$||\,|u_t^N|^{\frac{p(x)-2}{2}}u_t^N||_{L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R))}\le M_1, \qquad (13)$$

де константа M_1 не залежить від N. Крім того, з умови (G) отримуємо, що

$$||g(x,t,u_t^N)||_{L^{q'(x)}(Q_T^R)}\le M_2 \qquad (14)$$

і константа M_2 не залежить від N.

На підставі (13), (14) існує підпослідовність послідовності $\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ (нехай це знову буде $\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$) така, що

$$u^N\to u^R\ *-\text{ слабко в } L^\infty((0,T);\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R)),$$

$$u_t^N(\cdot,T)\to z\text{ слабко в } L^2(\Omega^R),$$

$$u_t^N\to u_t^R\ *-\text{ слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R)),$$

$$u_t^N\to u_t^R\text{ слабко в } L^{q(x)}(Q_T^R),$$

$$\left|u_t^N\right|^{\frac{p-2}{2}}u_t^N\to\chi\text{ слабко в } L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R)),$$

$$g(x,t,u_t^N)\to\xi\text{ слабко в } L^{q'(x)}(Q_T^R). \qquad (15)$$

Розглянемо

$$a(u,v)=\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i^{'},t)|u|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i}\,dx\,dt=$$

$$=\langle\beta(u),v\rangle,\quad u,v\in H_0^s(\Omega^R).$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означає скалярний добуток між просторами $H^{-s}(\Omega^R)$ та $H_0^s(\Omega^R)$.

Оскільки $|u|^{p-2}u_{x_i}=(p-1)(|u|^{p-2}u)_{x_i}$, то

$$a(u,v)=-\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x_i^{'},t)}{p-1}|u|^{p-2}uv_{x_ix_i}\,dx\,dt.$$

Тому

$$|a(u,v)|\le\frac{a^0}{p-1}||\,|u|^{p-2}u\,||_{L^{p'}(\Omega^R)}||\Delta v||_{L^p(\Omega^R)}.$$

Крім того,

$$||\Delta v||_{L^p(\Omega^R)}\le c||v||_{H_0^s(\Omega^R)}.$$

Тоді

$$||\beta(u)||_{H^{-s}(\Omega^R)}\le c_1||u||^{p-1}_{L^p(\Omega^R)}.$$

Далі,

$$\int\limits_0^T||\beta(u)||^{p'}_{H^{-s}(\Omega^R)}\,dt\le$$

$$\le c_2\int\limits_0^T||u||^p_{L^p(\Omega^R)}\,dt\le M_3.$$

Отже,

$$||\beta(u)||_{L^{p'}(0,T;H^{-s}(\Omega^R))}\le M_3.$$

Нехай P_N - оператор ортогонального проектування простору $L^2(\Omega^R)$ на підпростір $\Phi_N=[\phi_1,...,\phi_N]$, де ϕ_1,...,ϕ_N - власні функції задачі (8). Тоді $P_N\in\mathcal{L}(L^2(\Omega^R);L^2(\Omega^R))$, $P_N\in\mathcal{L}(H_0^s(\Omega^R);H_0^s(\Omega^R))$, $P_N\in\mathcal{L}(H_0^{-s}(\Omega^R);H_0^{-s}(\Omega^R))$ і рівномірно обмежений одиницею.

Покладемо

$$\widetilde{B}(u^N)=-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u^N_{x_i})_{x_j},$$

$$C(u^N)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u^N_{x_i}+c_0(x,t)u^N,$$

$$G(u_t^N)=g(x,t,u_t^N).$$

Тоді (9) можна записати як

$$u_{tt}^N+P_N\beta(u_t^N)+P_N\widetilde{B}(u^N)+P_NC(u^N)+$$

$$+P_NG(u_t^N)-P_Nf=0.$$

З цієї рівності на основі (13), (14) робимо висновок, що

$$||u_{tt}^N||_{L^{r_0}((0,T);H^{-s}(\Omega^R))}\le M_4,\quad r_0=\min\{p^{'},\overline{q}^{\,'}\}$$

і константа M_4 не залежить від N.

Застосовуємо теорему 12.1 ([17], с. 154), де покладемо

$$B_1=H^{-s}(\Omega^R),\;\; B=L^p(\Omega^R),\;\; p_1=p^{'}.$$

Тоді існує підпослідовнсть $\{u^{N_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ (нехай це знову буде $\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$) така, що $u_t^N\to u_t^R$ сильно в $L^p(Q_T^R)$ і майже скрізь в Q_T^R. А тому $u_t^N\to u_t^R$ сильно в $L^2(Q_T^R)$ і майже скрізь в Q_T^R. Звідси, використовуючи (15), на основі леми 1.3 ([17], с. 25) отримуємо збіжності

$$\left|u_t^N\right|^{\frac{p-2}{2}}u_t^N\to\left|u_t^R\right|^{\frac{p-2}{2}}u_t^R\;\text{ слабко в}$$

$$L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R)),$$

$$g(x,t,u_t^N)\to g(x,t,u_t^R)\text{ слабко в }\;L^{q^{'}(x)}(Q_T^R).$$

Оскільки $u_t\in L^{q(x)}(Q_T^R)\subset L^2(Q_T^R)$ і $u\in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^R))$, то згідно з лемою 1.2 ([17], с. 20) $u\in C([0,T];L^2(\Omega^R))$. Тому $u^N(\cdot,0)\to u(\cdot,0)$ слабко в $L^2(\Omega^R)$. З іншого боку, $u^N(\cdot,0)=u_0^N\to u_0$ в $L^2(\Omega^R)$. Отже, $u(x,0)=u_0(x)$ майже для всіх $x\in\Omega^R$.

З (9), зокрема, одержали рівність (в сенсі розподілів)

$$u_{tt}^R=-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x_i^{'},t)|u_t^R|^{p-2}u^R_{x_it})_{x_i}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u^R_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u^R_{x_i}-$$

$$-c_0(x,t)u^R-g(x,t,u_t^R)+f.\qquad(16)$$

Враховуючи гладкість правої частини останньої рівності, матимемо

$$u_{tt}^R\in L^{p^{'}}(0,T;W^{-1,p^{'}}(\Omega^R))+$$

$$+L^2(0,T;H^{-1}(\Omega^R))+L^{q'(x)}(Q_T^R)\subset$$
$$\subset L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega^R))+$$
$$+L^2(0,T;H^{-1}(\Omega^R))\subset L^{m'}(0,T;W^{-1,m'}(\Omega^R)),$$
де $m=p$, якщо $p\geq\overline{q}$ і $m=\overline{q}$, якщо $\overline{q}>p$.

Покладемо $æ = \min\{2,m'\}$. Нехай r_1 - таке найменше число, для якого мають місце вкладення $L^2(\Omega^R)\subset H^{-r_1}(\Omega^R)$, $W^{-1,m'}(\Omega^R)\subset H^{-r_1}(\Omega^R)$. Тоді $u_t,u_{tt}\in L^{æ}(0,T;H^{-r_1}(\Omega^R))$ і за лемою 1.2 ([17], с. 20) $u_{tt}\in C([0,T];H^{-r_1}(\Omega^R))$. Отже, початкові умови (6) мають зміст.

Крім того, для всіх $k=1,..,N$
$$\int\limits_{\Omega^R}u_t^N(x,0)\varphi^k(x)\,dx\to\int\limits_{\Omega^R}u_t(x,0)\varphi^k(x)\,dx.$$
З іншого боку,
$$\int\limits_{\Omega^R}u_t^N(x,0)\varphi^k(x)\,dx\to\int\limits_{\Omega^R}u_1(x)\varphi^k(x)\,dx.$$
Тому $u_t(x,0)=u_1(x)$. Аналогічними міркуваннями одержимо, що $u_t(x,T)=z(x)$. Отже, функція u – розв'язок задачі(5)-(7) в сенсі розподілів.

Теорема 2. Нехай виконуються умови **(A)**, **(BC)**, **(Q)**, **(G)**, $p,\overline{q}>2$. Тоді задача (2)-(4) має узагальнений розв'язок (в сенсі розподілів) такий, що $u\in L^\infty((0,T);H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, $|u_t|^{\frac{p-2}{2}}u_t\in L^2((0,T);H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, $u_t\in L^{q(x)}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Фіксуємо $R\in\mathbb{N},\ R>R_0$. Розглянемо $k\in\mathbb{N},\ k>R>1$. Згідно з теоремою 1, для кожного $k\in\{2,...\}$ існує розв'язок (в сенсі розподілів) $u^k\equiv u^{R_K}$ відповідної мішаної задачі (5)-(7), де $u_0=u_1=0$. Нехай $\tau_0,\ \tau\in(0,T)$, $\tau_0<\tau$, $m\in\mathbb{N}$. Визначимо функцію Θ_m на проміжку $[0,T]$ за правилом $\Theta_m(t)=1$, $\tau_0+\frac{2}{m}<t<\tau-\frac{2}{m}$, $\Theta_m(t)=0$, $t>\tau-\frac{1}{m}$, $t<\tau_0+\frac{1}{m}$. Нехай ρ_l – регуляризуюча послідовність в $D(\mathbb{R})$, $\rho_l(t)=\rho_l(-t)$,
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_l(t)dt=1,\qquad \mathrm{supp}\,\rho_l\subset\left[-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right].$$

Розглядатимемо зрізаючу функцію $\varphi_R(x)=[h_R(x)]^\gamma,\ \gamma>0$,
$$h_R(x)=\begin{cases}\dfrac{R^2-|x|^2}{R^2}, & 0\leq|x|\leq R,\\ 0, & |x|>R.\end{cases}$$
Тоді $|\varphi_{R,x_i}|\leq c[h_R(x)]^{\gamma-1}$ і $R-|x|\leq h_R(x)\leq R+|x|$.

Покладемо $v=((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l*\rho_l)\,\Theta_m e^{-\eta t}\varphi_R$, де $l>2m$, $\eta>0$ і $*$ означає згортку за t. Очевидно, що
$$v_t=((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l*\rho_l)_t\Theta_m e^{-\eta t}\varphi_R+$$
$$+((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l*\rho_l)\Theta_m' e^{-\eta t}\varphi_R-$$
$$-\eta((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l*\rho_l)\Theta_m e^{-\eta t}\varphi_R.$$

Домножимо (16) на функцію v та проінтегруємо по області Q_T. Розглянемо доданки одержаної рівності
$$\int\limits_{Q_T}u_{tt}^k v\,dxdt=-\int\limits_{Q_T}u_t^k v_t\varphi_R\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_T}((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)_t*\rho_l)\times$$
$$\times((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l)\varphi_R\,dx\,dt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}((\Theta_m' e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l)\times$$
$$\times((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l)\varphi_R\,dx\,dt+$$
$$+\eta\int\limits_{Q_T}((\Theta_m e^{-\eta t}u_t^k)*\rho_l)^2\varphi_R\,dx\,dt\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}-\int\limits_{Q_T}|u_t^k|^2\Theta_m\Theta_m' e^{-2\eta t}\varphi_R\,dx\,dt+$$
$$+\eta\int\limits_{Q_T}((\Theta_m^2 e^{-2\eta t}u_t^k)*\rho_l)^2\varphi_R\,dx\,dt\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^k|^2e^{-2\eta\tau}\varphi_R\,dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}|u_t^k|^2e^{-2\eta\tau_0}\varphi_R\,dx+$$
$$+\eta\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|u_t^k|^2e^{-2\eta t}\varphi_R\,dx\,dt;$$

$$-\int\limits_{Q_T}\left(\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}\right)_{x_j}v\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}v_{x_j}\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)((u^k_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t})*\rho_l)\times$$
$$\times((u^k_{x_j}\Theta_m e^{-\eta t})_t*\rho_l)\varphi_R\,dx\,dt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)((u^k_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t})*\rho_l)\times$$
$$\times((u^k_{x_j}\Theta'_m e^{-\eta t})*\rho_l)\varphi_R\,dx\,dt+$$
$$+\eta\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)((u^k_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t})*\rho_l)\times$$
$$\times((u^k_{x_j}\Theta_m e^{-\eta t})*\rho_l)\varphi_R\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)((u^k_{x_i}\Theta_m e^{-\eta t})*\rho_l)\times$$
$$\times((u^k_t\Theta_m e^{-\eta t})*\rho_l)\varphi_{Rx_j}\,dx\,dt\underset{l,m\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{l,m\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,\tau)u^k_{x_i}u^k_{x_j}e^{-2\eta\tau}\varphi_R\,dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,\tau_0)u^k_{x_i}u^k_{x_j}e^{-2\eta\tau_0}\varphi_R\,dx+$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}u^k_t e^{-2\eta t}\varphi_{Rx_j}\,dx\,dt+$$
$$+\eta\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}u^k_{x_j}e^{-2\eta t}\varphi_R\,dx\,dt.$$

Далі,

$$\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x'_i,t)|u^k_t|^{p-2}u^k_{x_it}v_{x_i}+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u^k_{x_i}v+c_0(x,t)u^kv+$$
$$\left.+g(x,t,u^k_t)v-f(x,t)v\right]dx\,dt\underset{l,m\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{l,m\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x'_i,t)|u^k_t|^{p-2}u^k_{x_it}(u^k_t\varphi_R)_{x_i}+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u^k_{x_i}u^k_t\varphi_R+c_0(x,t)u^ku^k_t\varphi_R+$$
$$\left.+g(x,t,u^k_t)u^k_t\varphi_R-f(x,t)u^k_t\varphi_R\right]e^{-2\eta t}\,dx\,dt.$$

Таким чином, для майже всіх $\tau_0,\ \tau\in(0,T)$ маємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u^k_t|^2+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,\tau)u^k_{x_i}u^k_{x_j}\right]\times$$
$$\times e^{-2\eta\tau}\varphi_R\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau_0}}\left[|u^k_t|^2+\right.$$
$$\left.\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,\tau_0)u^k_{x_i}u^k_{x_j}\right]e^{-2\eta\tau_0}\varphi_R\,dx+\qquad(17)$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x'_i,t)|u^k_t|^{p-2}u^k_{x_it}(u^k_t\varphi_R)_{x_i}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}u^k_t\varphi_{Rx_j}\right]\times$$
$$\times e^{-2\eta t}dxdt+\eta\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[|u^k_t|^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}u^k_{x_j}\right]e^{-2\eta t}\varphi_R\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u^k_{x_i}u^k_t+c_0(x,t)u^ku^k_t+\right.$$
$$\left.+g(x,t,u^k_t)u^k_t-f(x,t)u^k_t\right]e^{-2\eta t}\varphi_R\,dx\,dt=0.$$

Враховуючи умови теореми та (17), для невиключних точок τ одержуємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u^k_t|^2+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u^k_{x_i}u^k_{x_j}\right]e^{-2\eta\tau}\varphi_R\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i',t)|u_t^k|^{p-2}u_{x_it}^k(u_t^k\varphi_R)_{x_i}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}^k u_t^k\varphi_{Rx_j}\Bigg]e^{-2\eta t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\eta|u_t^k|^2+\eta\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}^k u_{x_j}^k+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u_{x_i}^k u_t^k+c_0(x,t)u^k u_t^k+ \qquad (18)$$

$$+g(x,t,u_t^k)u_t^k-f(x,t)u_t^k\Bigg]e^{-2\eta t}\varphi_R\,dx\,dt=0.$$

Проведемо оцінки деяких доданків з (18).

$$\mathfrak{I}_1=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i',t)|u_t^k|^{p-2}u_{tx_i}^k u_t^k\varphi_{Rx_i}e^{-2\eta t}dxdt\le$$

$$\le\varepsilon_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\Big(|u_t^k|^{\frac{p-2}{2}}u_t^k\Big)_{x_i}\Bigg]^2\varphi_R\,dx\,dt+$$

$$+\varepsilon_1\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^{q(x)}\varphi_R dxdt+$$

$$+c(\varepsilon_1)\int\limits_{Q_\tau}\left|\frac{\varphi_{Rx_i}}{\varphi_R^{\frac{1}{q(x)}+\frac12}}\right|^{s(x)}dxdt,$$

де $\dfrac{1}{q(x)}+\dfrac12+\dfrac{1}{s(x)}=1,$ звідки

$$s(x)=\frac{2q(x)}{q(x)-2};$$

$$\mathfrak{I}_2=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}^k u_t^k\varphi_{Rx_j}e^{-2\eta t}dxdt\le$$

$$\le\varepsilon_2\int\limits_{Q_\tau}|\nabla u^k|^2\varphi_R\,dx\,dt+\varepsilon_2\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^{q(x)}\varphi_R dxdt+$$

$$+c(\varepsilon_2)\int\limits_{Q_\tau}\left|\frac{\varphi_{Rx_i}}{\varphi_R^{\frac{1}{q(x)}+\frac12}}\right|^{s(x)}dxdt,$$

де $\dfrac{1}{q(x)}+\dfrac12+\dfrac{1}{s(x)}=1.$

Оцінки решти доданків з (18) подібні до $I_1^1-I_1^7$. Тому отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^k|^2+|\nabla u^k|^2\Big]\varphi_R dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg(|u_t^k|^2+|\nabla u^k|^2+|u_t^k|^{q(x)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\Big(|u_t^k|^{\frac{p-2}{2}}u_t^k\Big)_{x_i}\Bigg]^2\Bigg)\varphi_R dxdt\le$$

$$\le\widetilde{c}(\varepsilon_3)\int\limits_{Q_\tau}|f(x,t)|^{q'(x)}\varphi_R dxdt+$$

$$+\widetilde{c}(\varepsilon_1,\varepsilon_3)\int\limits_{Q_\tau}\left|\frac{\varphi_{Rx_i}}{\varphi_R^{\frac{1}{q(x)}+\frac12}}\right|^{s(x)}dxdt. \qquad (19)$$

Виберемо $\gamma>\overline{s}-n$, де $\overline{s}=\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega}s(x)$. Оскільки

$$\int\limits_{Q_T}\left|\frac{\varphi_{Rx_i}}{\varphi_R^{\frac{1}{q(x)}+\frac12}}\right|^{s(x)}dxdt\le CR^{\gamma-s(x)+n},$$

$$s(x)=\frac{2q(x)}{q(x)-2},$$

то з (19) матимемо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}\Big[\big|u_t^k\big|^2+\big|\nabla u^k\big|^2\Big]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg(\big|u_t^k\big|^2+\big|\nabla u^k\big|^2+|u_t^k|^{q(x)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\Big(|u_t^k|^{\frac{p-2}{2}}u_t^k\Big)_{x_i}\Bigg]^2\Bigg)dxdt\le C(R), \quad (20)$$

причому $C(R)$ не залежить від k.

З (20) робимо висновок, що

$$\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \text{обмежена в}\ \ L^\infty(0,\tau;H_0^1(\Omega^R)),$$

$$\{u_t^k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \text{обмежена в}\ \ L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega^R))\cap$$

$$L^{q(x)}(Q_\tau^R),\ \{|u_t^k|^{\frac{p-2}{2}}u_t^k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \text{обмежена в}$$

$$L^2(0,\tau;H_0^1(\Omega^R)).$$

Тоді існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (нехай це знову буде $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$) така, що

$$u^k\to u\ *-\text{слабко в}\ L^\infty((0,\tau);H_0^1(\Omega^R)),$$

$$u_t^k(\cdot,\tau) \to z \text{ слабко в } L^2(\Omega^R),$$

$$u_t^k \to u_t * - \text{ слабко в } L^\infty((0,\tau); L^2(\Omega^R)),$$

$$u_t^k \to u_t \text{ слабко в } L^{q(x)}(Q_\tau^R),$$

$$\left|u_t^k\right|^{\frac{p-2}{2}} u_t^k \to \chi \text{ слабко в } L^2(0,\tau; H_0^1(\Omega^R)),$$

$$g(x,t,u_t^N) \to \xi \text{ слабко в } L^{q'(x)}(Q_\tau^R). \quad (21)$$

Такими ж міркуваннями, як і при доведенні теореми 1, одержуємо, що

$$||u_{tt}^N||_{L^{r_0}((0,\tau);H^{-s}(\Omega^R))} \leq M_5, \quad r_0 = \min\{p', \overline{q}'\}$$

і константа M_5 не залежить від k;
$u_t^k \to u_t$ сильно в $L^p(Q_\tau^R)$ і майже скрізь в Q_τ^R, а тому $u_t^k \to u_t$ сильно в $L^2(Q_\tau^R)$ і майже скрізь в Q_τ^R;

$$\chi = |u_t|^{\frac{p-2}{2}} u_t, \quad \xi = g(x,t,u_t) \text{ майже для}$$

$$\text{всіх } (x,\tau) \in Q_\tau^R.$$

Використовуючи діагональний метод та вказівки щодо збіжності послідовності $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, одержимо, що функція u буде розв'язком задачі (2)-(4) в сенсі розподілів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *James M. Greenberg, Richard C. Mac Camy and Victor J. Mizel.* The equation $\sigma'(u_x)u_{tt}+\lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // Journal of Mathematics and Mechanics – 1968. – Vol. 17. – No 7. – P. 707-728.

2. *Constantine M. Dafermos.* The mixed initial-boundary value problem for the equations of nonlinear one-dimensional viscoelasticity // Journal of Differential Equations – 1969. – Vol. 6. – P. 71-86.

3. *Graham Andrews.* On the existence of solution to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$ // Journal of Differential Equations – 1980. – Vol. 35. – P. 200-231.

4. *Dang Dinh Hai.* On a strongly damped quasilinear wave equation // Demonstratio mathematica – 1986. – Vol. XIX, No 2. – P. 327-340.

5. *Глазатов С. Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. – Новосибирск, 1992. Преприпт № 7.

6. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - Вип. 64, - 2005. С. 44-61.

7. *Stuart S. Antman and Thomas I. Seidman.* Quasilinear hyperbolic-parabolic equation of one-dimensional viscoelasticity // Journal of Differential Equations – 1996. – Vol. 124. – P. 132-185.

8. *Mitsuhiro Nakao and Hiroko Okochi.* Anti-periodic solution for $u_{tt} - (\sigma(u_x))_x - u_{xxt} = f(x,t)$// Journal of Mathematical Analysis and Applications – 1996. – Vol. 197. – P. 796-809.

9. *Mitsuhiro Nakao.* Existence of an anti-periodic solution for the quasilinear wave equation with viscosity// Journal of Mathematical Analysis and Applications – 1996. – Vol. 204. – P. 754-764.

10. *Fengxin Chen, Boling Guo and Ping Wang.* Long time behavior of strongly damped nonlinear wave equations // Journal of Differential Equations – 1998. – Vol. 147. – P. 231-1241.

11. *João – Paulo Dias.* On the existence of a global strong radial symmetric solution for a third-order nonlinear evolution equation in two space dimensions// Journal of Mathematical Pures Applications – 2001. – Vol. 80. – No. 5. – P. 535-546.

12. *Zhijian Yang and Guowang Chen.* Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping// Journal of Mathematical Analysis and Applications – 2003. – Vol. 285. – P. 604-618.

13. *Zhijian Yang.* Cauchy problem for quasi-linear wave equations with nonlinear damping and source terms // Journal of Mathematical Analysis and Applications – 2004. – Vol. 300. – P. 218-243.

14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

15. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41 (116). – P. 592-618.

16. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

17. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.