УДК 517.51

©2007 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ПРО ОДНУ ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ СУКУПНОЇ КВАЗІНЕПЕРЕРВНОСТІ

Доведено, що для берівського простору X, топологічного простору Y з другою аксіомою зліченності і метризовного сепарабельного простору Z відображення $f : X \times Y \to Z$ буде квазінеперервним за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли воно горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X.

Let X be a Baire space, Y be a second countable space and Z be a metrizable separable space. We obtain that a function $f : X \times Y \to Z$ is joint quasi-continuous if and only if it is horizontally quasi-continuous and quasi-continuous with respect to the second variable when the first variable runs over some residual set.

1. Вступ. С.Кемпістий в [1] встановив, що функція багатьох змінних $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, яка квазінеперервна відносно кожної з них, є квазінеперервною. Результати на цю тему у різних формулюваннях фігурують в [2-5]. Найзагальнішим серед них є результат В.К.Маслюченка, який одержаний ним в [5]: якщо X – берівський, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної, то відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.

Тут ми продовжимо дослідження в цьому напрямку. Спочатку дещо послабимо умови на функцію у згаданому результаті В.К.Маслюченка (теорема 1). Далі наводимо приклад горизонтально квазінеперервного і вертикально квазінеперервного відображення, яке не є квазінеперервним за сукупністю змінних (приклад 1). Але в побудованому прикладі функція не є точково розривною. Тому природно виникає питання: чи буде горизонтально квазінеперервна, вертикально квазінеперервна і точково розривна функція квазінеперервною за сукупністю змінних? Ми не знаємо відповіді на поставлене питання, але якщо на горизонтально і вертикально квазінеперервну функцію накласти трохи сильнішу умову ніж точкова розривність, яка також пов'язана з наявністю точок неперервності функції, то це дасть нам квазінеперервність функції за сукупністю змінних (теорема 2).

Легко бачити, що квазінеперервне за сукупністю змінних відображення може не бути нарізно квазінеперервним чи навіть горизонтально квазінеперервним та квазінеперервним відносно другої змінної (приклад 2). В [6] було встановлено: якщо простір X задовольняє другу аксіому зліченності, простір Y метризовний або задовольняє другу аксіому зліченності, Z — сепарабельний метризовний топологічний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних, то існує залишкова в Y множина B, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно y в кожній точці добутку $X \times B$. Т.Банах висловив припущення, що це твердження буде вірним, коли простір Y лише топологічний. Виявляється, що послабити умови можна не лише на простір Y, але й на простір Z, вимагаючи лише, щоб простір Z задовольняв другу аксіому зліченності, а Y був довільним топологічним простором. Для того, щоб було зручно скористатись теоремою 3 для встановлення характеризації квазінеперервності, на відміну від згаданої теореми з [6], умови на простори X та Y переставлено і одержано результат про точки симетричної квазінеперервності відносно змінної x (теорема 3).

Як наслідок цих результатів ми отримуємо характеризацію сукупної квазінеперервності: якщо X — берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний сепарабельний топологічний простір, то відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f — горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X (теорема 4).

2. Основні означення та позначення.

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка система множин в топологічниму просторі P. Нагадаємо, що відображення $f : P \to Z$ називається *$\mathcal{A}$-квазінеперервним в точці $p_0 \in P$*, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і для кожного околу O точки p_0 в P існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що $A \subseteq O$ і $f(A) \subseteq W$. Якщо $\mathcal{A}$ — система відкритих множин простору P, то $\mathcal{A}$-квазінеперервність в точці p_0 називається *квазінеперервністю в точці p_0*. Нехай $P = X \times Y$, де X і Y — топологічні простори. Якщо в ролі системи $\mathcal{A}$ взяти відповідно множини $\{U \times V : U$ — відкрита непорожня в X, V — відкрита непорожня в Y $\}$, $\{U \times \{y\} : U$ — відкрита непорожня в X, $y \in Y\}$, $\{\{x\} \times V : x \in X, V$ — відкрита непорожня в $Y\}$, $\{U \times V : U$ — окіл точки $x_0 \in X, V$ — відкрита непорожня в $Y\}$ або $\{U \times V : U$ — відкрита непорожня в X, V — окіл точки $y_0 \in Y\}$, то $\mathcal{A}$-квазінеперервність в точці p_0 називається відповідно *сукупною квазінеперервністю*, *горизонтальною квазінеперервністю*, *вертикальною квазінеперервністю*, *симетричною квазінеперервністю відносно x* або *симетричною квазінеперервністю відносно y в точці p_0*. Відображення називається *сукупно квазінеперервним*, *горизонтально квазінеперервним*, *вертикально квазінеперервним*, *симетрично квазінеперервним відносно x* або *симетрично квазінеперервним відносно y*, коли воно є таким в кожній точці.

Позначимо через $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$ клас всіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і квазінеперервні відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X, через $K_hK_v(X \times Y, Z)$ клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і вертикально квазінеперервні, а через $K(X \times Y, Z)$ клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні за сукупністю змінних. Позначимо через $C(f)$ множину точок неперервності відображення f, а через $C_y(f)$ множину точок $x \in X$, таких, що відображення f неперервне в точці (x, y).

3. Квазінеперервність $K_h\tilde{K}$-функцій зі значеннями в регулярному просторі.

Нам буде потрібна проста лема, яка доведена, наприклад, в [5].

Лема. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, U — відкрита непорожня множина в X, V — відкрита непорожня множина в Y, множина A міститься в X і така, що $U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Теорема 1. *Нехай X — берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — регулярний простір, відображення $f \in K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$. Тоді відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай M — множина точок $x \in X$, таких, що відображення f^x квазінеперервне. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Розглянемо довільний окіл W точки $f(p_0)$ в Z, замкнений окіл W_1 і відкритий окіл W_2 цієї ж точки, такі, що $W_2 \subseteq W_1 \subseteq W$. Візьмемо довільні відкриті околи U і V точок x_0 в X і y_0 в Y відповідно. Згідно з горизонтальною квазінеперервністю відображення f в точці p_0 існують відкрита непорожня множина G в X і точка $y_1 \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{y_1\}) \subseteq W_2$. Оскільки множина W_2 відкрита, то W_2 є околом кожної точки множини $f(G \times \{y_1\})$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ — псевдобаза простору Y, причому $V_n \neq \emptyset$. Розглянемо множини $A_n = \{x \in G \cap M : f(\{x\} \times V_n) \subseteq W_2\}$, при $n \in \mathbf{N}$. Покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = G \cap M$. Візьмемо точку $x \in G \cap M$. Оскільки відображення f^x квазінеперервне в точці y_1 і W_2 — окіл точки $f(x, y_1)$, то існує відкрита непорожня множина V в Y, така, що $f(\{x\} \times V) \subseteq W_2$. Існує номер n, такий, що $V_n \subseteq V$. Тоді $x \in A_n$. Отже, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = G \cap M$.

Оскільки G — це множина другої категорії в X і M — залишкова в X, то множина $G \cap M$ другої категорії. З беровості простору X випливає, що існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} десь щільна. Позначимо $G_1 = int\overline{A_{n_0}}$. Оскільки $\emptyset \neq G_1 \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і множина G_1 відкрита, то $G_1 \cap A_{n_0} \neq \emptyset$. Покладемо $G_2 = G_1 \cap G$ і $A = A_{n_0} \cap G_2$. Тоді $\emptyset \neq G_1 \cap A_{n_0} \subseteq G_1 \cap G = G_2$, отже, $G_2 \neq \emptyset$. Зрозуміло, що $G_2 \subseteq \overline{A}$ і $f(A \times V_{n_0}) \subseteq W_2$. Згідно з лемою маємо, що

$$f(G_2 \times V_{n_0}) \subseteq \overline{f(A \times V_{n_0})} \subseteq \overline{W_2} \subseteq$$
$$\subseteq \overline{W_1} = W_1 \subseteq W.$$

А це означає, що відображення f є квазінеперервним в точці p_0.

4. Квазінеперервність K_hK_v-функцій.

Горизонтально і вертикально квазінеперервні функції вже не зобов'язані бути квазінеперервними. Це показує наступний приклад.

Приклад 1. Побудуємо горизонтально і вертикально квазінеперервну функцію на $[0,1]^2$, яка б не була квазінеперервною за сукупністю змінних в кожній точці квадрата $[0,1]^2$.

Нехай $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} : k = 1, 2, .., 2^{n-1}\}$, де $n \in \mathbf{N}$, $A_0 = \emptyset$ і $B_n = \bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i$. Визначимо функцію $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ так: $f(x, y) = 1$, якщо $x \in A_{2m-1}$ і $y \in [0,1] \setminus B_{2m-2}$, де $m \in \mathbf{N}$, або $y \in A_{2m-1}$ і $x \in [0,1] \setminus B_{2m-1}$, де $m \in \mathbf{N}$, або якщо x і y не двійково раціональні; $f(x, y) = 0$, якщо $x \in A_{2m}$ і $y \in [0,1] \setminus B_{2m-1}$, де $m \in N$, або $y \in A_{2m}$ і $x \in [0,1] \setminus B_{2m}$, де $m \in \mathbf{N}$.

Покажемо, що так визначена функція f є горизонтально квазінеперервною і вертикально квазінеперервною. Доведемо тільки горизонтальну квазінеперервність, бо вертикальна квазінеперервність встановлюється аналогічно.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in [0,1]^2$. Вважаємо, що $f(p_0) = 1$. Для випадку, коли $f(p_0) = 0$ треба міркувати аналогічно. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U і V в $[0,1]$, такі, що $x_0 \in U$ і $y_0 \in V$. Множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}$ є всюди щільна в $[0,1]$. Тому існує номер n, такий, що $A_{2n-1} \cap V \neq \emptyset$. Візьмемо довільну точку $y_1 \in A_{2n-1} \cap V \neq \emptyset$. Внаслідок того, що множина B_{2m-1} скінченна, існує відкрита непорожня множина U_1 в $[0,1]$, така, що $U_1 \subseteq U$ і $U_1 \subseteq [0,1] \setminus B_{2m-1}$. Згідно з побудовою на множині $U_1 \times \{y_1\}$ значення функції f рівне 1. Це доводить горизонтальну квазінеперервність функції f в точці p_0. Оскільки в кожному прямокутнику, який міститься в $[0,1]^2$ є точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, в яких значення функції рівне 1, то функція f не є квазінеперервною в жодній точці з $[0,1]^2$.

Отже, приклад показує, що умов горизонтальної і вертикальної квазінеперервності не досить для того, щоб функція була квазінеперервною. Більше того, цей приклад показав, що горизонтально і вертикально квазінеперервна функція може не бути квазінеперервною в жодній точці.

Побудована у прикладі 1 функція скрізь розривна. Якщо множина $C(f)$ функції $f \in K_hK_v(X \times Y, Z)$ у певному сенсі велика, то такого прикладу, як показує наступна теорема, побудувати не можна.

Теорема 2. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ — горизонтально і вертикально квазінеперервне відображення і множина $M = \{y \in Y : \overline{C_y(f)} \neq X\}$ ніде не щільна в Y. Тоді відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення f квазінеперервне в точці p_0. Візьмемо довільні відкриті околи W, U і V точок $z_0 = f(x_0, y_0)$, x_0 і y_0 відповідно у просторах X, Y і Z.

Оскільки відображення f вертикально квазінеперервне, то існують точка $x_1 \in X$ і відкрита непорожня множина V_1, такі, що $f(\{x_1\} \times V_1) \subseteq W$.

Покажемо, що існує щільна в V_1 множина A така, що для кожного $y \in A$ існує відкрита в X множина U_y, що $U_y \subseteq U$ і $f(U_y \times \{y\}) \subseteq W$. Справді, оскільки множина W – відкрита, то W є околом кожної точки (x_1, y), де $y \in V_1$. Візьмемо відкриту непорожню множину G в Y, таку, що $G \subseteq V_1$. Оскільки $G \neq \emptyset$, то існує $y \in G$. Згідно з горизонтальною квазінеперервністю відображення f в точці $(x_1, y) \in U \times G$ існують точка $y_1 \in G$ і відкрита непорожня множина U_{y_1} в X, такі, що $U_{y_1} \subseteq U$ і $f(U_{y_1} \times \{y_1\}) \subseteq W$. Отже, множина A щільна в V_1. Оскільки множина M ніде не щільна, а множина A щільна в V_1, то існує точка $y' \in A \cap (Y \setminus M)$. Тоді множина $C_{y'}(f)$ всюди щільна в X. Значить існує точка $x' \in C_{y'}(f) \cap U_{y'}$. Знову ж, з відкритості W випливає, що W є околом точки (x', y'). Оскільки відображення f неперервне в точці (x', y'), то існує відкритий окіл O точки (x', y') в $X \times Y$, такий, що $O \subseteq U \times V$ і $f(O) \subseteq W$. Це доводить, що відображення f квазінеперервне в точці p_0.

Питання. *Чи кожна горизонтально і вертикально квазінеперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$, яка точково розривна, квазінеперервна за сукупністю змінних?*

5. Симетрична квазінеперервність сукупно квазінеперервних відображень.

Легко навести приклад сукупно квазінеперервної функції, яка не є нарізно квазінеперервною.

Приклад 2. Побудуємо сукупно квазінеперервну функцію на $[0,1]^2$, яка б не була квазінеперервною відносно першої і другої змінної.

Покладемо

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{якщо } (x,y) \in [0,\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2},1], \\ 1, \text{якщо } (x,y) \in (\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}), \\ 1, \text{якщо } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, \\ 0, \text{ в інших точках } [0,1]^2. \end{cases}$$

Функція f квазінеперервна за сукупністю змінних, але функція $f_{\frac{1}{2}}$ не є квазінеперервною в точці $x = \frac{1}{2}$ і функція $f^{\frac{1}{2}}$ не є квазінеперервною в точці $y = \frac{1}{2}$.

Зауважимо, що побудована у прикладі 2 функція належить до $K_h\tilde{K}([0,1]^2, \mathbf{R})$, але не належить до $K_hK([0,1]^2, \mathbf{R})$.

Наступний результат допоможе нам встановити, що сукупно квазінеперервна функція все ж має певні риси нарізної квазінеперервності.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, простори Y і Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці добутку $A \times X$. Тоді існує множина E другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E$ існують околи $W(x), U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок $z_x = f(p_x)$ в Z, x в X і y_x в Y, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $f(U \times V) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{W_m : m \in \mathbf{N}\}$ і $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ — бази просторів Z та Y відповідно. Для номерів n і m розглянемо множини $B_{n,m}$ тих точок $x \in E$, що $y_x \in V_n, z_x \in W_m$ і для довільного околу U точки x в X та довільної відкритої непорожньої множини V в Y з того, що $V \subseteq V_n$ маємо $f(U \times V) \not\subseteq W_m$. Покажемо, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} = E$. Візьмемо точку $x \in E$. Оскільки відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно першої змінної в точці (x, y_x), то існують околи $W(x), U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок

$z_x = f(x, y_x)$ в Z, x в X і y_x в Y, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $f(U \times V) \nsubseteq W(x)$. Тоді існують номери n і m, такі, що $y_x \in V_n \subseteq V(x)$ і $z_x \in W_m \subseteq W(x)$. Зауважимо, що коли $f(U \times V) \nsubseteq W(x)$ для кожного околу U, такого, що $U \subseteq U(x)$, то $f(U \times V) \nsubseteq W(x)$ для довільного околу U точки x. Таким чином, для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $V \subseteq V_n$, маємо, що $f(U \times V) \nsubseteq W(x)$. А це означає, що $x \in B_{n,m}$.

Оскільки множина E другої категорії в X, то існують числа m_0 і n_0, такі, що множина B_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G. Розглянемо точку $p_x = (x, y_x)$, де $x \in B = B_{n_0,m_0} \cap G$. Оскільки відображення f квазінеперервне в точці p_x, то існують відкриті множини U і V відповідно в просторах X і Y, такі, що $U \times V \subseteq G \times V_{n_0}$ і $f(U \times V) \subseteq W_{m_0}$. З щільності множини B в G випливає, що існує точка $x_0 \in U \cap B$. Тоді множина U є околом точки x_0. Отже, $f(U \times V) \subseteq W_{m_0}$, де U — окіл точки x_0, а $V \subseteq V_{n_0}$. А це суперечить тому, що $x_0 \in B$. Одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне.

6. Характеризація сукупної квазінеперервності.

Теорема 4. *Нехай X — берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний сепарабельний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f — горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X.*

Доведення. Зауважимо, що метризовний сепарабельний простір є регулярним з другою аксіомою зліченності. Тому достатність випливає з теореми 1. Необхідність одержується з теореми 3 і того факту, що кожне квазінеперервне за сукупністю змінних відображення є горизонтально квазінеперервне, а якщо відображення f симетрично квазінеперервне відносно змінної x, то f^x квазінеперервне.

Ця теорема дає рівність класів функцій:

$$K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z),$$

де X — берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний сепарабельний простір.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kempisty S. Sur les fuctions quasicontinues // Fund. Math. — 1932. — 19. — P. 184 - 197.
2. Martin N.F.G. Quasi-continuous functions on product spaces // Duce Math. J. — 1961. — P. 39 - 44.
3. Breckenridge J.C., Nishiura T. Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Math. Acad. Sinica. — 1976. — 4, № 2. — P. 191 - 203.
4. Neubrunn T. Quasi-continuity // Real Anal. Exch. — 1988. -1989. —14, №3. — P. 259 - 306.
5. Маслюченко В.К. Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Математичні Студії. — 2006. — Т. 25, № 2. — С. 213 - 218.
6. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В. Симетрична квазінеперервність сукупно квазінеперервних функцій // Математичні Студії. — 1999. — Т. 11, № 2. — С. 204 - 208.