УДК 517.51, 515.12

©2007 р. В.В.Михайлюк, В.А. Холоменюк

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

УТОЧНЕННЯ ОЦІНКИ В НЕРІВНОСТІ ХІНЧИНА ДЛЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Визначається асимптотична поведінка констант, які фігурують в нерівності Хінчина для незалежних випадкових величин з нульовим математичним сподіванням.

Asymptotic behavior of the constants in Khinchin's inequality for independent random variables with zero average of distribution is investigated.

1. Нехай $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ - послідовність функцій Радемахера

$$r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t), \quad t \in [0,1].$$

Для довільних $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$ і послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ скалярів $a_n \in \mathbb{R}$ згідно з класичною нерівністю Хінчина [1]

$$A_p^{(0)}(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}} \leq (\int\limits_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq B_p^{(0)}(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

де

$$A_p^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & p \in [1,2), \\ 1, & p \in [2,+\infty), \end{cases}$$

$$B_p^{(0)} = \begin{cases} 1, & p \in [1,2], \\ O(\sqrt{p}), & p \in (2,+\infty). \end{cases}$$

Ця нерівність досить широко застосовується в теорії ймовірностей і аналізі і узагальнюється в різних напрямках (див. [2-5]).

Нагадаємо, що вимірні за Лебегом функції $f_1, ..., f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ називаються *незалежними випадковими величинами*, якщо для довільних $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ з $a_1 < b_1, ..., a_n < b_n$ має місце наступна рівність

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{n}\{t \in [0,1] : a_k \leq f_k(t) \leq b_k\}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mu(\{t \in [0,1] : a_k \leq f_k(t) \leq b_k\}),$$

де μ – міра Лебега на [0,1]. Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ вимірних функцій $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ називається *послідовністю незалежних випадкових величин*, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функції $f_1, ..., f_n$ є незалежними випадковими величинами.

В [6] доведена нерівність типу нерівності Хінчина для k-кратних добутків незалежних випадкових величин з нульовим математичним сподіванням. Зокрема, для послідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ незалежних випадкових величин $y_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ таких,що $y_n \in L_p[0,1]$ для кожного $p \in [1, \infty)$ і $\int\limits_{[0,1]} y_n d\mu = 0$, має місце нерівність

$$\frac{\alpha_q A_p^{(0)}}{p^*}(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}} \leq ||\sum_{n=1}^{m} a_n y_n||_p \leq$$

$$\leq \beta_r B_p^{(0)} p^*(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

де

$$p \in (1, +\infty),\ r = \max\{p, 2\},\ q = \min\{p, 2\},$$

$p^* = \max\{p, \frac{p}{p-1}\} - 1$, $a_n \in \mathbb{R}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $||\cdot||_p$ – норма в просторі $L_p[0,1]$, $\alpha_q = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} ||y_n||_q$ і $\beta_r = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||y_n||_r$.

Крім того, в [6] зауважено, що ліва оцінка в нерівності (1.2) є дуже грубою і хоча

$\lim\limits_{p\to 1+0} p^* = +\infty$ аналогічно, як при доведенні нерівності Хінчина можна отримати аналог (1.2) при $p=1$. Таким чином, нерівність (1.2) можна записати у такому вигляді

$$\alpha_q \cdot A_p(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}} \le ||\sum_{n=1}^{m} a_n y_n||_p \le$$

$$\le \beta_r \cdot B_p(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.3)$$

де $p \in [1,+\infty)$, і A_p та B_p – це відповідно найбільша і найменша константи, для яких виконується ця нерівність для довільної послідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ незалежних випадкових величин з нульовим математичним сподіванням.

Зауважимо, що згідно з (1.2) має місце нерівність $B_{2p} \le O(p\sqrt{p})$. Отже, нерівність (1.2) для послідовності функцій Радемахера дає значно грубшу оцінку в порівнянні з (1.1). Тому природно виникає питання про дослідження асимптотики поведінки B_p при $p\to\infty$.

В даній статті ми, розвиваючи класичний комбінаторний метод доведення нерівності (1.1), покажемо, що $B_{2p} \le p$ при $p \in \mathbb{N}$.

2. Спочатку доведемо допоміжний комбінаторний результат, який ми будемо використовувати при дослідженні поведінки констант B_p з нерівності (1.3).

Нагадаємо, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$(a_1+...+a_m)^p =$$

$$= \sum_{k_1+...+k_m=p,\ k_i\ge 0} \gamma(k_1,...,k_m)\cdot a_1^{k_1}\cdot ...\cdot a_m^{k_m} =$$

$$= \sum_{1\le s\le p}\ \sum_{k_1+...+k_s=2p,\ k_i\ge 1} \gamma(k_1,...,k_s)\times$$

$$\times\ a_{n_1}^{k_1}\cdot ...\cdot a_{n_s}^{k_s},$$

де

$$\gamma(k_1,...,k_m) = \frac{(k_1+...+k_m)!}{k_1!\cdot ...\cdot k_m!}.$$

Наступне твердження показує, що у правій частині вказаного вище розкладу полінома основну частину суми утворюють доданки, які містять перші степені доданків a_i.

Лема 2.1. Нехай $a_1,...,a_n\ \ge 0$. Тоді

$$\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{k_1+...+k_s=2p,\ k_i\ge 2} \gamma(k_1,...,k_s)\times$$

$$\times \sum_{1\le n_1<n_2...<n_s\le n} a_{n_1}^{k_1}\cdot ...\cdot a_{n_s}^{k_s} \le p^{2p}(a_1^2+...+a_m^2)^p.$$

Доведення. Без обмеження загальності можемо вважати, що $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$.

Розглянемо множини $A = \{(k_1,k_2,...,k_s) : 1\le s\le p,\ k_i\ge 2,\ \ k_1+k_2+...+k_s = 2p)\}$ та $B = \{(m_1,m_2,...,m_s) : 1\le s\le p,\ m_i\in \mathbb{N},\ m_1+m_2+...+m_s = p)\}$.

Побудуємо відображення $\varphi : A\to B$, яке задовольняє наступні умови:

якщо $\varphi(k_1,k_2,...,k_s) = (m_1,m_2,...,m_r)$, то $s=r$; (2.1)

$a_{n_1}^{k_1}\cdot ...\cdot a_{n_s}^{k_s} \le a_{n_1}^{2m_1}\cdot ...\cdot a_{n_s}^{2m_s}$ для довільних $1\le n_1\le ...\le n_s\le n$, $(k_1,k_2,...,k_s)\in A$ і $(m_1,m_2,...,m_s) = \varphi(k_1,k_2,...,k_s)$. (2.2)

Нехай $s\in\mathbb{N}$, $(k_1,k_2,...,k_s)\in A$. Позначимо через I множину всіх номерів $i\le s$ таких, що k_i – парне, а через J – множину всіх номерів $j\le s$ таких, що k_j – непарне. Зрозуміло, що $I\sqcup J = \{1,...,s\}$. Крім того, оскільки $k_1+k_2+...+k_s = 2p$ – парне число, то множина J складається з парної кількості елементів.

Нехай $J = \{j_1,j_2,...,j_{2r}\}$, причому $j_1 < j_2 < ... < j_{2r}$. Покладемо

$$m_i = \begin{cases} \frac{k_i}{2}, & i\in I,\\ \frac{k_i+1}{2}, & i = j_{2l-1},\ 1\le l\le r,\\ \frac{k_i-1}{2}, & i = j_{2l},\ 1\le l\le r,\end{cases}$$

для кожного $j\le s$ і

$$\varphi(k_1,k_2,...,k_s) = (m_1,m_2,...,m_s).$$

Оскільки $k_j\ge 3$ для кожного $j\in J$, то $m_i\ge 1$ для кожного $i\le s$. Крім того, $m_1+m_2+...+m_s = \frac{1}{2}\cdot(n_1+n_2+...+n_s) = p$, тобто $(m_1,m_2,...,m_s)\in B$.

Зрозуміло, що відображення φ задовольняє умову (2.1). Перевіримо умову (2.2).

Нехай $1\le n_1 < ... < n_s\le n$, $(k_1,k_2,...,k_s)\in A$ і $(m_1,m_2,...,m_s) = \varphi(k_1,k_2,...,k_s)$.

Тоді

$$a_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{k_s}=\prod_{i\in J\sqcup I}a_{n_i}^{k_i}=\prod_{i\in I}a_{n_i}^{k_i}\cdot a_{n_{j_1}}^{k_{j_1}}\cdot\ldots\cdot a_{n_{j_{2r}}}^{k_{j_{2r}}}\le$$

$$\le\prod_{i\in I}a_{n_i}^{2m_i}\cdot a_{n_{j_1}}^{k_{j_1}+1}\,a_{n_{j_2}}^{k_{j_2}-1}\cdot\ldots\cdot a_{n_{j_{2r-1}}}^{k_{j_{2r-1}}+1}\cdot a_{n_{j_{2r}}}^{k_{j_{2r}}-1}=$$

$$=\prod_{i\in I}a_{n_i}^{2m_i}\cdot\prod_{i\in J}a_{n_i}^{2m_i}=a_{n_1}^{2m_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{2m_s}.$$

Зафіксуємо $s\le p$, $1\le n_1<n_2<\ldots<<n_s\le n$ і $b=(m_1,m_2,\ldots,m_s)\in B$. Для довільних $c_1,c_2,\ldots,c_s$ маємо

$$(c_1+c_2+\ldots+c_s)^{2p}=$$

$$=\sum_{k_1+\ldots+k_s=2p,\ k_i\ge0}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\cdot c_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot c_s^{k_s}.$$

Поклавши $c_1=c_2=\ldots=c_s=1$, отримаємо

$$s^{2p}=\sum_{k_1+\ldots+k_s=2p,\ k_i\ge0}\gamma(k_1,\ldots,k_s).$$

Тоді

$$\sum_{(k_1,\ldots k_s)\in\varphi^{-1}(b)}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\ a_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{k_s}\le$$

$$\le\sum_{(k_1,\ldots k_s)\in\varphi^{-1}(b)}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\ a_{n_1}^{2m_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{2m_s}\le$$

$$\le a_{n_1}^{2m_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{2m_s}\sum_{k_1+\ldots k_s=2p,\ 0\le k_i\le2p}\gamma(k_1,\ldots,k_s)=$$

$$=s^{2p}\cdot a_{n_1}^{2m_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{2m_s}.$$

Тепер маємо

$$\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{k_1+\ldots+k_s=2p,\ k_i\ge2}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\times$$

$$\times\sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}a_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{k_s}=$$

$$=\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{(k_1,\ldots,k_s)\in A}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\times$$

$$\times\sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}a_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{k_s}=$$

$$=\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}$$

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_s)\in A}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\ a_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{k_s}=$$

$$=\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}\ \sum_{b=(m_1,\ldots,m_s)\in B}$$

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_s)\in\varphi^{-1}(b)}\gamma(k_1,\ldots,k_s)\ a_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_s}^{k_s}\le$$

$$\le\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}$$

$$\sum_{(m_1,\ldots,m_s)\in B}p^{2p}(a_{n_1}^2)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(a_{n_s}^2)^{m_s}=$$

$$=p^{2p}\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}$$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_s=p,\ m_i\ge1}(a_{n_1}^2)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(a_{n_s}^2)^{m_s}\le$$

$$\le p^{2p}\sum_{1\le s\le p}\ \sum_{1\le n_1<n_2<\ldots<n_s\le n}$$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_s=p,\ m_i\ge1}\gamma(m_1,\ldots,m_s)\times$$

$$\times(a_{n_1}^2)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(a_{n_s}^2)^{m_s}\le$$

$$\le p^{2p}(a_1^2+\ldots+a_n^2)^p.$$

Таким чином, лема 2.1. доведена.

3. Основним результатом даного пункту є наступна теорема, метод доведення якої подібний до доведення класичної нерівності Хінчина з [1] і базується на лемі 2.1.

Теорема 3.1. Нехай $(y_n(t))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність незалежних випадкових величин $y_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, які задовольняють наступні умови:

$$\int_{[0,1]}y_n(t)\,d\mu=0,\ \forall n\in\mathbb{N};\tag{3.1}$$

$$\beta_p=\sup_{n\in\mathbb{N}}||y_n||<+\infty \text{ для кожного } p\ge1.\tag{3.2}$$

Тоді $B_{2p}\le p$ для кожного $p\in\mathbb{N}$.

Доведення. Зауважимо, що функція β_p з умови (3.2) є зростаючою. Крім того, для довільних скінченних множин $I=\{i_1,\ldots,i_n\}$, $\{k_1,\ldots,k_n\}\in\mathbb{N}$ і номера $j\notin I$ випадкові величини y_j та $z=y_{i_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot y_{i_n}^{k_n}$ є незалежними. Тому

$$\int_{[0,1]}y_j\cdot y_{i_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot y_{i_n}^{k_n}\,d\mu=$$

$$= \int\limits_{[0,1]} y_j \, d\mu \cdot \int\limits_{[0,1]} y_{i_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}^{k_n} \, d\mu = 0. \qquad (3.3)$$

Розглянемо спочатку випадок додатніх скалярів. Нехай $p \in \mathbb{N}$ і $a_1, ..., a_m \geq 0$. Доведемо, що $|| \sum\limits_{n=1}^{m} a_n y_n||_{2p} \leq \beta_{2p} p (\sum\limits_{n=1}^{m} a_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Маємо

$$\int\limits_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{m} a_n \cdot y_n|^{2p} \, d\mu =$$

$$= \sum_{1 \leq s \leq 2p} \sum_{k_1 + ... + k_s = 2p, \; k_i \geq 1} \gamma(k_1, ..., k_s) \times$$

$$\times \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_s \leq n} a_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n_s}^{k_s} \cdot \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]} y_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot y_{n_s}^{k_s} \, d\mu \quad =$$

$$= \sum_{1 \leq s \leq 2p} \sum_{k_1 + ... + k_s = 2p, \; k_i \geq 2} \gamma(k_1, ..., k_s) \times$$

$$\times \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_s \leq n} a_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n_s}^{k_s} \cdot \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]} y_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot y_{n_s}^{k_s} \, d\mu \quad \leq$$

$$\leq \sum_{1 \leq s \leq 2p} \sum_{k_1 + ... + k_s = 2p, \; k_i \geq 2} \gamma(k_1, ..., k_s) \times$$

$$\times \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_s \leq n} a_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n_s}^{k_s} \cdot | \int\limits_{[0,1]} y_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot y_{n_s}^{k_s} \, d\mu|.$$

Оскільки випадкові величини $y_{n_1}^{k_1}, ..., y_{n_s}^{k_s}$ незалежні, то

$$| \int\limits_{[0,1]} y_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot y_{n_s}^{k_s} \, d\mu| =$$

$$= | \int\limits_{[0,1]} y_{n_1}^{k_1} \, d\mu| \cdot ... \cdot | \int\limits_{[0,1]} y_{n_s}^{k_s} \, d\mu| \leq$$

$$\leq ||y_{n_1}||_{k_1}^{k_1} \cdot ... \cdot ||y_{n_s}||_{k_s}^{k_s} \leq ||y_{n_1}||_{2p}^{k_1} \cdot ... \cdot ||y_{n_s}||_{2p}^{k_s} \leq$$

$$\leq \beta_{2p}^{k_1 + ... + k_s} = \beta_{2p}^{2p}.$$

Оцінивши суму згідно з лемою 2.1, отримаємо

$$\int\limits_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{m} a_n \cdot y_n|^{2p} \, d\mu \leq$$

$$\leq \beta_{2p}^{2p} \sum_{1 \leq s \leq 2p} \sum_{k_1 + ... + k_s = 2p, \; k_i \geq 2} \gamma(k_1, ..., k_s) \times$$

$$\times \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_s \leq n} a_{n_1}^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n_s}^{k_s} \quad \leq$$

$$\leq \beta_{2p}^{2p} \; p^{2p} \; (a_1^2 + ... + a_m^2)^p = \beta_{2p}^{2p} \; p^{2p} \; (\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \;)^p.$$

Отже,

$$(\int\limits_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{m} a_n y_n|^{2p} \, d\mu)^{\frac{1}{2p}} \leq \beta_{2p} \; p \; (\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \;)^{\frac{1}{2}}.$$

Тепер застосувавши щойно одержану оцінку до скалярів $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ і незалежних випадкових величин $z_1 = sign \; a_1 y_1$, $\ldots$, $z_m = sign \; a_m y_m$, одержимо

$$|| \sum_{n=1}^{m} a_n y_n||_{2p} = || \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; z_n||_{2p} \leq \beta_{2p} \, p \, (\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \;)^{\frac{1}{2}}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces I. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977. – 188 p.

2. *Khintchine A.* Uber dyadishe Bruche // Math.Z. – 1923. – **18.** – P.109-116.

3. *Dor L.E., Starbird T.* Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables // Composito Math. – 1979. – **39**, N.2. – P.141-175.

4. *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. – Київ: Вища школа, 1975.

5. *Burkholder D.L.* Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms // Ann. Probab. – 1984. – **1**, N.1. – P.647-702.

6. *Мацак И.К., Пличко А.Н.* Неравенство Хинчина для k-кратных произведений независимых случайных величин // Математические заметки. – 1988. – **44**, №3. – С.378-384.