УДК 517.956

©2007 р. В.І. Мироник, Р.С. Колісник

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ОДНОГО КЛАСУ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується властивість локалізації розв'язків еволюційних рівнянь з операторами дробового диференціювання нескінченного порядку.

The localization property of the solutions of evolutionary equations with operators of fractional differentiation of infinite order is investigated.

Для рядів Фур'є сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій добре відомий принцип локалізації Рімана [1]: збіжність або розбіжність ряду Фур'є в точці залежить лише від поведінки функції в околі цієї точки (хоча самий ряд Фур'є визначається за даною функцією глобально). Іншими словами, якщо $\{f_1, f_2\} \subset L_1([0, 2\pi])$ збігаються на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, то на кожному відрізку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a, b)$ різниця їхніх рядів Фур'є рівномірно збігається до нуля. Для узагальнених функцій цей принцип, взагалі кажучи, не виконується. Наприклад, δ-функція Дірака збігається з нулем на довільному проміжку, який не містить точку 0, але її ряд Фур'є $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt}$ не збігається рівномірно до нуля на довільному такому проміжку. Якщо перейти до функцій багатьох змінних, то принцип локалізації вже не має місця і для сумовних функцій. Для його виконання потрібно накласти на функцію додаткові умови гладкості [2]. Однак, у багатьох задачах математичної фізики, де користуються зображенням функції у вигляді рядів Фур'є, природнішим є виконання цього принципу не для самих рядів Фур'є, а для рядів Фур'є, просумованих деяким методом. Так, наприклад, принцип локалізації для ряду Фур'є функції f, просумованого методом Абеля-Пуассона, еквівалентний принципу локалізації для розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в одиничному крузі з граничною функцією f, заданою на колі: якщо f на деякій відкритій ділянці кола збігається з неперервною функцією, то при наближенні до межі круга розв'язок задачі Діріхле збігається до f рівномірно на кожному компакті цієї ділянки. У праці [3] доведено, що для перетворення Абеля-Пуассона ряду Фур'є принцип локалізації справджується в досить широкому класі узагальнених функцій. Аналог принципу локалізації Рімана для формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра, просумованих методом типу Гаусса-Вейєрштрасса, встановлено в [4,5].

Природно поставити таку задачу: нехай в області Q з межею ∂Q розглядається рівняння $Lu = 0$ та крайова задача $Bu|_{\partial Q} = f$, де L і B – диференціальні оператори, що діють в області Q та на межі ∂Q відповідно, а f – узагальнена функція, задана на ∂Q. Якщо відомо, що f на деякій ділянці межі збігається з гладкою функцією, то чи буде розв'язок вказаної задачі збігатись до f рівномірно при наближенні до цієї ділянки межі? Тут це питання вивчається для задачі Коші у випадку,коли L – псевдодиференціальний оператор в класі початкових даних, які є узагальненими функціями типу ультрарозподілів.

1.Простори основних та узагальнених періодичних функцій. Через T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x)=\sum_{k=-s}^{s} c_{k,p}e^{ikx},\ x\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{Z}_+,\ i=\sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел. Зрозуміло, що відносно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай T_m, $m\in\mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T=\bigcup\limits_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається так: послідовність $\{P_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset T$ збігається в T до полінома P (записується: $P_n \xrightarrow{T} P,\ n\to\infty$), якщо, починаючи з деякого номера, всі P_n належать до одного й того ж простору T_m (з деяким m) і $c_{k,p_n}\to c_{k,p},\ n\to\infty$, для кожного $k:\ 0\le |k|\le m$. Так визначена збіжність – це збіжність в T як індуктивної границі просторів $T_m:\ T=\lim\limits_{m\to\infty}\mathrm{ind T_m}$.

У T природним чином вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки

$$(P*Q)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(t)Q(x-t)dt,\ \{P,Q\}\subset T,$$

які є неперервними в T.

Символом T' позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи T' назвемо 2π-періодичними узагальненими функціями. Операція диференціювання в T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)},P\rangle=(-1)^k\langle f,P^{(k)}\rangle,\ P\in T,\ k\in\mathbb{N}$$

(символом $\langle f,\cdot\rangle$ позначається дія функціоналу f на основний елемент). Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така ж операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним. В T' визначена також операція згортки:

$$\langle f*g,P\rangle=\langle f(x),\langle g(y),P(x+y)\rangle\rangle,$$

$$\{f,g\}\subset T',\ \forall P\in T.$$

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f\in T'$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}$, де $c_k(f)=\langle f,e^{-ikx}\rangle,\ k\in\mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f\in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [1]. Звідси випливає також, що T лежить щільно в T'. Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f\in T'$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T' можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$).

Розглянемо послідовність $\{m_k,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$, $m_0=1$, додатних чисел, яка володіє властивостями:

1)$\forall\alpha>0\ \ \exists c_\alpha>0\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+:\ m_k\le c_\alpha\cdot\alpha^k$ (тобто $\{m_k,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ зростає швидше за експоненту);

2)$\exists M>0\ \exists h>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+:\ m_{k+1}\le Mh^km_k$ (стабільність відносно диференціювання);

3)$\exists A>0\ \exists L>0\ \forall\{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+:\ m_k\cdot m_l\le AL^{k+l}m_{k+l}$ (стабільність відносно операції множення);

4)$\exists\ B>0\ \exists s>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+:\ m_k\le Bs^k\min\limits_{0\le l\le k}m_{k-l}m_l$ (стабільність відносно згортки).

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду: $m_k=(k!)^\beta,\ m_k=k^{k\beta},\ \beta>0$.

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі $c,B>0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)|\le cB^km_k,\ k\in\mathbb{Z}_+,\ x\in\mathbb{R}.$$

Елементи простору $H\langle m_k\rangle$ називаються ультрадиференційовними функціями класу $\{m_k\}$. Внаслідок властивостей 2)-4) послідовності $\{m_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. Якщо послідовність $\{m_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку $\beta > 0$ [6].

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. У праці [6] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів. Покладемо

$$\rho(\lambda) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{|\lambda|^k}{m_k},\ |\lambda| \geq 1.$$

Нехай

$$H_{\{\alpha\}} := \left\{ f \in T' |\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) < \infty,\right.$$

$$\left. c_k(f) = \langle f,\ e^{-ikx}\rangle \right\},\ \alpha > 0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f,g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right),$$

$$\{f,g\} \subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}} \supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ. Покладемо $H\{m_k\} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$. Природно в $H\{m_k\}$ ввести топологію індуктивної границі: $H\{m_k\} = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathrm{ind} \mathrm{H}_{\{\alpha\}}$. У праці [6] доведено, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не тільки як множини, але і топологічно. Звідси випливає, що простори $H\langle m_k\rangle$ і $H'\langle m_k\rangle$ можна охарактеризувати так [6]:

$$(f \in H\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)| \leq c\rho^{-1}(\mu|k|));$$

$$(f \in H'\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}:\ |c_k(f)| \leq c\rho(\mu|k|)).$$

Якщо $m_k = k^{k\beta},\ \beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(|\lambda|^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f \in T'$ правильними є співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)| \leq c\exp(-\mu|k|^{1/\beta}));$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)| \leq c\exp(-\mu|k|^{1/\beta})).$$

2. Псевдодиференціальні оператори Нехай $G : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ – деяка неперервна парна функція. За функцією G у просторі T' побудуємо оператор

$$\hat{A} : T' \ni f \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)c_k(f)e^{ikx} \in T',$$

$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'.

Розглянемо нескінченно диференційовну на $[0,\infty)$ функцію $\varphi(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ таку, що $\varphi(x) \geq d_0 x,\ d_0 > 0,\ x \in [0,\infty)$ і побудуємо у просторі T' за оператором $\hat{A}$ оператор $\varphi(\hat{A})$:

$$\varphi(\hat{A})f = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \hat{A}^j f,\ \forall f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \in T'.$$

Оскільки

$$\hat{A}^j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G^j(k)c_k(f)e^{ikx},$$

то

$$\varphi(\hat{A})f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\varphi(G(k))e^{ikx} =$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)c_k(f)e^{ikx},\ \lambda_k = G(k).$$

Нехай A_φ – звуження оператора $\varphi(\hat{A})$ на $L_2([0,2\pi])$. Як доведено в [7], A_φ – невід'ємний самоспряжений оператор в $L_2([0,2\pi])$

зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(A_\varphi)$, причому $T \subset \mathcal{D}(A_\varphi)$. Якщо $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle$, то оператор A_φ неперервний у просторі $H\langle m_k\rangle$ [7]. Оператор A_φ надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2([0,2\pi])$.

Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u'(t) + A_\varphi u(t) = 0, \ t \in (0,T], \qquad (1)$$

де A_φ – оператор, побудований за функцією φ, який діє у просторі $H\langle m_k\rangle$. Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T], \ H\langle m_k\rangle)$, яка задовольняє рівняння (1).

Задача Коші для рівняння (1) полягає у відшуканні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову $u(0,\cdot) = \lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot) = f$, де границя береться у просторі T'.

У праці [7] доведено, що задача Коші для рівняння (1) коректно розв'язана у просторі початкових даних $H'\langle m_k\rangle$. Її розв'язок зображається формулою

$$u(t,x) = (f * \Gamma)(t,x), \ t \in (0,T], \ x \in \mathbb{R},$$

де

$$\Gamma(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\varphi(\lambda_k)+ikx}, \ \ \lambda_k = G(k),$$

$$t \in (0,T], \ x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx},$$

$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, \ x \in \mathbb{R},$$

при цьому $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$.

3. Властивість локалізації. Тут встановлюється властивість локалізації розв'язку задачі Коші для рівняння (1) у припущенні, що $G(\xi) = |\xi|^\gamma, \ \xi \in \mathbb{R}, \ \gamma \in (1,+\infty) \setminus \{2,3,4,...\}$, а нескінченно диференційовна функція φ та її похідні задовольняють умову

$$\exists b > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|\varphi^{(m)}(\xi)| \le c_\varepsilon b^m m^m e^{\varepsilon\xi}, \ \xi \in [0,\infty).$$

Вважаємо також, що якщо $\varepsilon \in (0,M], \ M < +\infty$, то знайдеться стала $c_0 = c_0(M) > 0$ така, що $c_\varepsilon \le c_0, \ \forall \varepsilon \in (0,M]$.

Зазначимо, що функція $G(\xi) = |\xi|^\gamma$ нескінченно диференційовна при $\xi \ne 0$, для її похідних правильними є нерівності:

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists c_m > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$|G^{(m)}(\xi)| \le c_m|\xi|^{\gamma-m},$$

причому

$$\exists \tilde{c} > 0 \ \exists \tilde{A} > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} : c_m \le \tilde{c}\tilde{A}^m m^m.$$

У цьому випадку A_φ трактується як оператор дробового диференціювання нескінченного порядку у просторі $H\langle m_k\rangle$.

Лема 1. *Для похідних функції* $\exp\{-t\varphi(|\xi|^\gamma)\}$, $\xi \ne 0$, *правильними є оцінки*

$$|\mathcal{D}^s_\xi \exp\{-t\varphi(|\xi|^\gamma)\}| \le \beta t^s \exp\{-d_0 t|\xi|^\gamma\}\cdot|\xi|^{\omega-s},$$

$s \in \mathbb{N}, \ \xi \ne 0$, *де* $t \in (0,T]$ *– фіксований параметр,* $\beta = \beta(s) > 0$, $d_0 > 0$ *– стала, незалежна від* t *та* s,

$$\omega = \begin{cases} s\gamma, & \text{якщо } |\xi| \ge 1, \\ \gamma, & \text{якщо } |\xi| < 1. \end{cases}$$

Доведення. Для доведення твердження скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$\mathcal{D}^s_\xi F(g(\xi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dg^m}F(g)\times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+m_2+...+m_l=m,\\ m_1+2m_2+...+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1!...m_l!}\left(\frac{1}{1!}\frac{d}{d\xi}g(\xi)\right)^{m_1}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\xi^2}g(\xi)\right)^{m_2}...\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}g(\xi)\right)^{m_l},$$

де покладемо $F = e^g$, $g = -t\varphi(G)$, $G(\xi) = |\xi|^\gamma$, $\xi \ne 0$, (знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $s = m_1+2m_2+...+lm_l$, $m = m_1+...+m_l$). Тоді

$$\mathcal{D}^s_\xi e^{-t\varphi(G(\xi))} = e^{-t\varphi(G(\xi))}\sum_{m=1}^{s}$$

$$\sum_{\substack{m_1+m_2+...+m_l=m,\\ m_1+2m_2+...+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1!...m_l!}\cdot(-t)^{m_1+2m_2+...+lm_l}\cdot\Lambda,$$

$\xi \neq 0$, символом Λ тут позначено вираз

$$\Lambda := \left(\frac{d}{d\xi}\varphi(G(\xi))\right)^{m_1} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\xi^2}\varphi(G(\xi))\right)^{m_2} ... \left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}\varphi(G(\xi))\right)^{m_l}.$$

Для знаходження похідних функції $\varphi(G)$, $\xi \neq 0$, ще раз застосуємо формулу Фаа де Бруно, скориставшись при цьому оцінками похідних функції φ, поклавши $\varepsilon = t/2$.

Отже, при $\xi \neq 0$:

$$|\mathcal{D}_\xi^s \varphi(G(\xi))| = \left| \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dG^m}\ \varphi(G)\right.$$

$$\sum_{\substack{m_1+m_2+...+m_l=m,\\ m_1+2m_2+...+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1!...m_l!}\left(\frac{d}{d\xi}G(\xi)\right)^{m_1} \times$$

$$\left.\times \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\xi^2}G(\xi)\right)^{m_2} ... \left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}G(\xi)\right)^{m_l}\right| \leq$$

$$\leq c_0 e^{\frac{t\varphi(G(\xi))}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{s} b^m m^m \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1+m_2+...+m_l=m,\\ m_1+2m_2+...+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1!...m_l!}\ c_1^{m_1}\times$$

$$\times \left(\frac{c_2}{2!}\right)^{m_2} ... \left(\frac{c_l}{l!}\right)^{m_l} \times$$

$$\times(|\xi|^{\gamma-1})^{m_1}(|\xi|^{\gamma-2})^{m_2}...(|\xi|^{\gamma-l})^{m_l},$$

$c_0 = c_0(T/2) > 0.$
Зазначимо, що

$$\frac{c_j}{j!} \leq \frac{\tilde{c}\tilde{A}^j j^j}{j^j e^{-j}\sqrt{2\pi j}} \leq \tilde{c}(\tilde{A}e)^j,\ 1 \leq j \leq l.$$

Тоді

$$c_1^{m_1}\left(\frac{c_2}{2!}\right)^{m_2} ... \left(\frac{c_l}{l!}\right)^{m_l} \leq$$

$$\leq e^{-m_1}\tilde{c}^{m_1+...+m_l}(\tilde{A}e)^{m_1+...+m_l} \leq (\tilde{c}\tilde{A}e)^m,$$

$$(|\xi|^{\gamma-1})^{m_1}(|\xi|^{\gamma-2})^{m_2}...(|\xi|^{\gamma-l})^{m_l} =$$

$$= |\xi|^{(m_1+...+m_l)\gamma-(m_1+2m_2+...+lm_l)} = |\xi|^{m\gamma-s}.$$

Отже, при $\xi \neq 0$:

$$|\mathcal{D}_\xi^s \varphi(G(\xi))| \leq s!\beta_s \cdot \sum_{m=1}^{s} |\xi|^{m\gamma-s}, \qquad (2)$$

де $\beta_s = c_0\tilde{b}^s s^s \tilde{B}^s$, $\tilde{b} = \max\{1, b\}$, $\tilde{B} = \max\{1, \tilde{c}\tilde{A}e\}$. Врахувавши нерівності (2) знайдемо, що

$$\Lambda \leq \beta_1^{m_1}...\beta_l^{m_l}\left(|\xi|^{\gamma-1}\right)^{m_1} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=1}^{2}|\xi|^{\gamma m-2}\right)^{m_2} ... \left(\sum_{m=1}^{l}|\xi|^{\gamma m-l}\right)^{m_l} \leq$$

$$\leq \beta_s^s |\xi|^{(\gamma-1)m_1}\left(|\xi|^{\gamma-2} + |\xi|^{2\gamma-2}\right)^{m_2} \cdot$$

$$\cdot \left(|\xi|^{\gamma-3} + |\xi|^{2\gamma-3} + |\xi|^{3\gamma-3}\right)^{m_3} ...$$

$$\cdot \left(|\xi|^{\gamma-l} + |\xi|^{2\gamma-l} + ... + |\xi|^{l\gamma-l}\right)^{m_l} = \beta_s^s \times$$

$$\times \frac{|\xi|^{\gamma m_1}\left(|\xi|^{\gamma} + |\xi|^{2\gamma}\right)^{m_2} ... \left(|\xi|^{\gamma} + |\xi|^{2\gamma} + ... + |\xi|^{l\gamma}\right)^{m_l}}{|\xi|^{m_1+2m_2+...+lm_l}}$$

Далі здійснимо оцінку Λ за умови $|\xi| < 1$ та $|\xi| \geq 1$.

а) Нехай $|\xi| < 1,\ \xi \neq 0$. Тоді

$$\Lambda \leq \beta_s^s 2^{m_2} \cdot 3^{m_3} \cdot ... \cdot l^{m_l} \cdot |\xi|^{-s} \cdot$$

$$\cdot |\xi|^{m_1\gamma} \cdot |\xi|^{m_2\gamma} \cdot ... \cdot |\xi|^{m_l\gamma} \leq$$

$$\leq \beta_s^s l^{m_1+...+m_l} \cdot |\xi|^{\gamma(m_1+...+m_l)-s} \leq \tilde{\beta}_1 |\xi|^{\gamma m-s},$$

$$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1(s) > 0.$$

б) Якщо $|\xi| \geq 1$, то

$$\Lambda \leq \beta_s^s \cdot |\xi|^{\gamma m_1} \cdot |\xi|^{2\gamma m_2} \cdot ... \cdot |\xi|^{l\gamma m_l} \cdot |\xi|^{-s} \cdot$$

$$\cdot 2^{m_2} \cdot 3^{m_3} \cdot ... \cdot l^{m_l} \leq$$

$$\leq \tilde{b}_2 |\xi|^{s(\gamma-1)},\ \ \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_2(s) > 0. \qquad (3)$$

На підставі одержаних оцінок та умов, які задовольняють функції φ та G твердимо, що якщо $\xi \neq 0$ і $|\xi| < 1$, то

$$\left|\mathcal{D}_\xi^s e^{-t\varphi(G(\xi))}\right| \leq \beta^*(s) t^s e^{-t\varphi(G(\xi))/2} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{s} |\xi|^{\gamma m-s} \leq \beta^*(s) t^s e^{-d_0 t|\xi|^\gamma/2} s \cdot |\xi|^{\gamma-s} \leq$$

$$\beta_1^*(s) t^s e^{-\tilde{d}_0 t|\xi|^\gamma} \cdot |\xi|^{\gamma-s},\ \ \beta_1^*(s) = s\beta^*(s).$$

Якщо $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (3)

$$\left|\mathcal{D}_\xi^s e^{-t\varphi(G(\xi))}\right| \leq \beta_2^*(s) t^s e^{-\tilde{d}_0 t|\xi|^\gamma} \cdot |\xi|^{s(\gamma-1)},$$

$\beta_2^*(s) > 0$. Об'єднуючи ці нерівності в одну, прийдемо до оцінок:

$$\left|\mathcal{D}_\xi^s e^{-t\varphi(G(\xi))}\right| \leq \beta(s) t^s e^{-\tilde{d}_0 t|\xi|^\gamma} |\xi|^{\omega-s}, \ \ \xi \neq 0,$$

$s \in \mathbb{Z}_+$, де

$$\omega = \begin{cases} s\gamma, & |\xi| \geq 1, \\ \gamma, & |\xi| < 1, \ \xi \neq 0. \end{cases}$$

Лема доведена.

Введемо позначення

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{x\in\mathbb{R}} e^{-t\varphi(G(\xi)) - ix\xi} d\xi \equiv$$

$$\equiv F^{-1}\left[e^{-t\varphi(G(\xi))}\right], \ G(\xi) = |\xi|^\gamma.$$

Лема 2. *Для функції G правильною є оцінка*

$$|G(t,x)| \leq c t^{[\gamma]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |x|)^{-(1+[\gamma])},$$

$x \in \mathbb{R}, \ t \in (0,1]$.

Доведення. Якщо $x \neq 0$, то інтегруючи частинами $s = 1 + [\gamma]$ разів, подамо $G(t,x)$ у вигляді:

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|\xi|\geq\varepsilon} e^{-t\varphi(G(\xi))} e^{-ix\xi} d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-1} \frac{\tilde{c}}{x^s} \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\int\limits_{|\xi|\geq\varepsilon} \mathcal{D}_\xi^s e^{-t\varphi(G(\xi))} e^{-ix\xi} d\xi + \right.$$

$$\left. + \Phi(\varepsilon, x) \right] \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{I}(x,\varepsilon).$$

Символом $\Phi(\varepsilon, x)$ позначається позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $\mathcal{D}_\xi^l e^{-t\varphi(G(\xi))} e^{-ix\xi}$, $0 \leq l \leq s-1$, із значеннями в точках $\xi = \varepsilon$, $\xi = -\varepsilon$. Із оцінок, які задовольняє функція $\exp\{-t\varphi(G(\xi))\}$ та її похідні випливає, що для $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$ справджується нерівність $\left|\mathcal{D}_\xi^{[\gamma]} \exp\{-t\varphi(G(\xi))\}\right| \leq c|\xi|^{\gamma-[\gamma]}$, $[\gamma] = s-1$, $c = const$. Звідси дістаємо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Phi(\varepsilon, x) = 0$ (у кожній точці $x \in \mathbb{R}$). На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль за рахунок спадання на нескінченності функції $\exp\{-t\varphi(G(\xi))\}$ та її похідних (див. лему 1).

Врахувавши оцінки похідних функції $\exp\{-t\varphi(G(\xi))\}$, одержані в лемі 1 знайдемо, що

$$|\mathcal{I}(x,\varepsilon)| \leq \frac{\tilde{\beta}}{|x|^s} t^s \cdot \int\limits_{|\xi|\geq\varepsilon} e^{-td_0|\xi|^\gamma} \cdot |\xi|^{\omega-s} d\xi \leq$$

$$\leq \frac{2\beta}{|x|^s} t^s \cdot \int\limits_0^\infty e^{-td_0\xi^\gamma} \cdot \xi^{\omega-s} d\xi, \ s = 1 + [\gamma], \ x \neq 0.$$

Інтеграл у останній нерівності має інтегровну особливість у точці $\xi = 0$. Справді, оскільки $\omega = \gamma$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$ (див. лему 1), то при вказаному виборі s маємо, що $s - \omega = 1 + [\gamma] - \gamma$, тобто $0 < s - \omega < 1$.

Введемо позначення:

$$\mathcal{I}(t) := t^s \cdot \int\limits_0^\infty e^{-td_0\xi^\gamma} \cdot \xi^{\omega-s} d\xi, \ s = 1 + [\gamma],$$

і подамо $\mathcal{I}(t)$ у вигляді суми двох інтегралів:

$$\mathcal{I}(t) = t^s \cdot \int\limits_0^1 e^{-td_0\xi^\gamma} \cdot \xi^{\omega-s} d\xi +$$

$$+ t^s \cdot \int\limits_1^\infty e^{-td_0\xi^\gamma} \cdot \xi^{\omega-s} d\xi \equiv$$

$$\equiv \mathcal{I}_1(t) + \mathcal{I}_2(t), \ s = 1 + [\gamma].$$

Інтеграл $\mathcal{I}_1$ є збіжним; для $t \in (0,1]$ маємо оцінку:

$$\mathcal{I}_1(t) \leq t^{1+[\gamma]} \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi^{1+[\gamma]-\gamma}} \leq c_0 t^{1+[\gamma]} \leq c_0 t^{(1+[\gamma])/\gamma}.$$

Оцінимо $\mathcal{I}_2(t)$, виділивши при цьому залежність від параметра t, врахувавши, що $|\xi| \geq 1$, $\omega = s\gamma$, $s = 1 + [\gamma]$. Отже,

$$\mathcal{I}_2(t) \leq t^{1+[\gamma]} \int\limits_0^\infty e^{-d_0 t\xi^\gamma} \cdot \xi^{\omega-1-[\gamma]} d\xi \overset{(td_0)^{1/\gamma}\xi = y}{=}$$

$$= \alpha_0 t^{1+[\gamma]-(\omega-[\gamma])/\gamma} \int\limits_0^\infty e^{-y} \cdot y^{\omega-1-[\gamma]} dy = \tilde{\alpha}_0 t^{(1+[\gamma])/\gamma}.$$

Тоді для $\mathcal{I}(x,\varepsilon)$ правильною є нерівність:

$$|\mathcal{I}(x,\varepsilon)| \le \frac{\beta_1}{(t^{-1/\gamma}|x|)^{1+[\gamma]}}, \ \varepsilon > 0, \qquad (4)$$

$x \ne 0, \ t \in (0,1]$. Здійснивши в (4) граничний перехід при $\varepsilon \to +0$ знаходимо, що для $x \ne 0$

$$|G(t,x)| \le \frac{\beta_1}{(t^{-1/\gamma}|x|)^{1+[\gamma]}}.$$

Крім того, із умов, які задовольняють функції φ та G випливає, що

$$|G(t,x)| \le (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| e^{-t\varphi(G(\xi))} \right| d\xi \le$$

$$\le (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-td_0|\xi|^\gamma} d\xi \le \alpha_1 t^{-1/\gamma}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Звідси вже випливає, що

$$|G(t,x)| \le \frac{\beta_2 t^{-1/\gamma}}{(1+t^{-1/\gamma}|x|)^{1+[\gamma]}} =$$

$$= \frac{\beta_2 t^{[\gamma]/\gamma}}{(t^{1/\gamma}+|x|)^{1+[\gamma]}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Лема доведена.

Властивість локалізації розв'язку задачі Коші для рівняння (1) полягає в тому, що якщо початкова умова – узагальнена функція f – на деякому інтервалі $(a,b) \subset [0,2\pi]$ збігається з неперервною функцією g, то $u(t,\cdot) \to g$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному відрізку $[a_1,b_1] \subset (a,b)$. Передусім доведемо, що вказаною властивістю володіє розв'язок задачі Коші для рівняння (1) у випадку, коли f – гіперфункція (тобто $f \in H'\langle k^k \rangle \equiv G'_{\{1\}}$).

Теорема 1. *Якщо 2π-періодична гіперфункція f рівна нулю на інтервалі $(a,b) \subset [0,2\pi]$, то розв'язок задачі Коші $u(t,x)$ для рівняння (1) з початковою умовою f збігається до нуля при $t \to +0$ рівномірно на довільному відрізку $[a_1,b_1] \subset (a,b)$.*

Доведення. Оскільки функціонал f – лінійний, то правильним є співвідношення

$$u(t,x) = (f * \Gamma)(t,x) =$$

$$= t^{[\gamma]/\gamma} \langle f_\xi, \ t^{-[\gamma]/\gamma} \Gamma(t, x-\xi) \rangle.$$

Для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій $\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-[\gamma]/\gamma}\Gamma(t,x-\xi)$ задовольняє нерівності

$$\left| \mathcal{D}_\xi^m \Psi_{t,x}(\xi) \right| \le c B^m m^m, \ m \in \mathbb{Z}_+,$$

з деякими сталими $c, B > 0$, не залежними від t, x, ξ, для $t \in (0, T^*]$, $T^* = \min\{1, T\}$, $x \in [a_1,b_1]$, $\xi \in [0,2\pi] \setminus (a,b)$.

Нехай $G(t,x)$ – обернене перетворення Фур'є функції $\exp\{-t\varphi(|\xi|^\gamma)\}$. Тоді, за формулою сумування Пуассона рядів Фур'є (див. [8, с.281]), маємо наступне співвідношення:

$$\Gamma(t, x-\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(t, x-\xi+2\pi k). \qquad (5)$$

Цей ряд при $t > 0$ і $x \in [a_1,b_1]$ є аналітичною функцією по змінній $\xi \in [0,2\pi] \setminus (a,b)$, оскільки $\Gamma(t,\cdot) \in G_{\{1/\gamma\}} = H\langle k^{k/\gamma} \rangle$ при кожному $t > 0$, якщо $G(\xi) = |\xi|^\gamma$ (див. [7]). За умовою $1/\gamma < 1$, тому елементами такого простору є функції, аналітичні на $[0,2\pi]$ (тобто функції, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину $\mathbb{C}$).

Візьмемо обмежену область Q в $\mathbb{C}$, яка містить множину $[0,2\pi] \setminus (a,b)$ з гладкою межею ∂Q, що не перетинає відрізок $[a_1,b_1] \subset (a,b)$. Тоді, внаслідок інтегральної формули Коші

$$\mathcal{D}_\xi^m \Gamma(t,x-\xi) = \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{\partial Q} \frac{\Gamma(t,x-z)}{(z-\xi)^{m+1}} dz,$$

$$\xi \in [0,2\pi] \setminus (a,b).$$

Звідси дістаємо, що

$$\left| \mathcal{D}_\xi^m \Gamma(t,x-\xi) \right| \le \frac{m!}{2\pi} \frac{l}{A^{m+1}} \cdot \max_{z \in \partial Q} |\Gamma(t,x-z)|,$$

де l – довжина контура ∂Q, $A = \inf |z - \xi|, \ z \in \partial Q, \ \xi \in [0,2\pi] \setminus (a,b)$. Для того, щоб здійснити оцінку $\max_{z\in\partial Q}|\Gamma(t,x-z)|$, скористаємось формулою (5).

Із результатів, одержаних в лемі 2, випливає оцінка

$$|G(t,x)| \le \beta t^{[\gamma]/\gamma}|x|^{-(1+[\gamma])}, \qquad (6)$$

$$t\in(0,T^*],\ |x|\ge a>0.$$

Оскільки $x \in [a_1,b_1]$, $\xi \in [0,2\pi]\setminus(a,b)$, то маємо $|x-\xi|\ge a_0>0$, де $a_0 = \min\{|a-a_1,b-b_1|\}$. Тоді, згідно з оцінкою (6),

$$t^{-[\gamma]/\gamma}|\Gamma(t,x-\xi)| \le \beta\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x-\xi+2k\pi|^{(-1+[\gamma])} \le$$

$$\le \beta\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}(a_0^2+b_0|k|^2)^{-(1+[\gamma])/2} = M<\infty,$$

де $b_0>0$, стала M не залежить від t,x,ξ. Взявши до уваги неперервність $\Gamma(t,x-z)$ за сукупністю змінних $t\in(0,T^*]$, $x\in[a_1,b_1]$, $z\in\overline{Q}$, підберемо область інтегрування так, щоб

$$t^{-[\gamma]/\gamma}|\Gamma(t,x-z)| \le cB^m m^m,$$

де сталі $c,B>0$ не залежать від змінних t,x,ξ.

Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай $H\langle m_k\rangle$ – неквазіаналітичний клас функцій, $f\in H'\langle m_k\rangle$ і f на інтервалі $(a,b)\subset[0,2\pi]$ збігається з неперервною 2π-періодичною функцією g. Тоді розв'язок задачі Коші $u(t,x)$ для рівняння (1) з початковою умовою f збігається до $g(x)$ при $t\to+0$ рівномірно на довільному відрізку $[a_1,b_1]\subset(a,b)$.*

Доведення. Нехай $[a_1,b_1]\subset[a_2,b_2]\subset(a,b)$. Побудуємо функцію $\varphi\in H\langle m_k\rangle$ з носієм в (a,b) таку, що $\varphi=1$ для $x\in[a_2,b_2]$ (така функція існує, бо неквазіаналітичний клас $H\langle m_k\rangle$ містить фінітні функції). Оскільки $f-g=0$ на (a,b), то $\varphi(f-g)=0$ на (a,b), $(1-\varphi)f=0$ на $[a_2,b_2]$ і за доведеним у теоремі 1

$$\langle\varphi(f-g),\Gamma(t,x-\xi)\rangle\to0,\ t\to+0,$$

$$\langle(1-\varphi)f,\Gamma(t,x-\xi)\rangle\to0,\ t\to+0,$$

рівномірно по x на $[a_1,b_1]$. Але

$$u(t,x)=\langle\varphi(f-g),\Gamma(t,x-\xi)\rangle+$$

$$+\langle(1-\varphi)f,\Gamma(t,x-\xi)\rangle+\langle\varphi g,\Gamma(t,x-\xi)\rangle$$

і

$$\langle\varphi g,\Gamma(t,x-\xi)\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(\varphi g)^{-t\varphi(G(k))+ikx}\to$$

$$\to\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(\varphi g)e^{ikx}=(\varphi g)(x),\ G(k)=|k|^\gamma,$$

рівномірно по $x\in[a_1,b_1]$. Тому, оскільки $\varphi g=g$ на $[a_1,b_1]$ дістаємо, що $u(t,x)\to g(x)$ при $t\to+0$ рівномірно по $x\in[a_1,b_1]$.

Твердження доведено.

Зауваження. Аналогічні результати є правильними і у випадку декількох незалежних змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Риман Б.* Сочинения. – М.: Гостехиздат, 1948. – 542с.

2. *Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // Успехи мат. наук. – 1976. – Т.31, N6. – С.28-83.

3. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – Т.257, N4. – С.799-803.

4. *Gorodetsky V.V., Yarmolyk I.I.* About the summation of the formal Fourier-Hermite series by the Abel-Poisson method // Доп. НАН України. 1994. – N6. – С.20-26.

5. *Городецький В.В., Дрінь І.І.* Формальні ряди Фур'є-Лагерра та узагальнені функції нескінченного порядку // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995, – Випуск 9. – С.174-180.

6. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений // Укр. мат. журнал. – 1982. – Т.34, N2. – С.144-150.

7. *Мироник В.І.* Періодична задача Коші для одного класу еволюційних рівнянь // Науковий вісник Чернівецького університету: Вип. 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С.134-142.

8. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 322с.