УДК 517.91:532.2

©2007 р. В.В.Мороз

Хмельницький національний університет

СКІНЧЕННІ ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ-...-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

В роботі запроваджено скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені на сегменті $[R_), R]$ з $2n$ точками спряження гібридним диференціальним оператором Бесселя-Фур'є-Бесселя - ...-Фур'є-Бесселя в припущенні, що спектральний параметр також бере участь в крайових умовах та умовах спряження.

In this work the finite hybrid integral transformations generated on a segment are included $[R_0, R]$ with $2n$ point of hybrid differential operator Bessel-Fourier-Bessel-...-Fourier-Bessel in supposition, that spectral takes parameters the participation in regional terms and in the conditions of interface.

Скінченні інтегральні перетворення, породжені на сегменті $(0, l)$ з n точками спряження диференціальним оператором Фур'є d^2/dr^2, наведено в роботі [1]. Скінченні інтегральні перетворення, породжені на сегментах $(0, R)$ та (R_0, R) з n точками спряження диференціальним оператором Бесселя

$$B_{\nu_j,\alpha_j} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu_j^2 - \alpha_j^2}{r^2},$$

$$\nu_j \geq \alpha_j \geq -\frac{1}{2}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

наведено в роботі [2]. Скінченні інтегральні перетворення, породжені на сегменті $[R_0, R]$ з $2n$ точками спряження чергуванням операторів B_{ν_j,α_j} та d^2/dr^2, починаючи з диференціального оператора Бесселя B_{ν_1,α_1} й завершуючи диференціальним оператором Бесселя $B_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}$ анонсовано в роботі [3]. Такі інтегральні перетворення успішно були застосовані для знаходження інтегрального зображення розв'язку відповідних задач статики, квазістатики та динаміки при умові, що крайові межі й межі спряження є жорсткими по відношенню до відбиття хвиль. В протилежному випадку в крайових операторах й операторах спряження з'являються оператор $\partial/\partial t$ в задачах квазістатики та оператор $\partial^2/\partial t^2$ в задачах динаміки. Для розв'язання таких задач, як правило, застосовувався метод інтегрального перетворення Лапласа. Це приводило до крайової задачі на кусково-однорідному сегменті для сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку з відповідними крайовими умовами та умовами спряження, залежними від комплексного параметру перетворення Лапласа. Маємо дві нелегкі задачі: розв'язання крайової задачі в зображеннях за Лапласом й знаходження оригіналу одержаного розв'язку. Виявляється, що можна отримати скінченні інтегральні перетворення із спектральним параметром, які спрацьовують для задач з м'якими межами за такою ж логічною схемою, як інтегральні перетворення без спектрального параметра в задачах з жорсткими межами. Побудові одного класу таких гібридних скінченних інтегральних перетворень присвячується дана робота.

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$I_{2n} = \{r : r \in \bigcup_{k=1}^{2n+1} (R_{k-1}, R_k); R_0 > 0,$$

$$R_{2n+1} \equiv R < \infty\}$$

ненульового розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя та Фур'є

$$(B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} + q_{2k+1}^2)u_{2k+1}(r) = 0,$$

$$r \in (R_{2k}, R_{2k+1}), k = \overline{0,n}$$

$$(d^2/dr^2 + q_{2k}^2)u_{2k}(r) = 0, r \in (R_{2k-1}, R_{2k}),$$

$$k = \overline{1,n} \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$(\tilde{\alpha}_{11}^0 d/dr + \tilde{\beta}_{11}^0)u_1\Big|_{r=R_0} = 0,$$

$$(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} d/dr + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1})u_{2n+1}\Big|_{r=R_{2n+1}} = 0 \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\Big[(\tilde{\alpha}_{j1}^k d/dr + \tilde{\beta}_{j1}^k)u_k - (\tilde{\alpha}_{j2}^k d/dr + \tilde{\beta}_{j2}^k)u_{k+1}\Big]\Big|_{r=R_k} =$$

$$= 0, \quad j = 1, 2; k = \overline{1, 2n}. \qquad (3)$$

У рівностях (1) – (3) $q_k^2 = a_k^{-1}(\lambda^2 + \gamma_k^2)$, $a_k > 0$, $\gamma_k \geq 0$, $\lambda \in (0, \infty)$, $\tilde{\alpha}_{mj}^k = \alpha_{mj}^k - \delta_{mj}^k(\lambda^2 + \gamma^2)$, $\tilde{\beta}_{mj}^k = \beta_{mj}^k - \gamma_{mj}^k(\lambda^2 + \gamma^2)$, $\gamma^2 \geq 0$, $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$. При цьому ми припускаємо, що $|\tilde{\alpha}_{11}^0| + |\tilde{\beta}_{11}^0| \neq 0$, $|\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1}| + |\tilde{\beta}_{22}^{2n+1}| \neq 0$, $C_{21,22}^{21,k} = C_{21,22}^{12,k}$, $C_{11,12}^{21,k} = C_{11,12}^{12,k}$, де $C_{ij;mn}^{i_1 j_1;k}$ – визначники 2-го порядку, перший стовпець яких є i_1 стовпець матриці $A_{ij,k}$, а другий стовпець є j_1 стовпець матриці $A_{mn,k}$:

$$A_{j1,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{1j}^k & \beta_{1j}^k \\ \alpha_{2j}^k & \beta_{2j}^k \end{bmatrix}, A_{j2,k} = \begin{bmatrix} \delta_{1j}^k & \gamma_{1j}^k \\ \delta_{2j}^k & \gamma_{2j}^k \end{bmatrix}.$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(d^2/dr^2 + q^2)v = 0$ утворюють функції $\cos qr$ та $\sin qr$ [4], а фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(B_{\nu,\alpha} + q^2)v = 0$ утворюють функції $J_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha} J_\nu(qr)$ та $N_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha} N_\nu(qr)$, $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$ – функції Бесселя відповідно першого та другого роду порядку ν [5].

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{a_{2k}^2} \prod_{s=2k}^{2n} \frac{c_{11,s}}{c_{21,s}} \prod_{s=k}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}}\right)^{2\alpha_{s+1}+1} \times$$

$$\times (R_{2n})^{2\alpha_{n+1}+1}; \quad k = \overline{1,n}, \sigma_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n+1}^2},$$

$$\sigma_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k+1}^2} \prod_{s=2k+1}^{2n} \frac{c_{11,s}}{c_{21,s}} R_{2k+1}^{-(2\alpha_{k+1}+1)} \times$$

$$\times \prod_{s=k+1}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}}\right)^{2\alpha_{s+1}+1} R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1}; \quad k = \overline{0, n-1},$$

$$v_{ij}^{k1}(q_s R_k) = -\tilde{\alpha}_{ij}^k q_s \sin q_s R_k + \tilde{\beta}_{ij}^k \cos q_s R_k,$$

$$v_{ij}^{k2}(q_s R_k) = \tilde{\alpha}_{ij}^k q_s \cos q_s R_k + \tilde{\beta}_{ij}^k \sin q_s R_k,$$

$$\varphi_{km}^j(q_s R_j, q_s x) = v_{km}^{j2}(q_s R_j) \cos q_s x -$$

$$- v_{km}^{j1}(q_s R_j) \sin q_s x;$$

$$u_{\nu,\alpha;ij}^{k1}(q_s R_k) = \left(\tilde{\alpha}_{ij}^k \frac{\nu - \alpha}{R_k} + \tilde{\beta}_{ij}^k\right) J_{\nu,\alpha}(q_s R_k) -$$

$$- \tilde{\alpha}_{ij}^k q_s^2 R_k J_{\nu+1,\alpha+1}(q_s R_k),$$

$$u_{\nu,\alpha;ij}^{k2}(q_s R_k) = \left(\tilde{\alpha}_{ij}^k \frac{\nu - \alpha}{R_k} + \tilde{\beta}_{ij}^k\right) N_{\nu,\alpha}(q_s R_k) -$$

$$- \tilde{\alpha}_{ij}^k q_s^2 R_k N_{\nu+1,\alpha+1}(q_s R_k),$$

$$\Psi_{\nu,\alpha;km}^j(q_s R_j, q_s x) = u_{\nu,\alpha;km}^{j1}(q_s R_j) N_{\nu,\alpha}(q_s x) -$$

$$- u_{\nu,\alpha;km}^{j2}(q_s R_j) J_{\nu,\alpha}(q_s x).$$

Обмежений на множині I_{2n} розв'язок крайової задачі (1) – (3) шукаємо за правилами [4]

$$u_{2k+1} = A_{2k+1} J_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(q_{2k+1} r) +$$

$$+ B_{2k+1} N_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(q_{2k+1} r), \quad k = \overline{0,n}, \qquad (4)$$

$$u_{2k} = A_{2k} \cos q_{2k} r + B_{2k} \sin q_{2k} r, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (5)$$

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_i та B_i ($i = \overline{1, 2n+1}$) дають алгебраїчну систему з $(4n+2)$-ох рівнянь:

$$u_{\nu_1,\alpha_1;11}^{01}(q_1 R_0) A_1 + u_{\nu_1,\alpha_1;11}^{02}(q_1 R_0) B_1 = 0,$$

$$u_{\nu_k,\alpha_k;j1}^{2k-1,1}(q_{2k-1} R_{2k-1}) A_{2k-1} +$$

$$+ u_{\nu_k,\alpha_k;j1}^{2k-1,2}(q_{2k-1} R_{2k-1}) B_{2k-1} -$$

$$- v_{j2}^{2k-1,1}(q_{2k} R_{2k-1}) A_{2k} - v_{j2}^{2k-1,2}(q_{2k} R_{2k-1}) B_{2k} =$$

$$= 0; j = 1, 2; k = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

$$v_{j1}^{2k,1}(q_{2k} R_{2k}) A_{2k} + v_{j1}^{2k,2}(q_{2k} R_{2k}) B_{2k} -$$

$$-u^{2k,1}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};j2}(q_{2k+1}R_{2k})A_{2k+1}-$$
$$-u^{2k,2}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};j2}(q_{2k+1}R_{2k})B_{2k+1}=$$
$$=0;\, j=1,2;\, k=\overline{1,n},$$
$$u^{2n+1,1}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};22}(q_{2n+1}R_{2n+1})A_{2n+1}+$$
$$+u^{2n+1,2}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};22}(q_{2n+1}R_{2n+1})B_{2n+1}=0.$$

Позначимо через $\Delta_{(\nu,\alpha)}(\lambda)$ визначник алгебраїчної системи (6). Для того, щоб алгебраїчна система (6) мала нульовий розв'язок, необхідно й досить, щоб

$$\Delta_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=0, \tag{7}$$
$$(\nu,\alpha)=(\nu_1\alpha_1;\nu_2\alpha_2;\ldots;\nu_{n+1}\alpha_{n+1}).$$

Підставимо корінь $\lambda=\lambda_n$ в систему (6) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Можна покласти $A_1=-u^{02}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_{1n}R_0)A_0$, $B_1=u^{01}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_{1n}R_0)A_0$, де $q_{jn}=(\lambda_n^2+\gamma^2)^{1/2}a_j^{-1}$. Тоді перша компонента власної функції буде визначена з точністю до сталої:

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda_n)=A_0[u^{01}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_{1n}R_0)N_{\nu_1,\alpha_1}(q_{1n}r)-$$
$$-u^{02}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_{1n}R_0)J_{\nu_1,\alpha_1}(q_{1n}r)].$$

Решта рівнянь, розпавшись на групи, дають можливість отримати рекурентні співвідношення для визначення величин A_j та B_j. В результаті підстановки отриманих значень A_j та B_j в формули (4), (5) маємо структуру елементів $V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)$ вектор-функції $V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)=\{V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda_n);V_{(\nu,\alpha);2}(r,\lambda_n);\ldots;V_{(\nu,\alpha);2n}(r,\lambda_n);V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda_n)\}$:

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda_n)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\prod_{s=1}^{2n}c_{21,s}\prod_{s=2}^{2n+1}q_{sn}\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{n}(q_{2s+1,n}R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)}\Psi^0_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_{1n}R_0,q_{1n}r),$$

$$V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k+1}\prod_{s=2k}^{2n}c_{21,s}\prod_{s=2k+1}^{2n+1}q_{sn}\times$$
$$\times\prod_{s=k}^{n}(q_{2s+1,n}R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)}[B_{(\overline{1,4k-2});(\overline{1,4k-2})}\times$$
$$\times\varphi^{2k-1}_{22}(q_{2k,n}R_{2k-1},q_{2k,n}r)-$$
$$-B_{(\overline{1,4k-3});(4k-1);(\overline{1,4k-2})}\times$$
$$\times\varphi^{2k-1}_{12}(q_{2k,n}R_{2k-1},q_{2k,n}r)],\quad k=\overline{1,n}; \tag{8}$$

$$V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k}\prod_{s=2k+1}^{2n}c_{21,s}\prod_{s=2k+2}^{2n+1}q_{sn}\times$$
$$\times\prod_{s=k+1}^{n}(q_{2s+1,n}R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)}[B_{(\overline{1,4k-1});(4k+1);(\overline{1,4k})}\times$$
$$\times\Psi^{2k}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};12}(q_{2k+1,n}R_{2k},q_{2k+1,n}r)-$$
$$-B_{(\overline{1,4k});(\overline{1,4k})}\times$$
$$\times\Psi^{2k}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};22}(q_{2k+1,n}R_{2k},q_{2k+1,n}r)].$$

У формулах (8) беруть участь визначники $B_{(\overline{1,j});(\overline{1,j})}$ та $B_{(\overline{1,j-1});(j+1);(\overline{1,j})}$ квадратної матриці розміру $(4n+2)\times(4n+2)$ алгебраїчної системи (6), тобто матриці A^{4n+2}_{4n+2}, елементи якої є коефіцієнтами невідомих A_j та B_j в системі (6). При цьому індекс $(\overline{1,j});(\overline{1,j})$ вказує, що в утворенні даного визначника беруть участь рядки з номерами від 1 до j та стовпці з номерами від 1 до j, а індекс $(\overline{1,j-1});(j+1);(\overline{1,j})$ вказує, що j-ий рядок заміняється $(j+1)$-им, а стовпці беруться з номерами від 1 до j.

За допомогою одиничної функції Гевісайда $\theta(r)$ побудуємо вагову функцію

$$\sigma(r)=\sum_{k=0}^{n}r^{2\alpha_{k+1}+1}\sigma_{2k+1}\theta(R_{2k+1}-r)\theta(r-R_{2k})+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sigma_{2k}\theta(R_{2k}-r)\theta(r-R_{2k-1}) \tag{9}$$

та спектральну функцію

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta_n)=\sum_{j=1}^{2n+1}V_{(\nu,\alpha;j)}(r,\lambda_n)\theta(R_j-r)\times$$
$$\times\theta(r-R_{j-1}). \tag{10}$$

Згідно з роботою [6] маємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). *Корені λ_n трансцендентного рівняння (7) складають дискретний спектр: дійсні, різні (за винятком, можливо, нуля), симетричні відносно точки $\lambda=0$, на додатній* *пiввiсi $\lambda > 0$ утворюють монотонно зростаючу послiдовнiсть з єдиною точкою згущення $\lambda = \infty$.*

Теорема 2 (про дискретну функцiю). *Система власних вектор-функцiй $\{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна з ваговою функцiєю $\sigma(r)$, повна та замкнута на множинi I_{2n}.*

Теорема 3 (типу теореми Стєклова). *Якщо вектор-функцiя $f(r) = \{f_1(r); f_2(r); \dots; f_{2n}(r); f_{2n+1}(r)\}$ неперервна разом з похiдними до 3-го порядку включно, а функцiї $f_j(r)$ задовольняють крайовi умови (2) та умови спряження (3), то ряд Фур'є*

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R} f(\rho) V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda_n)\sigma(\rho)d\rho \times \times \frac{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)}{\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\|_1^2} \qquad (11)$$

за системою власних вектор-функцiй $\{V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збiгається на множинi I_{2n} абсолютно й рiвномiрно.

У рiвностi (11) $\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\|_1$ – узагальнена норма власної функцiї [6], а

$$\int_{R_0}^{R} f(r) V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\sigma(r)dr = = \sum_{k=0}^{n} \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r) V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n) r^{2\alpha_{k+1}+1} \times \times \sigma_{2k+1}dr + \sum_{k=1}^{n} \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r) V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)\sigma_{2k}dr. \qquad (12)$$

Ряд Фур'є (11) визначає пряме H_{2n} та обернене H_{2n}^{-1} скiнченне гiбридне iнтегральне перетворення, породжене на множинi I_{2n} гiбридним диференцiальним оператором

$$\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \theta(r-R_{2k})\theta(R_{2k+1}-r)a_{2k+1}^2 \times \times B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} + + \sum_{k=1}^{n} \theta(r-R_{2k-1})\theta(R_{2k}-r)a_{2k}^2 d^2/dr^2 : \qquad (13)$$

$$H_{2n}[f(r)] = = \int_{R_0}^{R_{2n+1}} f(r) V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{f}_n, \qquad (14)$$

$$H_{2n}^{-1}[\tilde{f}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n) \times \times (\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\|_1^2)^{-1} \equiv f(r). \qquad (15)$$

В основi побудови алгебри гiбридного диференцiального оператора $\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}$ лежить основна тотожнiсть.

Теорема 4 (про основну тотожнiсть). *Якщо вектор-функцiя*

$$g(r) = \{B_{\nu_1,\alpha_1}[f_1(r)]; f_2''(r); B_{\nu_2,\alpha_2}[f_3(r)]; f_4''(r); \dots; f_{2n}''(r); B_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}[f_{2n+1}(r)]\}$$

неперервна на множинi I_{2n}, а функцiї $f_j(r)$ задовольняють крайовi умови (2) та умови спряження (3), то справджується основна тотожнiсть iнтегрального перетворення гiбридного диференцiального оператора $\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}$:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = -\lambda_n^2 \tilde{f}_n - \sum_{k=0}^{n} \gamma_{2k+1}^2 \times \times \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r) V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n) r^{2\alpha_{k+1}+1}\sigma_{2k+1}dr - - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{2k}^2 \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r) V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)\sigma_{2k}dr - -(\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda_n) a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} [(\tilde{\alpha}_{11}^0 d/dr + +\tilde{\beta}_{11}^0) f_1(r)]\Big|_{r=R_0} + (\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1} \times \times V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1},\lambda_n) a_{2n+1}^2 \sigma_{2n+1} R_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1} \times \times [(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} d/dr + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1}) f_{2n+1}(r)]\Big|_{r=R_{2n+1}}. \qquad (16)$$

Доведення. За означенням згідно формул (13), (14) маємо:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} a_{2k}^2\frac{d^2f_k}{dr^2}\times$$

$$\times V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)\sigma_{2k}dr + \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} a_{2k+1}^2\times$$

$$\times B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}[f_{2k+1}(r)]V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n)\sigma_{2k+1}\times$$

$$\times r^{2\alpha_{k+1}+1}dr. \qquad (17)$$

Проінтегруємо в (17) під знаком інтегралів частинами два рази:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] = \sum_{k=1}^{n}\left\{a_{2k}^2\sigma_{2k}\left(\frac{df_{2k}}{dr}\times\right.\right.$$

$$\left.\times V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n) - f_{2k}(r)\frac{dV_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} +$$

$$\left.+\int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f_{2k}(r)\left[a_{2k}^2\frac{d^2}{dr^2}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)\right]\sigma_{2k}dr\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\left\{a_{2k+1}^2\sigma_{2k+1}\left[r^{2\alpha_{k+1}+1}\left(\frac{df_{2k+1}(r)}{dr}\times\right.\right.\right.$$

$$\times V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n) - f_{2k+1}(r)\times$$

$$\left.\left.\times\frac{dV_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{R_{2k}}^{R_{2k+1}}\right] + \int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f_{2k+1}(r)\times$$

$$\times\left(a_{2k+1}^2 B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}[V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n)]\right)\times$$

$$\left.\times\sigma_{2k+1}r^{2\alpha_{k+1}+1}dr\right\}. \qquad (18)$$

Із тотожностей

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda_n^2+\gamma_{2k}^2}{a_{2k}^2}\right)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n) \equiv 0,$$

$$\left(B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} + \frac{\lambda_n^2+\gamma_{2k+1}^2}{a_{2k+1}^2}\right)V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n) \equiv 0$$

одержуємо співвідношення:

$$a_{2k}^2\frac{d^2}{dr^2}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n) =$$

$$-(\lambda_n^2+\gamma_{2k}^2)V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n),$$

$$a_{2k+1}^2 B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}[V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n)] =$$

$$= -(\lambda_n^2+\gamma_{2k+1}^2)V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n). \qquad (19)$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{11}^0 \neq 0$, то в точці $r = R_0$ маємо:

$$\left(\frac{df_1}{dr}V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda_n) - f_1(r)\frac{dV_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_0} =$$

$$= \left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{df_1}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 f_1\right)\Bigg|_{r=R_0}\cdot(\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda_n) -$$

$$-(\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}f_1(R_0)\left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0\right)\times\right.$$

$$\left.\times V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda_n)\right]\Bigg|_{r=R_0} = [0\cdot V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda_n) -$$

$$-0\cdot f_1(R_0)](\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} = 0.$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1} \neq 0$, то в точці $r = R_{2n+1}$ маємо:

$$\left(\frac{df_{2n+1}}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda_n) - f_{2n+1}(r)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda_n)\right)\Bigg|_{r=R_{2n+1}} =$$

$$= \left(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1}\frac{df_{2n+1}}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1}f_{2n+1}(r)\right)\Bigg|_{r=R_{2n+1}}\times$$

$$\times(\alpha_{22}^{2n+1})^{-1}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1},\lambda_n) -$$

$$-(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1}f_{2n+1}(R_{2n+1})\left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^{2n+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda_n)\right]\Bigg|_{r=R_{2n+1}} =$$

$$= [0\cdot V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1},\lambda_n) -$$

$$-0\cdot f_{2n+1}(R_{2n+1})](\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1}) = 0.$$

Позаінтегральні доданки, що залишилися в рівності (18) перепишемо в такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_{2k}^2\sigma_{2k}\left(\frac{df_{2k}}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(R_{2k},\lambda_n)-f_{2k}(R_{2k})\times\right.\right.$$

$$\left.\times\frac{dV_{(\nu,\alpha);2k}(R_{2k},\lambda_n)}{dr}\right)-a_{2k+1}^2\sigma_{2k+1}R_{2k}^{2\alpha_{k+1}+1}\times$$

$$\times\left(\frac{df_{2k+1}}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k+1}(R_{2k},\lambda_n)-f_{2k+1}(R_{2k})\times\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{dV_{(\nu,\alpha);2k+1}(R_{2k},\lambda_n)}{dr}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[a_{2k-1}^2\sigma_{2k-1}R_{2k-1}^{2\alpha_{k-1}+1}\left(\frac{df_{2k-1}(r)}{dr}\times\right.\right.$$

$$\times V_{(\nu,\alpha);2k-1}(r,\lambda_n)-f_{2k-1}(r)\times$$

$$\left.\times\frac{dV_{(\nu,\alpha);2k-1}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_{2k-1}}-a_{2k}^2\sigma_{2k}\times$$

$$\times\left(\frac{df_{2k}}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)-f_{2k}(r)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{dV_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_{2k-1}}\right]\equiv\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2.$$

Скориставшись базовою тотожністю

$$\left(\frac{df_j}{dr}V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)-f_j(r)\frac{dV_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_j}=$$

$$=\frac{c_{21,j}}{c_{11,j}}\left(\frac{df_{j+1}}{dr}V_{(\nu,\alpha);j+1}(r,\lambda_n)-\right.$$

$$\left.-f_{j+1}(r)\frac{dV_{(\nu,\alpha);j+1}(r,\lambda_n)}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_j}$$

та визначенням σ_j, отримуємо:

$$\mathcal{R}_1=\prod_{s=2k}^{2n}\frac{c_{11,s}}{c_{21,s}}\prod_{s=k}^{n-1}\left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}}\right)^{2\alpha_{s+1}+1}R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1}\times$$

$$\times\left(\frac{c_{21,2k}}{c_{11,2k}}-\frac{c_{21,2k}}{c_{11,2k}}\right)=0,$$

$$\mathcal{R}_2=\prod_{s=2k-1}^{2n}\frac{c_{11,s}}{c_{21,s}}\prod_{s=1}^{n-1}\left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}}\right)^{2\alpha_{s+1}+1}R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1}\times$$

$$\times\left(\frac{c_{21,2k-1}}{c_{11,2k-1}}-\frac{c_{21,2k-1}}{c_{11,2k-1}}\right)=0.$$

Рівність (18) набуває вигляду:

$$H_{2n}[\mathcal{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]]=\sum_{k=1}^{n}\int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}}f_{2k}(r)\times$$

$$\times\left[a_{2k}^2\frac{d^2}{dr^2}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda_n)\right]\sigma_{2k}dr+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}}f_{2k+1}(r)\times$$

$$\times\left[a_{2k+1}^2B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda_n))\right]\times$$

$$\times\sigma_{2k+1}r^{2\alpha_{k+1}+1}dr.$$

Якщо скористатися тотожностями (19) й роз'єднати інтеграли, то приходимо до тотожності (16).

Як приклад розглянемо задачу квазістатики.

Задача про дифузію тепла. Знайти інтегральне зображення обмеженого на множині $D_n=\{(t,r):\ t\in(0,\infty),r\in I_{2n}\}$ розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{\partial u_{2k+1}}{\partial t}-a_{2k+1}^2B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}[u_{2k+1}]=f_{2k+1}(t,r),$$

$$r\in(R_{2k-1},R_{2k}),k=\overline{1,n},\qquad(20)$$

$$\frac{\partial u_{2k}}{\partial t}-a_{2k}^2\frac{\partial^2u_{2k}}{\partial r^2}=f_{2k}(t,r),$$

$$r\in(R_{2k},R_{2k+1}),k=\overline{0,n}$$

за нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0+\right.$$

$$\left.+\gamma_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right]u_1(t,r)\Bigg|_{r=R_0}=g_0(t),\qquad(21)$$

$$\left[\left(\alpha_{22}^{2n+1}+\delta_{22}^{2n+1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{2n+1}+\right.$$
$$\left.+\gamma_{22}^{2n+1}\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{2n+1}(t,r)\Big|_{r=R_{2n+1}}=g_{2n+1}(t)$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^{k}+\delta_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}+\right.\right.$$
$$\left.+\gamma_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right]u_k(t,r)-\left[\left(\alpha_{j1}^{k}+\delta_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}+\right.$$
$$\left.\left.+\gamma_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Big|_{r=R_k}=0;\, j=1,2;\, k=\overline{1,2n}.$$

Застосуємо до даної задачі інтегральний оператор H_{2n} за відомою логічною схемою [3]. В силу тотожності (16) при $\gamma_j^2=0$ одержуємо задачу Коші [4]:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt}+\lambda_n^2\tilde{u}_n=\tilde{f}_n(t)+(\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1})^{-1}R_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1}\times$$
$$\times V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1},\lambda_n)g_{2n+1}(t)-a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\times$$
$$\times(\tilde{\alpha}_{11}^{0})^{-1}V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda_n)g_0(t)\equiv\tilde{F}_n(t),$$
$$\tilde{u}_n(t)|_{t=0}=0. \qquad (23)$$

Розв'язком задачі Коші (23) є функція

$$\tilde{u}_n(t)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\tilde{F}_n(\tau)d\tau. \qquad (24)$$

В результаті застосування до функції $\tilde{u}_n(t)$ оператора H_{2n}^{-1} згідно правила (15) маємо єдиний розв'язок даної задачі (20) – (22):

$$u_j(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(t)V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)\times$$
$$\times(\|V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)\|_1^2)^{-1},\, j=\overline{1,2n+1}. \qquad (25)$$

У результаті елементарних перетворень одержуємо шукане інтегральне зображення розв'язку даної параболічної задачі:

$$u_j(t,r)=\sum_{k=0}^{n}\int_0^t\int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}}H_{(\nu,\alpha);j,2k+1}(t-\tau,r,\rho)\times$$
$$\times f_{2k+1}(\tau,\rho)\rho^{2\alpha_{k+1}+1}\sigma_{2k+1}d\rho d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}}H_{(\nu,\alpha);j,2k}(t-\tau,r,\rho)\times$$
$$\times f_{2k}(\tau,\rho)\sigma_{2k}d\rho d\tau+\int_0^t[W_{(\nu,\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)+$$
$$+W_{(\nu,\alpha);2n+1,j}(t-\tau,r)g_{2n+1}(\tau)]d\tau,\, j=\overline{1,2n+1}. \qquad (26)$$

У формулі (26) беруть участь породжені неоднорідністю системи (26) функції впливу

$$H_{(\nu,\alpha);jm}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2t}\times$$
$$\times\frac{V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)V_{(\nu,\alpha);m}(\rho,\lambda_n)}{\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\|_1^2} \qquad (27)$$

та функції Гріна

$$W_{(\nu,\alpha);1j}(t,r)=-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2t}\times$$
$$\times\frac{V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)V_{(\nu,\alpha);1}(R_0,\lambda_n)}{\tilde{\alpha}_{11}^{0}\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\|_1^2}a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}, \qquad (28)$$

$$W_{(\nu,\alpha);2n+1,j}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^2t}\times$$
$$\times\frac{V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda_n)V_{(\nu,\alpha);2n+1}(R_{2n+1},\lambda_n)}{\tilde{\alpha}_{22}^{2n+1}\|V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda_n)\|_1^2}R_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1}, \qquad (29)$$

породжені тепловим режимом на краях $r=R_0$ та $r=R_{2n+1}$ області D_n.

Зауваження 1. *Якщо початкові умови неоднорідні, тобто*

$$u_j(t,r)|_{t=0}=\omega_j(r),$$

то заміна функцій

$$u_j(t,r)=v_j(t,r)+\omega_j(r)$$

приводить для функцій $v_j(t,r)$ до нульових початкових умов.

Зауваження 2. *Без залучення нових ідей отримуємо розв'язок задачі у випадку, коли умови спряження неоднорідні.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.

2. *Блажевський С.Г., Ленюк М.П.* Термопружний стан багатошарових симетричних тіл. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.

3. *Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В.* Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М: Физматгиз, 1959. – 468 с.

5. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссиативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

6. *Ленюк М.П., Мороз В.В.* Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314 – 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 105 – 113.