

КОЗОБРАЖЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ ВІНЦЕВОГО СТЕПЕНЯ
ЗНАКОЗМІННИХ ГРУП

Зроблено конструктивне просте й елементарне доведення двопородженості метазнакозмінної групи $A_{n_1} \wr A_{n_2} \dots \wr A_{n_m}$ ($n_i \geq 5$, $m > 2$). Знайдено твірні та визначальні співвідношення для вінцевого степеня знакозмінних груп $\underbrace{A_n \wr A_n \dots \wr A_n}_m$ ($m > 2$).

An elementary and constructive proof of the existence of an 2-element generator system for metaalternating group $A_{n_1} \wr A_{n_2} \dots \wr A_{n_m}$, ($n_i \geq 5$, $m > 2$) is given. We find generators and defining relations for wreath products of alternating groups $\underbrace{A_n \wr A_n \dots \wr A_n}_m$ ($m > 2$).

1. Вступ. Знакозмінна група A_n з'являється у багатьох дослідженнях [1 – 4]. Її козображення і властивості досліджував Кармайкл [4]. Питання про козображення вінцевого добутку груп $A_n \wr A_n$ і $A_n \wr A_n \wr A_n$ виникало ще при побудові графів Келі [3] та у дослідженні систем твірних цих груп [4]. Для різних систем твірних і відповідних їм співвідношень ці графи мають мало спільного окрім того, що вони мають однакову кількість вершин і однакові регулярності. Графи Келі цієї групи можуть бути не ізоморфні, окрім як в сенсі спеціального топологічного *lips*-ізоморфізму [5]. Також цікавим є вивчення властивостей інших графів пов'язаних з цими групами. У статті [1] неконструктивними методами була доведена двопородженість нескінченно ітерованих вінцевих добутків

$$A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \dots, n_i \geq 5.$$

Пізніше (див. [6, 7]), даний результат було узагальнено на нескінченно ітеровані вінцеві добутки довільних неабелевих простих груп. У статтях [10, 11] були побудовані топологічна r -елементна та двоелементна системи твірних для метазнакозмінних груп нескінченного і скінченного рангу відповідно. Наведені нами доведення і результати є дещо простішими і загальнішими ніж попередні.

2. Основні поняття і результати. Не-

хай (G, X) і (H, Y) дві групи підстановок, де $(G, X) \wr H$ – вінцевий добуток групи (G, X) підстановок з абстрактною групою H . Визначимо дію групи $(G, X) \wr H$ на множині $X \times Y$, поклавши для довільної пари $(u, v) \in X \times Y$ і для довільного елемента $[g, h(x)] \in (G, X) \wr H$

$$(u, v)^{[g, h(x)]} = (u^g, v^h(u)). \quad (1)$$

При цьому одинична таблиця визначає тривіальну дію. Отже, так задана дія визначає групу підстановок на множині $X \times Y$.

Означення 1. Група підстановок $(G \wr H, X \times Y)$ з дією (1), називається вінцевим добутком груп підстановок (G, X) і (H, Y) .

Знакозмінна група A_n є підгрупою групи підстановок S_n індекса 2, її твірними можна при $n > 3$ взяти цикли

$$t = (1, 2, 3), s = (3, 4, \dots, n)$$

для $n \equiv 1 \pmod{2}$ та

$$t = (1, 2, 3), s = (1, 2)(3, 4, \dots, n)$$

у випадку $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Козображення A_n для цієї системи твірних знайдене ще Кармайклом [3]:

$$t^3 = s^{n-2} = (st)^n = (ts^{-k}ts^k)^2,$$

якщо $1 \leq k \leq \frac{n-3}{2}$ та $n \equiv 1 \pmod{2}$ і

$$t^3 = s^{n-2} = (st)^{n-1} = (t^{(-1)^k} s^{-k} t s^k)^2 = e,$$

якщо $1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$ та $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Знайдемо козображення для групи

$$A_n \wr A_n = \langle s_0, s_1, \dots, s_n, t_0, t_1, \dots, t_n \rangle$$

при $n \equiv 1 \pmod{2}$, та

$$s_0 = [(3, 4, \dots, n), e, \dots, e],$$

$$s_1 = [e, (3, 4, \dots, n), e, \dots, e],$$

...

$$s_i = [e, \dots, e, (3, 4, \dots, n), e, \dots, e],$$

...

$$s_n = [e, \dots, e, (3, 4, \dots, n)];$$

$$t_0 = [(1, 2, 3), e, \dots, e],$$

$$t_1 = [e, (1, 2, 3), e, \dots, e], \dots,$$

$$t_n = [e, \dots, e, (1, 2, 3)].$$

Спочатку розглянемо вінцевий добуток $E \wr A_n$. Зрозуміло, що

$$E \wr A_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$$

фактично має конструкцію прямого добутку груп $A_n \times \dots \times A_n$.

Нагадаємо деякі добре відомі факти.

Теорема 1. Якщо $G_i = \langle X_i | R_i \rangle$, $i \in I$, причому $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, тоді маємо

$$\prod_{i \in I} G_i = \langle \cup X_i | \cup R_i, x_i x_j = x_j x_i,$$

$$x_i \in X_i, x_j \in X_j \rangle.$$

Оскільки $\wr_{i=1}^k A_{n_i} \triangleleft \wr_{i=1}^k S_{n_i}$, то розглянемо будову підгруп у $\wr_{i=1}^k S_{n_i}$. Нехай $G < \wr_{i=1}^k S_{n_i}$, тоді G допускає таке представлення: $G = \bigsqcup_{i=0}^p [a_i, H_i]$, де всі a_i різні, зокре-

ма $a_i \in \wr_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$, $a_0 = e$, $H_i \subset \prod_{i=1}^{n_1 n_2 \dots n_{k-1}} S_{n_i}$, $H_0 = H$.

Лема 1. Нехай $G \triangleleft \wr_{i=1}^k S_{n_i}$, тоді

$$G = \bigsqcup_{i=0}^p [a_i, H_i] : H_i = H_0 b_i, b_i \in H_i.$$

Доведення. Нехай $[a_i, H_i] \subset G$. Враховуючи, що $G \triangleleft \wr_{i=1}^k S_{n_i}$, для довільного $[a_i, e] \in \wr_{i=1}^k S_{n_i}$, маємо

$$[a_i, e][a_i, H_i][a_i, e]^{-1} = [a_i, H_i^{a_i}] \subset G,$$

тому $H_i^{a_i} = H_i$. Нехай $|a_i| = m$, тоді

$$[a_i, H_i]^m = [e, H_i^m],$$

а звідси $H_i^m \subset H$. Оскільки G — група, то

$$[e, H][a_i, H_i] = [a_i, HH_i].$$

Отже, $H \cdot H_i^m \subset H_i$. Маємо ланцюг потужностей:

$$|H_i| \leq |H_i^m| \leq |HH_i| \leq |H_i|.$$

Звідси $HH_i = H_i$, тому $Hb_i = H_i$, $b_i \in H_i$. $\square$

Нехай D — довільна двопороджена досконала група.

Лема 2. Нехай t_D і s_D — це твірні групи D . Тоді наступні елементи утворюють систему твірних для $A_n \wr D$, $n \geq 4$:

$$\begin{cases} [t, e, \dots, e], [e, e, e, t_D, \dots, e], \\ [s_n, e, e, e, \dots, e], [e, e, e, s_D, e, \dots, e], \end{cases} \quad (2)$$

де символом e позначено як тотожну підстановку, так і функцію від k змінних ($1 \leq k \leq n-1$), всі значення якої є тотожними підстановками.

Доведення. Оскільки A_n діє точно і транзитивно, то згідно з [10] системою твірних для групи $A_n \wr D$ є наступна система:

$$\begin{cases} s_0 = [(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], \\ s_1 = [e, s_D, e, \dots, e], \dots, \\ s_i = [e, \dots, e, s_D, e, \dots, e], \dots, \\ s_n = [e, \dots, e, s_D]; \\ t_0 = [(1, 2, 3), e, \dots, e], \\ t_1 = [e, t_D, e, \dots, e], \dots, \\ t_i = [e, e, \dots, e, t_D, e, \dots, e], \dots, \\ t_n = [e, \dots, e, t_D]. \end{cases} \quad (3)$$

Доведемо можливість виразити твірні з (3) через (2). Справді, шляхом спряження твірних з (2) можна отримати всі елементи з (3), наприклад:

$$\begin{aligned} s_0 t_3 s_0^{-1} &= \\ &= [s, e, e, \dots, e][e, e, e, t, e, \dots, e][s^{-1}, e, e, \dots, e] = \\ &= [e, e, e, e, t, e, \dots, e] = t_4, \\ s_0 t_i s_0^{-1} &= \\ &= [s, e, e, \dots, e][e, e, \dots, e, t, e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [s^{-1}, e, e, \dots, e] = [e, e, e, \dots, e, t, e, \dots, e] = t_{i+1}, \\ s_0^j t_i s_0^{-j} &= t_{i+j}, i+j \leq n, \\ t_0^j t_i t_0^{-j} &= t_{i+j}, i+j \leq 3. \end{aligned}$$

Лема 3. Нехай A, D – скінченні, досконалі групи, тоді $A \wr D$ теж досконала.

Доведення. Маємо систему твірних виду (3) і зафіксуємо довільний $x \in X$ і $B_X = \{[e, \dots, e, b_x, e, \dots, e] | b_x \in D\}$ – база вінцевого добутку. З одного боку комутант $(A \wr D)'$ містить окрім інших і усі елементи виду (3), тобто $[a, e, \dots, e]$ та $[e, \dots, e, b_x, \dots, e]$. Наприклад, $[a, e, \dots, e] = \prod_{i=1}^k ([v_i, e, \dots, e] \cdot [u_i, e, \dots, e] \cdot [v_i^{-1}, e, \dots, e] \cdot [u_i^{-1}, e, \dots, e])$ і в силу досконалості такі $u, v \in A$ існують. Аналогічно з твірними виду $[e, \dots, e, b_x, \dots, e]$. Тобто $(A \wr D)' \supseteq (A \wr D)$. Навпаки, група завжди містить свій комутант, тому $(A \wr D)' \subseteq (A \wr D)$. $\square$

Зауваження 1. Вінцевий добуток $\zeta_{i=1}^k D_i$ досконалих груп (D_i, X_i) , $|X_i| < +\infty$, $1 \leq i \leq k$, теж досконала група.

Доведення здійснюється методом математичної індукції по i . База індукції перевірена у лемі 3.

Зауваження 2. Вінцевий добуток $\zeta_{i=1}^k D_i$ скінченно породжених досконалих не обов'язково скінченних груп (D_i, X_i) , де кожна D_i , $1 \leq i \leq k$, має скінченну ширину по комутанту [9], теж є досконалою групою.

Доведення. Оскільки кожен елемент комутанта $D' = D$ у цьому випадку виражається через скінченну кількість комутаторів $[u_i, v_i]$, $u_i, v_i \in D$, то кожен фіксований

твірний виду $[a_i, e, \dots, e]$ і $[e, \dots, e, b_x, \dots, e]$ виразиться через скінченну кількість елементів комутанта. $\square$

Лема 4. Нехай маємо досконалу групу $D \simeq \langle t_D, s_D \rangle$. Тоді елементи

$$g = [t, e, e, t_D, e, \dots, e]$$

та

$$f = [s_n, e, e, s_D, e, \dots, e]$$

утворюють систему твірних для $A_n \wr D$, $n \geq 4$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок коли n – непарне. Тоді $s_n = (3, 4, \dots, n)$. Маючи елементи

$$g^3 = [e, s, s, s, e, \dots, e],$$

$$f^{n-2} = [e, e, e, t_D, t_D, \dots, t_D],$$

що отримані з твірних, породжуємо ними підгрупу $H = \langle g^3, f^{n-2} \rangle$. Помітимо, що її третя координата містить всю множину елементів з D , тобто $[H]_3 \simeq D$, оскільки $D = \langle t_D, s_D \rangle$. Знаходимо її комутант $K = [H, H]$. Зрозуміло, що кожен елемент із K має вигляд $[e, e, e, g', e, \dots, e]$, де g' довільний елемент з D . Тобто $[K]_3 \simeq D$. Таким чином, елементи $[e, e, e, t_D, e, \dots, e]$ і $[e, e, e, s_D, e, \dots, e]$ з (2) містяться в K і тому можуть бути виражені з g і f . Покажемо, що з вказаних твірних можна виразити (2). Справді, помножимо твірний $g = [t, e, e, t_D, e, \dots, e]$ на елемент $\omega = [e, e, e, t_D^{-1}, e, e, \dots, e] \in K$ зліва, матимемо $[t, e, e, \dots, e]$. Аналогічно отримуємо $[s, e, e, \dots, e]$. Отже, отримуємо систему твірних (2).

Тепер розглянемо випадок, коли n – парне. Тоді

$$s_n = (1, 2)(3, \dots, n)$$

і

$$f^{n-1} = [s_n^{n-1}, e, s_D, \dots, s_D] = [e, e, s_D, \dots, s_D].$$

Далі породжуємо групу $H = \langle g^3, f^{n-1} \rangle$, а потім беремо її комутант. Отримаємо таку групу:

$$K = \{[e, e, b, e, \dots, e] \mid b \in D\}.$$

Далі цілком аналогічно виражається система твірних (2). Отже, f, g – твірні для $A_n \wr D$, $n \geq 4$.

Наслідок 1. Нехай $A_{n_0} = \langle t, s_{n_0} \rangle$, D — деяка досконала двопороджена група. Тоді група $\zeta_{i=0}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D$, де

$$n_0 \geq 4, n_i \geq 5, k-1 \geq i \geq 1$$

має двоелементну систему твірних

$$f_1 = [t, e, e, f, e, \dots, e], g_1 = [s_{n_0}, e, e, g, e, \dots, e].$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. База індукції перевірена в лемі 4. Покажемо правильність припущення індукції для $k+1$ співмножників. Нехай доведено двопородженість для k множників

$$D_2 \simeq \zeta_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D = \langle f, g \rangle,$$

тоді врахувавши асоціативність вінцевого добутку груп підстановок маємо

$$\zeta_{i=0}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D \simeq A_{n_0} \wr (\zeta_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D) \simeq A_{n_0} \wr D_2$$

(тут до останньої групи застосовна лема 4).

Наслідок 2. Метазнакозмінна група рангу $(k_1, \dots, k_s)$, де всі $k_i \geq 5, i > 1$ для $i = 1, k_1 \geq 4$ є двопородженою.

Доведення випливає з леми 4.

Теорема 4. Нехай при $n \equiv 1 \pmod{2}$ група G має наступне козображення:

$$\langle t_0, \dots, t_n, s_0, \dots, s_n | t^3 = s^{n-3} = (st)^n = (ts^{-k}ts^k)^2, 0 \leq k \leq \frac{(n-3)}{2}, 1 \leq i, j \leq n; \\ s_j s_i = s_i s_j, t_j t_i = t_i t_j, 0 \leq i, j \leq n, n > 3;$$

$$R_2, s_0 s_i = s_i s_0, i = 1, 2 \rangle,$$

де R_2 — співвідношення з системи (2), тоді $G \simeq A_n \wr A_n$.

Доведення. Доведемо, що G ізоморфна $A_n \wr A_n$. Справді, всі зазначені співвідношення з G виконуються в $A_n \wr A_n$, але в $A_n \wr A_n$ можуть бути ще якісь співвідношення, що невивідні з вище вказаних. Якщо б такі були, то порядок групи $A_n \wr A_n$ був би меншим за порядок групи G . Доведемо, що порядки цих груп співпадають. Для цього доведемо, що кожне слово $\omega \in G$ можна звести до канонічного виду:

$$\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0,$$

де ω_i — це комбінація зі степенів s_i, t_i . При зведенні до такого виду врахуємо, що

$$s_i s_j = s_j s_i, t_i s_j = s_j t_i, t_i t_j = t_j t_i,$$

для $1 \leq i, j \leq n$.

Далі наведемо процес зведення ω до канонічної форми, де s_0, t_0 стоять в правому кінці слова, тобто процес «перекидування» s_0, t_0 в кінець слова.

а) Розглянемо слово $s_0 \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1$. Маємо кілька випадків:

$$\begin{aligned} 1a) s_0 \omega_1 &= \begin{cases} s_0 t_1^k \\ s_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k s_0, \\ s_1^k s_0; \end{cases} \\ 2a) s_0 \omega_2 &= \begin{cases} s_0 t_2^k \\ s_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} t_2^k s_0, \\ s_2^k s_0; \end{cases} \\ 3a) s_0 \omega_3 &= \begin{cases} s_0 t_3^k \\ s_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_3^k s_0, \\ s_3^k s_0; \end{cases} \\ 4a) s_0 \omega_n &= \begin{cases} s_0 t_n^k \\ s_0 s_n^k \end{cases} = \begin{cases} t_n^k s_0, \\ s_n^k s_0, \end{cases} \quad n > 3. \end{aligned}$$

б) Знаходимо подібні співвідношення для t_0 . Отже, маємо:

$$\begin{aligned} 1б) t_0 \omega_1 &= \begin{cases} t_0 t_1^k \\ t_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k t_0, \\ s_1^k t_0; \end{cases} \\ 2б) t_0 \omega_2 &= \begin{cases} t_0 t_2^k \\ t_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} t_2^k t_0, \\ s_2^k t_0; \end{cases} \\ 3б) t_0 \omega_3 &= \begin{cases} t_0 t_3^k \\ t_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_3^k t_0, \\ s_3^k t_0; \end{cases} \\ 4б) t_0 \omega_n &= \begin{cases} t_0 t_n^k \\ t_0 s_n^k \end{cases} = \begin{cases} t_n^k t_0, \\ s_n^k t_0, \end{cases} \quad n > 3. \end{aligned}$$

Отже, кожне слово $\omega \in G$ має канонічний вигляд $\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0$, причому для кожного $i \geq 0$: $|\omega_i| = |A_n| = \frac{n!}{2}$, тоді

$$|G| = |A_n \wr A_n| = \left(\frac{n!}{2}\right)^{n+1}.$$

Теорему доведено. $\square$

Знайдемо тепер козображення для групи

$$A_n \wr A_n = \langle s_0, s_1, \dots, s_n, t_0, t_1, \dots, t_n \rangle$$

при $n \equiv 0 \pmod{2}$, де її твірні елементи задаються таблицями:

$$s_0 = [(12)(3, 4, \dots, n), e, \dots, e],$$

$$s_1 = [e, (12)(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], \dots,$$

$$\begin{aligned}s_n &= [e, \dots, e, (12)(3, 4, \dots, n)], \\ t_0 &= [(1, 2, 3), e, \dots, e], \\ t_1 &= [e, (1, 2, 3), e, \dots, e], \dots, \\ t_n &= [e, e, \dots, e, (1, 2, 3)].\end{aligned}$$

Аналогічно, як і в попередньому випадку, скориставшись теоремою 1, знаходимо козображення для $E \wr A_n$, а саме:

$$\begin{aligned}E \wr A_n &= \langle s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_n | s_i^{n-2} = \\ &= t_i^3 = (s_i t_i)^n = (t_i s_i^{-k} t_i s_i^k)^2 = e, t_i t_j = \\ &= t_j t_i, s_i s_j = s_j s_i, t_i s_j = s_j t_i, 1 \leq i, j \leq n \rangle.\end{aligned}$$

Наведемо правила множення в $A_n \wr A_n$. Отже, маємо наступну систему співвідношень:

$$\left\{ \begin{aligned}s_j s_i &= s_i s_j, t_j t_i = t_i t_j, 1 \leq i, j \leq n; \\ s_0 t_i &= t_{i-1} s_0, s_0 s_i = s_{i-1} s_0, i > 3; \\ s_0 s_3 &= s_n s_0, s_0 t_3 = t_n s_0, \\ s_0 t_1 &= t_2 s_0, s_0 s_1 = s_2 s_0, \\ s_0 t_2 &= t_1 s_0, s_0 s_2 = s_1 s_0, \\ t_0 t_i &= t_i t_0, t_0 s_i = s_i t_0, i > 3; \\ t_0 t_1 &= t_3 t_0, t_0 s_1 = s_3 t_0, \\ t_0 t_i &= t_{i-1} t_0, t_0 s_i = s_{i-1} t_0, i = 2, 3.\end{aligned} \right. \quad (4)$$

Таким чином, у співвідношеннях (4) знайдено правила множення елементів t_0, s_0 на решту елементів з $A_n \wr A_n$.

Теорема 5. Нехай $n \equiv 0 \pmod{2}$ і група G задається наступним козображенням:

$$\begin{aligned}G &= \langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, t_0, t_1, t_2, \dots, t_n | s_i^{n-2} = \\ &= t_i^3 = (s_i t_i)^{n-1} = (t_i^{(-1)^k} s_i^{-k} t_i s_i^k)^2 = e, \\ &0 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}, n > 3; \\ &s_j s_i = s_i s_j, t_j t_i = t_i t_j, 1 \leq i, j \leq n, R_3 \rangle,\end{aligned}$$

де R_3 це співвідношення із системи (3). Тоді G ізоморфна $A_n \wr A_n$.

Доведення. Помітимо, що всі правила множення з групи G виконуються в $A_n \wr A_n$. Залишилося довести, що в $A_n \wr A_n$ немає інших невивідних співвідношень. Якби вони існували, то порядок $A_n \wr A_n$ був би меншим ніж $|G|$, тому покажемо рівність цих порядків. Для цього доведемо, що кожне слово $\omega \in G$ можна звести до канонічного виду:

$$\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0,$$

де ω_i — це комбінація зі степенів s_i, t_i . При зведенні до такого виду врахуємо, що

$$s_i s_j = s_j s_i, t_i s_j = s_j t_i, t_i t_j = t_j t_i,$$

для $1 \leq i, j \leq n$.

Далі наведемо процес зведення слова ω до канонічного виду, де s_0, t_0 знаходиться в правому кінці слова, тобто процес «перекидування» s_0, t_0 в кінець слова.

а) Розглянемо слово $s_0 \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1$. Маємо кілька випадків:

$$\begin{aligned}1a) s_0 \omega_1 &= \begin{cases} s_0 t_1^k \\ s_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} s_2^k s_0, \\ s_2^k s_0; \end{cases} \\ 2a) s_0 \omega_2 &= \begin{cases} s_0 t_2^k \\ s_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} s_1^k s_0, \\ s_1^k s_0; \end{cases} \\ 3a) s_0 \omega_3 &= \begin{cases} s_0 t_3^k \\ s_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_n^k s_0, \\ s_n^k s_0; \end{cases} \quad \text{і т.д.}\end{aligned}$$

б) Аналогічно розглянемо випадки із t_0 , враховуючи при цьому, що t_0 комутує з s_i , та t_i при $i > 3$.

$$\begin{aligned}1б) t_0 \omega_1 &= \begin{cases} s_0 t_1^k \\ s_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k s_3, \\ s_1^k s_3; \end{cases} \\ 2б) t_0 \omega_2 &= \begin{cases} s_0 t_2^k \\ s_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k s_0, \\ s_1^k s_0; \end{cases} \\ 3б) t_0 \omega_3 &= \begin{cases} t_0 t_3^k \\ t_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_2^k t_0, \\ s_2^k t_0; \end{cases} \quad \text{і т.д.}\end{aligned}$$

Отже, кожне слово $\omega \in G$ має канонічний вигляд $\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0$, при цьому для кожного $i \geq 0$: $|\omega_i| = |A_n| = \frac{n!}{2}$, тоді

$$|G| = |A_n \wr A_n| = \left(\frac{n!}{2}\right)^{n+1},$$

що і треба було довести. $\square$

Нехай $W_2 = A_n \wr A_n$ діє підстановками на множині X^2 з n^2 елементів і A_n на множині з n елементів. Тоді можна індуктивно визначити $W_3 = (W_2, X^2) \wr A_n$. Позначимо через X^* вільний моноїд породжений множиною X . Тоді множина X^* скінченних послідовностей над X має структуру регулярного дерева [8].

Відомо [6], що для сферично однорідного кореневого дерева висоти m маємо ізоморфізм

$$\text{Aut} X^m \simeq S_n \wr S_n \wr \dots \wr S_n,$$

тому група $\wr_{i=1}^m A_n$ занурюється в цю групу.

Означення 2. Рівнем L_k назовемо множини вершин V , що лежать на відстані $d(v, v_0) = k - 1$ від кореня v_0 .

Позначимо через t_{001} — 1-ий твірний елемент з L_3 , що містить підстановку $t = (1, 2, 3)$ на першій позиції пасивної частини. Аналогічно знаходимо

$$t_{002} = [[e, \dots, e], e, (1, 2, 3), e, \dots, e].$$

Згідно з конструкцією ітерованого вінцевого добутку i -ий пасивний елемент 1-ої таблиці діє на елементах, що мають позиції з номерами $(i - 1)n + 1, \dots, ni$ наступної (другої) таблиці при множенні, в яку теж вкладена менша таблиця в якості активного елемента.

Означення 3. Назвемо твірними 3-го рівня елементи, які утворюються при спряженні твірних t_{001}, s_{001} твірними з $A_n \wr A_n$, тобто з групи, яка утворилась на попередній ітерації, наприклад, таким є $t_{01}t_{001}t_{01}^{-1} = t_{003}$.

Зрозуміло, що довільний твірний з L_3 можна отримати спряженнями елементами t_{001}, s_{001} , зокрема,

$$t_{00i} = s_{01}^j t_{01} t_{001} t_{01}^{-1} s_{01}^{-j},$$

$$3 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 3,$$

де j залежить від i . Для рівня L_2 маємо

$$t_{0n} = s_0 t_0 t_{01} t_0^{-1} s_0^{-1},$$

$$t_{0(n-i+1)} = s_0^i t_0 t_{01} t_0^{-1} s_0^{-i}, 0 < i < n - 3.$$

Знайдемо тепер козображення для групи $A_n \wr A_n \wr A_n$, що породжена твірними $s_0, s_{01}, \dots, s_{0n}, s_{001}, \dots, s_{00n}, t_0, t_{01}, \dots, t_{0n}, t_{001}, \dots, t_{00n}$ при $n \equiv 1 \pmod{2}$, де

$$s_0 = [(3, 4, \dots, n), e, \dots, e]e, \dots, e],$$

$$s_{01} = [[e, (3, 4, \dots, n), e, \dots, e]e, \dots, e], \dots,$$

$$s_{0i} = [[e, \dots, e, (3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e],$$

$$s_{0n} = [[e, \dots, e, (3, 4, \dots, n)], e, \dots, e];$$

$$s_{001} = [[e, \dots, e](3, 4, \dots, n), e, \dots, e], \dots,$$

$$s_{00n^2} = [[e, \dots, e], e, \dots, e, (3, 4, \dots, n)];$$

$$t_0 = [(1, 2, 3), e, \dots, e], e, \dots, e],$$

$$t_{01} = [[e, (1, 2, 3), e, \dots, e], e, \dots, e], \dots,$$

$$t_{0n} = [[e, \dots, e, (1, 2, 3)], e, \dots, e],$$

$$t_{001} = [[e, \dots, e], (1, 2, 3), e, \dots, e], \dots,$$

$$t_{00n^2} = [[e, \dots, e], e, \dots, e, (1, 2, 3)].$$

Дослідимо правила множення в $A_n \wr A_n \wr A_n$. При множенні в $A_n \wr A_n \wr A_n$ теж використовується права регулярна дія, тому співвідношення між елементами сусідніх рівнів, які належать одному піддереву, тобто мають однакові перші $k - 1, 1 \leq k \leq 3$ індексів, є по суті такі ж як у $A_n \wr A_n$. Точніше для елементів з L_2, L_3 при $n \equiv 1 \pmod{2}$ маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{0j}t_{00i} = t_{00i-1}s_{0j}, \\ s_{0j}s_{00i} = s_{00i-1}s_{0j}, \\ (j-1)n+3 \leq i \leq jn; \\ s_{0j}t_{00i} = t_{00i}s_{0j}, \\ s_{01}s_{00i} = s_{00i}s_{01}, \\ (j-1)n+1 \leq i \leq (j-1)n+2; \\ s_{0i}s_{00(i-1)n+3} = s_{00in}s_{0i}, \\ s_{0i}t_{00(i-1)n+3} = t_{00in}s_{0i}, \\ s_{0i}t_{00(i-1)n+r_0} = t_{00(i-1)n+r_0}s_{0i}, \\ s_{0i}s_{00(i-1)n+r_0} = s_{00(i-1)n+r_0}s_{0i}, \\ r_0 \in \{1, 2\}; \\ t_{0i}t_{00(i-1)n+r} = t_{00(i-1)n+r}t_{0i}, r > 3; \\ t_{0i}s_{00(i-1)n+r} = s_{00(i-1)n+r}t_{0i}, r > 3; \\ t_{0i}t_{00(i-1)n+1} = t_{00(i-1)n+3}t_{0i}, \\ t_{0i}s_{00(i-1)n+1} = s_{00(i-1)n+3}t_{0i}, \end{array} \right. \quad (5)$$

де $0 \leq j \leq n - 1$, а для елементів з L_1, L_2 виконуються рівності (2) і (4), при цьому перепозначаємо в нових твірних $s_{0i} = s_i, t_{0i} = t_i, n \geq i \geq 1$. Для випадку $n \equiv 1 \pmod{2}$ можна записати аналогічні співвідношення.

Для елементів з різних піддерев, тобто для $t_{0i}, t_{0jl}, i - 1 \neq j, 1 \leq j \leq n, 1 \leq r \leq n$ виконуються співвідношення:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{0i}t_{00jn+r} = t_{00jn+r}t_{0i}, \\ t_{0i}s_{00jn+r} = s_{00jn+r}t_{0i}, \\ s_{0i}t_{00jn+r} = t_{00jn+r}s_{0i}, \\ s_{0i}t_{00jn+r} = t_{00jn+r}s_{0i}, \end{array} \right. \quad (6)$$

бо їм відповідають автоморфізми, що діють на різних множинах слів.

Залишилося дослідити правила множення елементів t_0, s_0 на решту елементів з L_3 . Для цього позначимо

$$t_{00i} = t_i, s_{00i} = s_i, 1 \leq i \leq n^2.$$

Для елементів з 0-го і 3-го рівнів, у випадку $n \equiv 1 \pmod{2}$, маємо наступні співвідношення, які також є у групі G , а саме:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 t_i = t_i s_0, s_0 s_i = s_i s_0, 1 < i < 3n; \\ t_0 t_n = t_{3n} t_n, t_n s_1 = s_{3n} t_n, \\ s_0 t_i = t_{i-n} s_0, s_0 s_i = s_{i-n} s_0, \\ 4n < i \leq n^2; \\ s_0 t_i = t_{n^2-k} s_0, s_0 s_i = s_{n^2-k} s_0, \\ k = n - 1 - (i - 3n) = 4n - i - 1, \\ 3n \leq i \leq 4n; \\ t_0 t_i = t_i t_0, t_0 s_i = s_i t_0, i > 3n; \\ t_0 t_i = t_{i-n} t_0, t_0 s_i = s_{i-n} t_0, \\ n < i \leq 3n; \\ t_0 t_i = t_{2n+i} t_0, t_0 s_i = s_{2n+i} t_0, \\ 1 \leq i \leq n. \end{array} \right. \quad (7)$$

Доведемо детально лише кілька співвідношень, бо всі інші правила множення перевіряються аналогічно безпосереднім множенням. Нехай $i < 3n$. Тоді

$$\begin{aligned} s_0 t_i &= [(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [[e, \dots, e], e, (1, 2, 3), e, \dots, e] = \\ &= [[e, \dots, e], e, (1, 2, 3), e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e] = t_i s_0. \end{aligned}$$

Для $i = 2n + 1$ маємо

$$\begin{aligned} t_0 t_i &= [(1, 2, 3), e, \dots, e], e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [[e, \dots, e], e, \dots, (1, 2, 3), e, \dots, e] = \\ &= [[e, \dots, e], (1, 2, 3), e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [(1, 2, 3), e, \dots, e], e, \dots, e] = t_{n+1} t_0. \end{aligned}$$

Отже, співвідношення $t_0 t_{2n+1} = t_{n+1} t_0$ виконується.

Нехай n — парне. Тоді маємо наступну систему співвідношень:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n, s_0 t_i = t_{n+i} s_0, s_0 s_i = s_{n+i} s_0, \\ s_0 t_i = t_{i-n(\bmod 2n)} s_0, s_0 s_i = s_{i-n(\bmod 2n)} s_0; \\ s_0 t_i = t_{i-n} s_0, s_0 s_i = s_{i-n} s_0, n < i \leq 2n; \\ s_0 t_i = t_{i-n} s_0, s_0 s_i = s_{i-n} s_0, 4n < i \leq n^2; \\ s_0 t_i = t_{n^2-k} s_0, s_0 s_i = s_{n^2-k} s_0, \\ k = 4n - i - 1, 3n \leq i \leq 4n; \\ t_0 t_i = t_i t_0, t_0 s_i = s_i t_0, i > 3n; \\ t_0 t_i = t_{i-n} t_0, t_0 s_i = s_{i-n} t_0, n < i \leq 3n; \\ t_0 t_i = t_{2n+i} t_0, t_0 s_i = s_{2n+i} t_0, 1 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Перевіримо співвідношення $s_0 t_i = t_{n+i} s_0$, при $i = 2$ та $n > 2$:

$$\begin{aligned} s_0 t_2 &= [(1, 2)(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [[e, \dots, e], e, (1, 2, 3), e, \dots, e] = \\ &= [[e, \dots, e], e, \dots, e, (1, 2, 3), e, \dots, e] \cdot \\ &\cdot [(1, 2)(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e] = t_{n+2} s_0. \end{aligned}$$

Отже, потрібне співвідношення виконується.

Обґрунтуємо формулу для величини зсуву k відносно n^2 у формулі

$$s_0 t_i = t_{n^2-k} s_0, \quad 3n \leq i \leq 4n.$$

Зсув до позиції з номером $3n$ це величина $i'' = i - 3n$, зсув вправо від позиції n^2 це $i'' = n - i'$. Ще віднімемо 1, враховуючи відображення із позиції з номером $3n$ в позицію n^2 , в результаті маємо:

$$\begin{aligned} k &= i'' - 1 == (n - i') - 1 = \\ &= n - (i - 3n) - 1 = 4n - i - 1. \end{aligned}$$

Доведемо, що в $A_n \wr A_n \wr A_n$ інших співвідношень немає. Покажемо, що

$$|G| = |A_n \wr A_n \wr A_n|.$$

Для цього доведемо, що слово $w \in G$ можна звести до канонічного виду:

$$w = w_{n^2} w_{n^2-1} \dots w_1 w_0.$$

При зведенні до канонічного виду врахуємо вище наведені співвідношення і комутації $s_{0j} t_{0i} = t_{0i} s_{0j}$, $t_{0j} t_{0i} = t_{0i} t_{0j}$, $s_{0j} s_{0i} = s_{0i} s_{0j}$, аналогічно комутації між елементами 3-го рівня $s_{00j} t_{00i} = t_{00i} s_{00j}, \dots$, $1 \leq j, i \leq n^2$ і комутації між елементами різних рівнів $t_{0i} t_{0jl} = t_{0jl} t_{0i}$, $t_{0i} s_{0jl} = s_{0jl} t_{0i}$, $s_{0i} t_{0jl} = t_{0jl} s_{0i}$, $s_{0i} t_{0jl} = t_{0jl} s_{0i}$, $i \neq j$, $1 \leq l \leq n^2$, $1 \leq i, j \leq n$. Далі здійснюємо процес зведення довільного слова $\omega \in G$ до канонічного виду:

$$\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0,$$

де ω_i — це комбінація зі степенів s_i , t_i , t_{0i} , s_{0i} , t_{0jl} , s_{0jl} . Цей процес зводиться до «перекидування» s_0 , t_0 в кінець слова і впорядкування інших елементів так, щоб отримати

канонічне слово w . Отже, доведено теорему про те, що G ізоморфна $A_n \wr A_n \wr A_n$.

Теорема 6. Нехай при $n \equiv 1 \pmod{2}$ група G має наступне козображення:

$$\langle t^3 = s^{n-3} = (st)^n = (ts^{-k}ts^k)^2, 0 \leq k \leq \frac{n-3}{2};$$

$$s_{0j}s_{0i} = s_{0i}s_{0j}, s_{0j}t_{0i} = t_{0i}s_{0j}, t_{0j}t_{0i} = t_{0i}t_{0j},$$

$$t_{0j}s_{0i} = s_{0i}t_{0j}, 1 \leq i, j \leq n, n > 3;$$

$$s_0s_{0i} = s_{0i}s_0, i = 1, 2, R_2, R_4, R_5, R_6 \rangle,$$

де R_2, R_4, R_5, R_6 — це співвідношення з системою (2), (4), (5), (6) відповідно, тоді

$$G \simeq A_n \wr A_n \wr A_n.$$

Доведення. Для $\wr_{i=1}^m A_n$ (тут і надалі під $\wr_{i=1}^m A_n$ розуміємо $\wr_{i=1}^{(i)} A_n^{(1)}$, при цьому $A_n^{(1)} = A_n^{(2)} = \dots = A_n^{(m)} = A_n$) досить довести детально лише кілька співвідношень, бо всі інші правила множення перевіряються аналогічно безпосереднім множенням.

Нехай $i < 3n$, тоді

$$s_0t_i = [[(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e].$$

$$\cdot [[e, \dots, e]e, e, (1, 2, 3), e, \dots, e] =$$

$$= [[e, \dots, e]e, e, (1, 2, 3), e, \dots, e].$$

$$\cdot [[(3, 4, \dots, n), e, \dots, e], e, \dots, e] = t_i s_0.$$

Для $i = 2n + 1$:

$$t_0t_i = [[(1, 2, 3), e, \dots, e], e, \dots, e].$$

$$\cdot [[e, \dots, e]e, e, \dots, (1, 2, 3), e, \dots, e] =$$

$$= [[e, \dots, e](1, 2, 3), e, e, e, \dots, e].$$

$$\cdot [[(1, 2, 3), e, \dots, e], e, \dots, e] = t_{n+1}t_0.$$

Отже, співвідношення $t_0t_{2n+1} = t_{n+1}t_0$, виконуються.

Виведемо співвідношення для $\wr_{i=0}^m A_n$ за індукцією, припустивши, що для $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$ співвідношення знайдені і є аналогічними наведеним вище а саме, для парного n маємо:

1) при $1 < i < 3n^{m-1}$,

$$s_0t_i = t_i s_0, s_0s_i = s_i s_0;$$

2) при $3n^{m-2} \geq i > 1, i \in \mathbb{N}$,

$$t_0s_i = s_{i-3n^{m-2} \pmod{3n^{m-2}}}t_0,$$

$$t_0t_i = t_{i-3n^{m-1} \pmod{3n^{m-2}}}t_0;$$

3) при $n^m \geq i > 3n^{m-2}, i \in \mathbb{N}$,

$$t_0s_i = s_it_0;$$

4) при $3n^{m-2} < i < n^m, i \in \mathbb{N}$,

$$s_0t_i = t_{i-3n^{m-2}-n^{m-2}+1 \pmod{n^{m-1}}}s_0,$$

$$s_0s_i = s_{i-3n^{m-2}-n^{m-2}+1 \pmod{n^{m-1}}}s_0.$$

Помітимо вкладеність $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$ в $\wr_{i=1}^m A_n$. Звідси отримуємо, що співвідношення між твірними з L_1 і L_m у $\wr_{i=1}^m A_n$ такі самі як у $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$, тобто для твірних з різних рівнів визначальним є відстань $d(v_1, v_2)$ між відповідними вершинами v_1, v_2 . Тому для $k < m$ співвідношення можна виписати у меншій вкладеній підгрупі $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$, що ізоморфна групі $\text{Aut} X^{m-1}$, для якої ми власне і ввели відстань.

Отже, залишається перевірити лише правильність співвідношень між твірними t_0, s_0 і твірними m -го рівня, бо між вершинами v_1, v_2 з $\text{Aut} X^m$, що відповідають іншим твірним, окрім вершин з L_1 і L_m , відстань $d(v_1, v_2)$ менша за m , тому вони вкладені в $\text{Aut} X^{m-1}$, де виконані співвідношення за припущенням індукції. Тоді позначимо через t_i^m твірний з m -го рівня і його образ після дії спряженням позначимо як $t_i^{(m)}$, $1 < i < 3n^{m-1}$, який має вигляд: $t_i^{(m)} \equiv t_i = [\dots [e, e, e, \dots,] \dots] \underbrace{\dots}_{i-1} (1, 2, 3), \dots, e]$.

Для парного n маємо:

1) при $1 < i < 3n^{m-1}$,

$$s_0t_i = t_i s_0, s_0s_i = s_i s_0;$$

2) при $3n^{m-1} \geq i > 1, i \in \mathbb{N}$, маємо:

$$t_0s_i = s_{i-3n^{m-1} \pmod{3n^{m-1}}}t_0,$$

$$t_0t_i = t_{i-3n^{m-1} \pmod{3n^{m-1}}}t_0;$$

3) при $n^m \geq i > 3n^{m-1}, i \in \mathbb{N}$, $t_0s_i = s_it_0$;

4) при $3n^{m-1} < i < n^m, i \in \mathbb{N}$,

$$s_0t_i = t_{i-3n^{m-1}-n^{m-1}+1 \pmod{n^m}}s_0,$$

$$s_0 s_i = s_{i-3n^{m-1}-n^{m-1}+1(\bmod n^m)} s_0.$$

Наприклад, для $\wr_{i=0}^3 A_5$ остання формула дасть $s_0 t_{75} = t_{101} s_0$.

Оскільки для всіх $i : 0 \leq i \leq n+1$ маємо $|\omega_i| = |A_n| = \frac{n!}{2}$, то $|G| = |A_n \wr A_n \wr A_n| = \left(\frac{n!}{2}\right)^{n^2+n+1}$. Для непарного n доведення абсолютно аналогічне. Отже, встановлено ізоморфізм $G \cong A_n \wr A_n \wr A_n$. $\square$

Позначимо через $G_k = \wr_{n_0}^{n_k} A_{n_i} \wr D$ і нехай G є інверсною границею $\varprojlim G_k$. Оскільки $G = A_{n_i} \wr G$, то G є гіллястою групою [2] і не є локально-скінченною. Справді, G є нескінченно породженою як група континуальної потужності, тому G є топологічним замиканням множини, яка має нескінченну потужність, у даному випадку зліченну. Цією підмножиною є підгрупа G_k , яка є двопородженою.

3. Висновки. У статті наведено просте й елементарне доведення двопородженості метазнакозмінної групи, досліджено козображення груп $\wr_{i=1}^m A_n$, $m \in \mathbb{N}$. Побудовано різні системи твірних для цих груп у тому числі і мінімальну систему твірних $A_{n_1} \wr A_{n_2} \dots \wr A_{n_m}$, $n_i \geq 5$, $m > 2$. Наведену в теоремі 5 систему твірних можна мінімізувати, врахувавши наслідки з співвідношень виду

$$t_{01} t_{001} t_{01}^{-1} = t_{003},$$

$$s_0 t_{0i} s_0^{-1} = t_{0,i-1},$$

де $i > 3$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bhattacharjee M.* The probability of generating certain profinite groups by two elements // Israel J. Math. 86, 1994. — P. 311–329.
2. *Bartholdi L., Grigorchuk R., Sunich Z.* Branch Groups. arXiv: math 0510294 v2 [math.GR]. — 19 Oct. — 2005.
3. *W.M. Kantor.* Some Cayley graphs for simple groups // Discrete Applied Mathematics, **V. 25**, 1989. — P. 99–104.
4. *Karmichael R.D.* Abstract definitions of the symmetric and alternating groups and certain other permutation groups // Quart. J. Math., 49, 1923.
5. *Protasov I., Zelenuk E.* Topologies on Groups Determined by Sequences // VNTL — Klasyka Publishers, 1996–2002, 2002. — 112 pp.

6. *Quick M.* Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups. Commun. Algebra, 32(12) : 4753–4768, 2004.

7. *Quick M.* Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups. II. Int. J. Algebra Comput., 16(3) : 493–503, 2006.

8. *Mustafa Gökhan Benli.* Profinite completion of Grigorchuk's group is not finitely presented. arXiv:1011.3880v2 [math.GR], 2 Feb. — 2012.

9. *Alexey Muranov.* Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep. — 2009.

10. *Олійник Б.В., Сікора В.С., Суцанський В.І.* Метасимметрические и метазнакопеременные группы бесконечного ранга // Математичні Студії. — 2010. — Т.34, №1. — С.3–12.

11. *Заводя М.В., Сікора В.С., Суцанський В.І.* Двухэлементні системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу. // Математичні Студії. — 2010. — Т.34, №1. — С.3–12.