УДК 517.958

©2007 р. В.Г.Маценко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ У ДВОВИДОВІЙ СИСТЕМІ З ВІКОВОЮ СТРУКТУРОЮ

Доведена теорема існування та єдиності для структурованої за віком системи двох взаємодіючих видів.

The theorem on the existence and uniqueness of system solution with age-structure for two interacting species have been proved.

Вступ. Для достатньо адекватного опису динаміки популяції її стан необхідно описувати не тільки загальною чисельністю $N(t)$ в момент часу t, але й розподілом особин за віком, оскільки співвідношення між різними віковими групами в популяції визначають її динаміку в майбутньому. Крім цього, питання раціонального використання природних ресурсів теж вимагають урахування вікової структури популяції, тому що стратегії збирання урожаю в різних вікових групах можуть відрізнятися суттєвим чином.

Класична лінійна модель динаміки вікового складу (модель Маккендріка-фон Фоерстера) має вигляд [1]

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \tau}=-d(\tau)x(\tau,t),\quad t,\tau>0,$$

$$x(0,t)=\int\limits_0^\infty b(\tau)x(\tau,t)d\tau,\quad t>0,\qquad (1)$$

$$x(\tau,0)=\varphi(\tau),\quad \tau\geq 0,$$

де $x(\tau,t)$ – вікова густина особин віку τ в момент часу t; $d(\tau)$, $b(\tau)$ – функції, що описують процеси виживання та народжуваності відповідно, $\varphi(\tau)$ – початковий розподіл вікової структури. Модель (1) при різних припущеннях на функції виживання та народжування вивчалась в багатьох працях, наприклад, в [2].

Важливий вплив на динаміку чисельності популяції мають міжвидові взаємодії. Зокрема, найчастіше в прикладних задачах зустрічаються двовидові системи. Серед них важливу роль відіграють взаємодії за принципом хижак-жертва. Класична модель, що описує взаємодію хижак-жертва належить В.Вольтерри [3]. Огляд різноманітних узагальнень цієї системи наведений в [4].

В праці [5] побудована модель системи "хижак-жертва", що враховує віковий розподіл, і вона має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial x}{\partial t}=-d_1(\tau,X)x-\mu_1(\tau)Yx,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}+\frac{\partial y}{\partial t}=-d_2(\tau,Y)y+\mu_2(\tau)Xy,\tau,t>0,\qquad (2)$$

$$x(0,t)=\int\limits_0^\infty b_1(\tau,X)x(\tau,t)d\tau,$$

$$y(0,t)=\int\limits_0^\infty b_2(\tau,Y)y(\tau,t)d\tau,t>0,$$

$$x(\tau,0)=\varphi_1(\tau),y(\tau,0=\varphi_2(\tau)),\tau\geq 0,$$

де $x(\tau,t)$, $y(\tau,t)$ – вікові густини відповідно жертви та хижака, а

$$X(t)=\int\limits_0^\infty x(\tau,t)d\tau,Y(t)=\int\limits_0^\infty y(\tau,t)d\tau\qquad (3)$$

їх загальні чисельності.

Формулювання об'єкта дослідження. У даній праці модель (2) узагальнюється до структурованої за віком системи двох взаємодіючих видів. Вона має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial x}{\partial t}=-\mu_1(\tau,X,Y)x,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}+\frac{\partial y}{\partial t}=-\mu_2(\tau,X,Y)y, \tau, t>0,$$

$$x(0,t)=\int\limits_0^\infty b_1(\tau,X,Y)x(\tau,t)d\tau,$$

$$y(0,t)=\int\limits_0^\infty b_2(\tau,X,Y)y(\tau,t)d\tau, t>0, \qquad (4)$$

$$x(\tau,0)=\varphi_1(\tau), y(\tau,0=\varphi_2(\tau)), \tau\geq 0.$$

Оскільки на процеси народжування та виживання можуть впливати лише деякі вікові групи, причому з різною інтенсивністю, то більш реально в моделі (4) замість загальних чисельностей X, Y, визначених в (3), розглядати деяку зважену чисельність, тобто

$$X(t)=\int\limits_0^\infty \gamma_1(\tau)x(\tau,t)d\tau,$$

$$Y(t)=\int\limits_0^\infty \gamma_2(\tau)y(\tau,t)d\tau. \qquad (5)$$

Відносно параметрів системи (4) зробимо такі припущення:

а) $\mu_i(\tau,X,Y)$, $b_i(\tau,X,Y)\in C(R^+\times R^+\times R^+)$, $i=1,2$, $R^+=[0,\infty)$ похідні $\mu'_{iX}(\tau,X,Y)$, $\mu'_{iY}(\tau,X,Y)$ існують для всіх $\tau\geq 0$, $X,Y\geq 0$;

б) $\mu_i(\tau,X,Y)$, $b_i(\tau,X,Y)$ – обмежені як функції параметрів τ, X, $Y\in R^+$;

в) $\varphi_i(\tau)$, $\mu_i(\tau,X,Y)$, $b_i(\tau,X,Y)\geq 0$ для всіх τ, X, $Y\in R^+$, $\varphi(\tau)\in L^1(R^+)$;

г) $\varphi_i(0)=\int\limits_0^\infty b_i(\tau,\overline{X},\overline{Y})\varphi_i(\tau)d\tau$, де

$$\overline{X}=\int\limits_0^\infty \gamma_1(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau,$$

$$\overline{Y}=\int\limits_0^\infty \gamma_2(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau;$$

д) $\gamma_i(\tau)$ – неперервні та $0\leq\gamma_i(\tau)\leq\overline{\gamma}_i<\infty$, $\tau\in R^+$.

Основний результат. Для дослідження системи (4) використаємо метод інтегрування вздовж характеристик і зведемо (4) до системи інтегральних рівнянь, аналогічно як це зроблено в [2]). При $t>\tau$ виконаємо заміну $t=\tau+q$, $q>0$, тоді $x(\tau,t)=x(\tau,\tau+q)=\overline{x}(\tau)$ і перше рівняння з (4) набере вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau}=-\mu_1(\tau,X(\tau+q),Y(\tau+q))\overline{x}.$$

Інтегруючи його, знаходимо

$$\overline{x}(\tau)=\overline{x}(0)e^{-\int\limits_0^\tau \mu_1(\xi,X(\xi+q),Y(\xi+q))d\xi},$$

або

$$x(\tau,t)=B_1(t-\tau)e^{-\int\limits_0^\tau \mu_1(\xi,X(\xi+t-\tau),Y(\xi+t-\tau))d\xi},$$
$$t>\tau, \qquad (6)$$

де $B_1(t)=x(0,t)$ – густина новонароджених особин.

Аналогічно, при $t\leq\tau$ за допомогою заміни $\tau=t+q$, $q>0$ знаходимо

$$x(\tau,t)=\varphi_1(\tau-t)e^{-\int\limits_0^t \mu_1(\xi+\tau-t,X(\xi),Y(\xi))d\xi},$$
$$t\leq\tau. \qquad (7)$$

З другого рівняння системи (4) так само маємо

$$y(\tau,t)=B_2(t-\tau)e^{-\int\limits_0^\tau \mu_2(\xi,X(\xi+t-\tau),Y(\xi+t-\tau))d\xi},$$
$$t>\tau, \qquad (8)$$

$$y(\tau,t)=\varphi_2(\tau-t)e^{-\int\limits_0^t \mu_2(\xi+\tau-t,X(\xi),Y(\xi))d\xi},$$
$$t\leq\tau. \qquad (9)$$

Підставивши (6) – (9) в третє та четверте рівняння системи (4) і в (5), одержимо інтегральні рівняння для невідомих $B_1(t)$, $B_2(t)$, $X(t)$, $Y(t)$ вигляду

$$B_i(t)=\int\limits_0^t b_i(t-\tau,X(t),Y(t))\mathcal{K}_i(t,t-\tau,X,Y)\times$$

$$\times B_i(\tau)d\tau + \int\limits_0^t b_i(\tau+t, X(t), Y(t))\times$$

$$\times \mathcal{L}_i(t, t+\tau, X, Y)\varphi_i(\tau)d\tau, i = 1, 2, \qquad (10)$$

$$X(t) = \int\limits_0^t \gamma_1(t-\tau)B_1(\tau)\mathcal{K}_1(t, t-\tau, X, Y)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \gamma_1(t+\tau)\mathcal{L}_1(t, t+\tau, X, Y)\varphi_1(\tau)d\tau, \quad (11)$$

$$Y(t) = \int\limits_0^t \gamma_2(t-\tau)B_2(\tau)\mathcal{K}_2(t, t-\tau, X, Y)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \gamma_2(t+\tau)\mathcal{L}_2(t, t+\tau, X, Y)\varphi_2(\tau)d\tau, \quad (12)$$

де

$$\mathcal{K}_i(t, \tau, X, Y) = e^{-\int\limits_{t-\tau}^t \mu_i(\xi+\tau-t, X(\xi), Y(xi))d\xi},$$

$$\mathcal{L}_i(t, \tau, X, Y) = e^{-\int\limits_0^t \mu_i(\xi+\tau-t, X(\xi), Y(xi))d\xi},$$

$$i = 1, 2. \qquad (13)$$

Доведемо, що система інтегральних рівнянь (10) – (12) має єдиний розв'язок. Тоді згідно з формулами (6) – (9) і популяційна задача (4) теж буде мати єдиний розв'язок.

Нехай

$$C^+[0, T] = \{f \in C[0, T], f \geq 0\}, \quad T > 0.$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема. *Нехай справедливі припущення* а) – д), *тоді система рівнянь (10) – (12) на класі функцій $C^+[0, T]$ має єдиний розв'язок.*

Доведення. Рівняння (10) при будь-яких фіксованих $X(t)$, $Y(t) \in C^+[0, T]$ є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри відносно $B_i(t)$, а, отже, за умов а) – д) існує єдиний розв'язок $B_i(t) \in C^+[0, T]$. Позначимо цей розв'язок через $\mathcal{B}_i(X, Y)(t)$. Тоді рівняння (11), (12) можна подати у вигляді

$$X = \Psi_1(X, Y)(t),$$

$$Y = \Psi_2(X, Y)(t), \qquad (14)$$

де

$$\Psi_i(X, Y)(t) = \int\limits_0^t \gamma_i(t-\tau)\mathcal{B}_i(X, Y)(\tau)\times$$

$$\times \mathcal{K}_i(t, t-\tau, X, Y)d\tau + \int\limits_0^\infty \gamma_i(t+\tau)\times$$

$$\times \mathcal{L}_i(t, t+\tau, X, Y)\varphi_i(\tau)d\tau, i = 1, 2. \qquad (15)$$

Систему (14) запишемо у векторній формі

$$S = \Psi(S)(t), \qquad (16)$$

де S – вектор з компонентами X, Y, а Ψ – вектор з компонентами Ψ_1, Ψ_2.

Доведемо, що оператор Ψ, визначений в (15), має єдину нерухому точку.

Позначимо

$$\|X\| = \max_{t\in[0,T]} |X(t)|,$$

$$\|Y\| = \max_{t\in[0,T]} |Y(t)|, \quad \|S\| = \max(\|X\|, \|Y\|),$$

$$H = \{S \in C^+[0, T], \|S - \Phi\| \leq \Gamma, \Gamma > 0\},$$

де Φ – вектор з компонентами Φ_1, Φ_2 і

$$\Phi_i(t) = \int\limits_0^\infty \gamma_i(t+\xi)\varphi_i(\xi)d\xi, i = 1, 2.$$

Покажемо, що Ψ відображає H в себе і є стискаючим. Розглянемо простір

$$\Omega = \{(\tau, S), \tau \geq 0, S \in H\}.$$

Згідно з умовами а), б), д) отримуємо оцінки

$$\overline{\mu}_i = \sup_{(\tau,S)\in\Omega} \mu_i(\tau, S), \overline{\beta}_i = \sup_{(\tau,S)\in\Omega} b_i(\tau, S),$$

$$\lambda_i = \max(\sup_{(\tau,S)\in\Omega} |\mu'_{iX}(\tau, X, Y)|,$$

$$\sup_{(\tau,S)\in\Omega} |\mu'_{iY}(\tau, X, Y)|),$$

$$\overline{\gamma}_i = \sup_{\tau\geq 0} \gamma_i(\tau), i = 1, 2. \qquad (17)$$

Для всіх $S \in H$ з рівняння (10), враховуючи (17), одержуємо

$$\mathcal{B}_i(X,Y)(t) \le \overline{\beta}_i \int\limits_0^t \mathcal{B}_i(X,Y)(\tau)d\tau + \overline{\beta}_i\overline{\Phi}_i, \tag{18}$$

де

$$\overline{\Phi}_i = \int\limits_0^\infty \varphi_i(\tau)d\tau, i = 1, 2..$$

Згідно з лемою Гронуола-Белмана з (18) маємо

$$\mathcal{B}_i(X,Y)(t) \le \overline{\beta}_i\overline{\Phi}_i e^{\overline{\beta}_i t}. \tag{19}$$

Тоді для $X(t) - \Phi_1(t)$ знаходимо

$$|X(t) - \Phi_1(t)| \le \int\limits_0^t \gamma_1(t-\tau)\mathcal{B}_1(X,Y)(\tau)\times$$

$$\times\mathcal{K}_1(t, t-\tau, X, Y)d\tau + \int\limits_0^\infty \gamma_1(t+\tau)\varphi_1(\tau)\times$$

$$\times|\mathcal{L}_1(t, t+\tau, X, Y) - 1|d\tau \le$$

$$\le \overline{\gamma}_1 \int\limits_0^\infty |\mathcal{L}_1(t, t+\tau, X, Y) - 1|\varphi_1(\tau)d\tau +$$

$$+\overline{\gamma}_1\overline{\beta}_1\Phi_1 \int\limits_0^t e^{\overline{\beta}_1\tau}d\tau \le$$

$$\le \overline{\gamma}_1\overline{\Phi}_1 \sup_{(\tau,S)\in\Omega} |\mathcal{L}_1(t, t+\tau, X, Y) - 1| +$$

$$+\overline{\gamma}_1\Phi_1(e^{\overline{\beta}_1 t} - 1).$$

Враховуючи позначення (13), оцінки (17) і нерівність $|e^z - 1| \le |z|e^{|z|}$, одержуємо

$$\sup_{(\tau,S)\in\Omega} |\mathcal{L}_1(t, t+\tau, X, Y) - 1| \le \overline{\mu}_1 t e^{\mu_1 t}.$$

Таким чином, за рахунок вибору відповідного $t = T > 0$ можна забезпечити виконання нерівності $\|X - \Phi_1\| \le r_1$. Аналогічно $\|Y - \Phi_2\| \le r_2$. Отже, $\|S - \Phi\| \le r$, тобто оператор Ψ відображає простір H в себе.

Доведемо, що відображення (16) є стискаючим при відповідних $\tau > 0$. Для цього виберемо S і $\hat{S} \in H$ і оцінимо $\|\Psi(S) - \Psi(\hat{S})\|$. Здійснимо покомпонентну оцінку. Для цього покладемо

$$\Psi_1(S) - \Psi_1(\hat{S}) = P + Q + R,$$

де

$$P = \int\limits_0^t \gamma_1(t-\tau)\mathcal{B}_1(S)(\tau)(\mathcal{K}_1(t, t-\tau, S) -$$

$$-\mathcal{K}_1(t, t-\tau, \hat{S}))d\tau,$$

$$Q = \int\limits_0^t \gamma_1(t-\tau)\mathcal{K}_1(t, t-\tau, \hat{S})(\mathcal{B}_1(S)(\tau) -$$

$$-\mathcal{B}_1(\hat{S})(\tau))d\tau,$$

$$R = \int\limits_0^\infty \gamma_1(t+\tau)\varphi_1(\tau)(\mathcal{L}_1(t, t+\tau, S) -$$

$$-\mathcal{L}_1(t, t+\tau, \hat{S}))d\tau. \tag{20}$$

Знайдемо оцінку

$$|\mathcal{L}_1(t, t+\tau, S) - \mathcal{L}_1(t, t+\tau, \hat{S})| =$$

$$= e^{-\int\limits_0^t \mu_1(\xi+\tau-t, S(\xi))d\xi}\times$$

$$\times|1 - e^{\int\limits_0^t (\mu_1(\xi+\tau-t, S(\xi)) - \mu_1(\xi+\tau-t, \hat{S}(\xi)))d\xi}| \le$$

$$\le |\int\limits_0^t (\mu_1(\xi+\tau-t, S(\xi)) - \mu_1(\xi+\tau-t, \hat{S}(\xi)))d\xi|\times$$

$$\times e^{|\int\limits_0^t (\mu_1(\xi+\tau-t, S(\xi)) - \mu_1(\xi+\tau-t, \hat{S}(\xi)))d\xi} | \le 2\lambda_1 T e^{2\mu_0 T}\times$$

$$\times\|S - \hat{S}\|.$$

Аналогічно

$$|\mathcal{K}_1(t, t-\tau, S) - \mathcal{K}_1(t, t-\tau, \hat{S})| \le 2\lambda_1 T e^{2\mu_0 T}\times$$

$$\times\|S - \hat{S}\|.$$

Тоді

$$\|P\| + \|R\| \le K_1 T\|S - \hat{S}\|,$$

де $K_1 = 4\lambda_1$ є сталою.

Подібним чином оцінимо $\|Q\|$ і одержимо

$$\|Q\| \leq K_2 T \|\hat{S} - \hat{S}\|,$$

де K_2 – деяка стала.

Звідси

$$\|\Psi_1(S)(t) - \Psi_1(\hat{S})(t)\| \leq (K_1 + K_2)T\|S - \hat{S}\|.$$

Число T можна вибрати так, щоб $(K_1 + K_2)T < 1$. Аналогічно встановлюємо, що

$$\|\Psi_2(S)(t) - \Psi_2(\hat{S})(t)\| \leq (\overline{K}_1 + \overline{K}_2)T\|S - \hat{S}\|.$$

Таким чином, відображення (16) є стискаючим. Звідси випливає, що система (11), (12) має єдиний розв'язок, який можна продовжити до будь-якого $T > 0$. Теорему доведено.

Дану теорему можна узагальнити і на випадок системи n взаємодіючих видів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Von Foerster H.* Some remarks on changing populations // Kinetics of Cellular Proliferation. – New-York: Grune and Stratton, 1959. – P. 382 – 407.

2. *Маценко В.Г.* Нелінійна модель динаміки вікової структури популяцій // Нелінійні коливання. – 2003. – **6**, № 3. – С. 357 – 367.

3. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

4. *Базыкин А.Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – М.: ИКИ, 2003. – 368 с.

5. *Venturino E.* Age-structured predator-prey models // Mathematical Modelling. – 1984. – 5. – P. 117 – 128.