УДК 517.925

©2007 р. О.В. Матвій

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

АПРОКСИМАЦІЯ НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ КВАЗІПОЛІНОМІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ ІЗ БАГАТЬМА ЗАПІЗНЕННЯМИ

Лінійна система диференціальних рівнянь нейтрального типу із багатьма запізненнями апроксимується системою звичайних диференціальних рівнянь. Досліджена схема наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів таких систем.

The linear system of neutral differential equations with many delays is aproximated by the system of ordinary differential equations. The aproximation scheme of the of nonasymptotic roots of quasi-polynomials is investigated for such systems.

Вступ. Одним із важливих для застосувань і добре вивчених класів систем із післядією є лінійні автономні системи

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{ij}x^{(i)}(t-\tau_j)=0, \qquad (1)$$

де $x \in R^n$, A_{ij} – $n \times n$ сталі матриці, $\tau_j \geq 0$, $n, m \in N$.

Якщо шукати частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді $x(t) = e^{\lambda t}\alpha$, де λ–деяке комплексне число, $\alpha \in R^n$–сталий вектор, то число λ повинно бути коренем характеристичного квазіполінома

$$\Phi(\lambda) = \det(\sum_{j=0}^{m} A_{ij}\lambda^i e^{\lambda\tau_j}). \qquad (2)$$

Корені квазіполінома (2), що розміщені поблизу початку координат, називають неасимптотичними, а корені з великими модулями – асимптотичними. Для асимптотичних коренів квазіполіномів одержані загальні асимптотичні формули [1,2]. Для знаходження неасимптотичних коренів потрібно застосувати наближені або числові методи.

У працях [3,4] досліджено алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів скалярних квазіполіномів, що базуються на схемі апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [5] системами звичайних диференціальних рівнянь.

У даній роботі досліджується схема наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів систем диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Відзначимо, що випадок диференціальних рівнянь нейтрального типу з одним запізненням розглядався у праці [6].

Апроксимація неасимптотичних коренів квазіполіномів. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь нейтрального типу із багатьма запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{p} A_i x(t-\tau_i) + \\ + \sum_{i=1}^{p} B_i \frac{dx(t-\tau_i)}{dt}, \qquad (3)$$

де $x \in R^n$, $A_i, i = \overline{0,p}$, $B_i, i = \overline{1,p}$ — сталі матриці розмірності $n \times n$,
$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$.

Характеристичний квазіполіном для рівняння (3) має вигляд:

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^{p} A_i e^{-\lambda\tau_i} - \\ - \sum_{i=1}^{p} B_i \lambda e^{-\lambda\tau_i}). \qquad (4)$$

Поставимо у відповідність рівнянню (3)

за схемою [5,6] систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_0(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{p}A_i z_{l_i}(t)+$$

$$+\mu\sum_{i=1}^{p}B_i(z_{l_i-1}(t)-z_{l_i}(t)), \qquad (5)$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt}=\mu(z_{i-1}(t)-z_i(t)),\ i=\overline{1,m},$$

де $\mu=\dfrac{m}{\tau}$, $l_i=\left[\dfrac{\tau_i m}{\tau}\right]$. Характеристичний поліном системи (5) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda E-A_0 & P_1+Q_1 & \dots & P_m+Q_m \\ -\mu E & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 \\ 0 & -\mu E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E \end{vmatrix}, \ (6)$$

де елементи визначника (6) — матриці розмірності $n\times n$,

$$P_i=\sum_{j=1}^{p}(\mu B_j-A_j)c_{ij},$$

$$Q_i=-\sum_{j=1}^{p}\mu B_j q_{ij},\ c_{ij}=\begin{cases}1, & l_j=i,\\ 0, & l_j\neq i\end{cases},$$

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & l_j-1=i,\\ 0, & l_j-1\neq i\end{cases}$$

і m вибирають так, щоб справджувались нерівності $l_j>1$ при $j>1$.

Для спрощення визначника (6) розіб'ємо його матрицю на блоки:

$$A(\lambda)=(\lambda E-A_0),$$

$$B=\begin{pmatrix} P_1+Q_1 & \dots P_m+Q_m \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -\mu E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_m(\lambda)=\begin{pmatrix} (\mu+\lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E \end{pmatrix}.$$

Тут $A(\lambda), D_m(\lambda)$ — квадратні матриці і, крім того, $\det(D_m(\lambda))\neq 0$ для фіксованого значення λ, крім хіба що одного значення m.

Використовуючи властивості блочних матриць, запишемо (6) у вигляді

$$\Psi_m(\lambda)=\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D_m \end{pmatrix}=$$

$$=\det(A-B\cdot D_m^{-1}\cdot C)\cdot\det(D_m), \qquad (7)$$

де D_m^{-1} — обернена матриця до матриці D_m. Матрицю D_m^{-1} представимо у такому вигляді

$$D_m^{-1}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}.$$

Обчислюючи добуток матриць

$$(B\cdot D_m^{-1}\cdot C)=\mu(\sum_{i=1}^{p}(A_i-B_i\mu)d_{l_i1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}B_i\mu d_{l_i-1,1}),$$

перепишемо характеристичний многочлен (7) у такому вигляді

$$\Psi_m(\lambda)=\det(A-\mu(\sum_{i=1}^{p}(A_i-B_i\mu)d_{l_i1}-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}B_i\mu d_{l_i-1,1}))\cdot\det(D_m). \qquad (8)$$

Для елементів d_{i1}, $i=\overline{1,m}$, матриці D_m^{-1} нескладно дістати співвідношення

$$d_{i1}=\frac{\mu^{i-1}}{(\mu+\lambda)^i}E.$$

Тоді рівність (8) можна подати у вигляді

$$\Psi_m(\lambda)=\det(A-\sum_{i=1}^{p}(A_i-B_i\mu)(\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{l_i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{p} B_i\mu(\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{l_i-1}) \cdot \det(D_m), \qquad (9)$$

звідки одержуємо твердження.

Теорема 1. *Для характеристичного полінома апроксимуючої системи (5) справджується рівність*

$$\Psi_m(\lambda) = \det(A - \sum_{i=1}^{p}(A_i+\lambda B_i)\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{l_i})\times$$

$$\times \det(D_m). \qquad (10)$$

Дослідимо зв'язок між характеристичним квазіполіномом (4) і характеристичним поліномом (6).

Теорема 2. *Для фіксованих* $\lambda \in \mathbf{Z}$ *послідовність функцій*

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}},\ m \in N \qquad (11)$$

збігається при $m \to \infty$ *до характеристичного квазіполінома (4).*

Доведення. Розглянемо фіксоване $\lambda \in \mathbf{Z}$. Тоді $\lambda \neq -\dfrac{m}{\tau}$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in N$ за можливим винятком одного $m \in N$.

Враховуючи позначення $\mu = \dfrac{m}{\tau}$ і рівність (10), маємо

$$H_m(\lambda) = \det(A - \sum_{i=1}^{p}(A_i+\lambda B_i)\times$$

$$\times\left(\frac{m}{m+\lambda\tau}\right)^{l_i}). \qquad (12)$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+\lambda\tau}\right)^{\frac{\tau_i m}{\tau}} = e^{-\lambda\tau_i}$$

та означення числа l_i одержуємо

$$\lim_{m\to\infty}\left(A - \sum_{i=1}^{p}(A_i+\lambda B_i)\left(\frac{m}{m+\lambda\tau}\right)^{l_i}\right)$$

$$= (\lambda E - \sum_{i=0}^{p} A_i e^{-\lambda\tau_i} - \sum_{i=1}^{p} B_i\lambda e^{-\lambda\tau_i}).$$

Отже, переходячи в рівності (12) до границі при $m \to \infty$ для фіксованого $\lambda \in \mathbf{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty} H_m(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^{p} A_i e^{-\lambda\tau_i} -$$

$$-\sum_{i=1}^{p} B_i\lambda e^{-\lambda\tau_i}). \qquad (13)$$

Теорема 2 доведена.

Зауваження. Функція $H_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (11), апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (4). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (4). Так як нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (11), збігаються, то корені характеристичного полінома (6) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів характеристичного квазіполінома (4).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения.–М.:Мир, 1967.–548 с.

2. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклонающимся аргументом.–М.: Наука, 1971.–296 с.

3. *Черевко І.М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування.–К.:Ін-т математики НАН України, 1992.–С.74–84.

4. *Cherevko I.M., Piddybna L.A.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations.–1999.–28, N1.–P.15-21.

5. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика.– Чернівці: Рута, 2002.–С.50–54.

6. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Про апроксимацію неасимптотичних коренів квазіполіномів для систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 191–192. Математика: Рута, 2004.–С.119–122.