УДК 517.51

©2007 р. С.С.Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

СКЛАДОВІ ОПЕРАТОРИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ АППЕЛЯ

Одержані критерії повноти та квазістепеневої базисності системи узагальнених послідовностей Аппеля в просторах послідовностей, що наділені нормальною топологією.

Criteria of completeness and quasiexponential basis property of system of generalized Appel sequences in sequence spaces which are allocated by normal topology are received.

В роботі [1] вивчено клас лінійних неперервних операторів вигляду

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k P, \qquad (1)$$

які діють у просторі послідовностей (тут D – оператор узагальненого диференціювання, а оператор P діє в просторі послідовностей за правилом $(Pc)_m = (-1)^m c_m, m = 0, 1, \ldots$). Для операторів виду (1) були знайдені критерії епіморфізму та ізоморфізму, а також описані ядра таких операторів. Отримані результати застосовані до знаходження критеріїв того, система звичайних поліномів Аппеля з класу $A^{(2)}$ є повною, або утворює квазістепеневий базис, або ж є зображуючою системою в різних просторах аналітичних функцій. В той же час в монографії [2] для простору A_R наведено умови квазістепеневої базисності системи узагальнених поліномів Аппеля, які не отримуються з результатів статті [1].

В даній статті для операторів виду

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k P + a_{-1}(\mathcal{J} + \mathcal{J}P), \qquad (2)$$

де $\mathcal{J}$ – оператор узагальненого інтегрування, досліджуються питання, аналогічні до вивчених в [1] для операторів вигляду (1). Отримані результати використовуються для знаходження критеріїв повноти, квазібазисності і квазістепеневої базисності системи узагальнених поліномів Аппеля в різних просторах аналітичних функцій.

1. Скрізь надалі без додаткових посилань використовуються означення і позначення статті [1]. Нагадаємо деякі з них. Нехай $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ – фіксована послідовність відмінних від нуля комплексних чисел. Визначимо в просторі ω всіх послідовностей комплексних чисел оператори узагальненого диференціювання D та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}$:

$$(Dc)_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} c_{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(\mathcal{J}c)_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} c_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, (\mathcal{J}c)_0 = 0.$$

Нехай E – нормальний векторний підпростір ω, який містить простір φ всіх фінітних послідовностей. Надалі будемо вважати також, що $E - D$ та $\mathcal{J}$ інваріантний підпростір з нормальною топологією ν. Легко перевірити, що оператори D та $\mathcal{J}$ неперервно діють з (E, ν) в (E, ν), при цьому $\mathcal{J}'y = y_+$. (тут і надалі $y_+ = (y_1, y_2, \ldots)$, $y_- = (0, y_0, y_1, y_2, \ldots)$,якщо $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$). З результатів роботи [3] випливає,що якщо $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (b_k)_{k=0}^{\infty} \in r(E)$, то оператор L неперервно діє в (E, ν). Запишемо оператор L у вигляді

$$L = \overline{a}(D) + \overline{b}(D)P + a_{-1}(\mathcal{J} + \mathcal{J}P) =$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} a_k D^k + \sum_{k=-1}^{\infty} b_k D^k P = a(D) + b(D)P,$$

де $b_{-1} = a_{-1}$ і $D^{-1} = \mathcal{J}$.

Утворимо для L союзний оператор $L_1 = a(-D) - b(D)P$. Оператори LL_1 та $L_1 L$ неперервно діють в (E, ν). Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що

$$LL_1 = L_1 L = \overline{a}(D)\overline{a}(-D) - \overline{b}(D)\overline{b}(-D) -$$

$$-2a_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} D^{2k} + 2a_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} D^{2k}. \quad (3)$$

З (3) випливає, що характеристична функція $\eta(\lambda)$ оператора $\Lambda = LL_1 = L_1 L$ дорівнює $\eta(\lambda) = a(\lambda)a(-\lambda) - b(\lambda)b(-\lambda)$ і, тому, $\Lambda = \eta(D)$. Зауважимо також, що характеристична послідовність η оператора Λ належить $r(E)$, якщо $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (b_k)_{k=0}^{\infty} \in r(E)$.

З того, що оператори L та L_1 переставні, та з лем 1,2 роботи [1] випливає правильність наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай E – нормальний векторний простір послідовностей, який містить φ і є інваріантним відносно D та $\mathcal{J}$. Якщо $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (b_k)_{k=0}^{\infty} \in r(E)$, то*

а) Λ – епіморфізм $(E, \nu) \iff L$ та L_1 епіморфізми (E, ν);

б) Λ – бієктивний $\iff L$ та L_1 бієктивні;

в) Λ – ізоморфізм $(E, \nu) \iff L$ та L_1 – ізоморфізми (E, ν).

Зауважимо, що оператор Λ є диференціальним оператором нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами відносно узагальненого диференціювання.

2. Дослідимо тепер оператор L. Оскільки при умові, що $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (b_k)_{k=0}^{\infty} \in r(E)$, він неперервно діє з (E, ν) в (E, ν), то спряжений оператор L' неперервно діє з (E_D^{α}, σ) в (E_D^{α}, σ), причому

$$L'y = \overline{a} \times y + P\overline{b} \times Py + a_{-1} y_+ + a_{-1} P y_+, \quad (4)$$

де $y \in E_D^{\alpha}$. Зауважимо, що дію оператора L' на $y \in E_D^{\alpha}$ можна записати у вигляді

$$L'y = a \times y + Pb \times Py, \quad (4')$$

де згортка розглядається в просторі нескінчених в обидві сторони послідовностей, причому послідовності вигляду $(\ldots, 0, 0, d_0, d_1, d_2, \ldots)$ і $(d_0, d_1, d_2, \ldots)$ ототожнюються, а $(Pc)_k = (-1)^k c_k$, k – ціле.

Далі маємо: $L'e_0 = \overline{a} + P\overline{b}$, $L'e_1 = (\overline{a} - P\overline{b})_- + 2a_{-1}e_0$. Звідси одержуємо, що $2a_{-1} = (L'e_1)_0$, $2\overline{a} = L'e_0 + (L'e_1)_+$, $2\overline{b} = P[L'e_0 - (L'e_1)_+]$, і тому оператор L' однозначно визначається своїми значеннями $L'e_0$ і $L'e_0$.

Позначимо $\eta = a \times Pa - b \times Pb$ і покладемо в $(4')$ $L'y = c$. Тоді

$$\eta \times y = Pa \times c - Pb \times Pc, \; c = L'y. \quad (5)$$

З використанням (5) доводиться

Теорема 2. *Оператор L' є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\eta \neq 0$.*

Наслідок. *Для того, щоб множина $L(E)$ значень оператора L була щільною в (E, ν), необхідно і достатньо, щоб $\eta \neq 0$.*

Теорема 3. *Якщо $L^{-1}(0) = \{0\}$, то $a_0^2 - b_0^2 - 2a_{-1}(a_1 - b_1) \neq 0$.*

Доведення . Маємо, $Le_0 = (a_0 + b_0)e_0 + 2a_{-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_0}e_1$, $Le_1 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}(a_1 - b_1)e_0 + (a_0 - b_0)e_1$. Тому, якщо $L^{-1}(0) = \{0\}$, то

$$det \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & 2a_{-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \\ \frac{\alpha_0}{\alpha_1}(a_1 - b_1) & a_0 - b_0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Надалі будемо вважати, що відносно простору (E, ν) і функції $\eta(z)$ виконуються припущення п.2 §4 з [1].

Теорема 4. *I. Нехай E – нормальний D та $\mathcal{J}$ інваріантний підпростір ω, який містить φ, $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (b_k)_{k=0}^{\infty} \in r(E)$, $\eta = a \times Pa - b \times Pb$, $L = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k D^k + \sum_{k=-1}^{\infty} b_k D^k P$, $b_{-1} = a_{-1}$.*

II. Нехай простір E задовольняє умови Б), В) роботи [1].

III. Нехай також, $\eta \neq 0$.

Тоді

а) L – епіморфізм (E, ν).

б) $L^{-1}(0) = \overline{span y_{j,s}}$, де $y_{j,s} = L_1 x_{j,s}$, а $x_{j,s}$ – послідовності, які побудовані за нулями функції $\eta(z)$ так, як це зроблено в [1].

в) $L^{-1}(0) = \{0\} \iff \eta(z) \neq 0$ на множині G.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови I та II теореми 4, то L буде епіморфізмом простору* (E,ν) *тоді і тільки тоді, коли* $\eta \neq 0$.

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови I та II теореми 4 і, крім цього для* (E,ν) *є правильною теорема про ізоморфізм. Тоді оператор виду* (2), *в якому* $a, b \in r(E)$, *є ізоморфізмом* (E,ν) *тоді і тільки тоді, коли* $\eta(z) \neq 0$ *на множині* G.

3. Застосуємо результати пунктів 1-2 до знаходження критеріїв повноти, квазібазисності та базисності узагальнених послідовностей Аппеля. Нехай $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ – довільні послідовності комплексних чисел. Розглянемо формальні ряди $\alpha(zt) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (zt)^n$, $a(t) = \frac{a_{-1}}{t} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $b(t) = -\frac{a_{-1}}{t} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, і утворимо вираз $\lambda_z(t) = a(t)\alpha(zt) + b(t)\alpha(-zt)$. Маємо, $\lambda_z(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_n(z) t^n$, де $P_n(z)$ – многочлен степеня $\leq n$ при непарному n і степеня $\leq n+1$ при парному n. Систему многочленів $\{P_n(z)\}$ будемо називати послідовністю узагальнених многочленів Аппеля, класу $A^{(2)}$.

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n+1} p_{k,n} z^k,$$

$$p_{k,n} = (a_{n-k} + (-1)^k b_{n-k})\alpha_k, \ k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Послідовність $(p_n)_{n=0}^{\infty}$, де $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} p_{k,n} e_k$, назвемо узагальненою послідовністю Аппеля.

Надалі скрізь вважатимемо, що $\alpha_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Утворимо оператор L виду (2),

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k D^k P + a_{-1}(\mathcal{J} + \mathcal{J}P),$$

де D та $\mathcal{J}$ побудовані за послідовністю $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$. L визначений на множині φ всіх фінітних послідовностей і діє із φ в φ. При цьому $Le_k = \frac{1}{\alpha_k} \sum\limits_{s=0}^{k+1} [a_{k-s} + (-1)^s b_{k-s}] \alpha_s e_s$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і $L(\alpha_k e_k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Використовуючи ці співвідношення і леми 3-6 з [1] одержуємо, що є правильною

Теорема 5. *Нехай* E *– нормальний* D *та* $\mathcal{J}$ *інваріантний простір послідовностей, який містить* φ; $(a_k)_{k=0}^{\infty}, (b_k)_{k=0}^{\infty} \in r(E)$. *Тоді для того, щоб узагальнена послідовність Аппеля* $\{p_n\}$

а) була повною в (E,ν), *необхідно і досить, щоб* $\eta \neq 0$;

б) була квазібазисом в (E,ν), *підпорядкованим базису* $\{\alpha_k e_k\}$, *необхідно і достатньо, щоб оператор* L *був епіморфізмом* (E,ν);

в) утворювала в (E,ν) *базис, близький до* $\{\alpha_k e_k\}$, *достатньо, щоб оператор* L *був епіморфізмом* (E,ν), *і необхідно, щоб* L *був бієктивним оператором.*

Наслідок. *При виконанні умов теореми 5 і якщо для* (E,ν) *є правильною теорема про ізоморфізм, узагальнена послідовність Аппеля* $\{p_n\}$ *тоді і тільки тоді є базисом в* (E,ν), *близьким до базису* $\{\alpha_n e_n\}$, *якщо* L *– ізоморфізм* (E,ν).

За теоремою 5 і наслідку з неї одержуємо критерії повноти, квазібазисності і квазістепеневої базисності системи узагальнених поліномів Аппеля в конкретних аналітичних аналітичних просторах.

4. Всі твердження цієї статті можна перенести на оператори вигляду

$$L = \sum_{s=0}^{n-1} a_s(D) P^s + \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} b_i^{(k)} \varepsilon^{-ks} \mathcal{J}^i P^s,$$

де n – фіксоване натуральне число, $\varepsilon = exp\frac{2\pi i}{n}$, $(Pc)_m = \varepsilon^m c_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $a_s(D) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i^{(s)} D^i$ і $\{a_i^{(s)}\}_{i=0}^{\infty} \in r(E)$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, а $b_i^{(k)}$ – довільні константи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коробейник Ю.Ф.* Составные операторные уравнения в обобщённых производных и их приложения к последовательностям Аппеля // Матем. сб. – 1977. – Т. 102(144), 4. – С. 475-498.

2. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – К., 1995. – 300 с.

3. *Коробейник Ю.Ф.* Операторные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэфицинентами // Сиб. мат. ж. – 1976. – Т. 17, №3. – С.571-585.