УДК 517.51

©2007 р. Н.Є. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ПРО ОДИН КЛАС ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ ОПЕРАТОРИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

В класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, описано всі розв'язки одного класу операторних рівнянь, які містять степінь оператора узагальненого інтегрування.

In a class of linear continuous operators which act in spaces of analytical functions, solutions of one class of the operational equations which contain a degree of an operator of the generalized integration are described all.

Різні зображення лінійних неперервних операторів, які діють у просторах аналітичних функцій і задовольняють певні співвідношення, що пов'язані з операторами диференціювання та інтегрування, вивчалися в працях Ж. Дельсарта і Ж.-Л. Ліонса [1], Ю.Ф. Коробейника [2], М.І. Нагнибіди [3], І.Х. Дімовського [4] та багатьох інших математиків.

У цій статті в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях, описуються розв'язки операторного рівняння виду

$$T\mathcal{J}_\alpha^p = AT, \qquad (1)$$

де $\mathcal{J}_\alpha$ – оператор узагальненого інтегрування, p – деяке натуральне число, A – фіксований, а T – шуканий лінійні неперервні оператори. Через A_R, $0 < R \le \infty$, позначатимемо простір усіх функцій, аналітичних у крузі $|z| < R$, що наділений топологією компактної збіжності [5]. Топологія на просторі A_R задається системою норм $\{||\cdot||_r : 0 < r < R\}$, де $||f||_r = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ для $f \in A_R$.

Для послідовності відмінних від нуля комплексних чисел $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ визначається на елементах степеневого базису $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ співвідношеннями:

$$\mathcal{J}_\alpha z^n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z^{n+1}, \qquad (2)$$

$n = 0, 1, \ldots$. Для того, щоб оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ продовжувався до лінійного неперервного оператора, що діє в A_R, необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|} \le 1, \text{ якщо } R < \infty,$$

або

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|} < \infty, \text{ якщо } R = \infty.$$

Опишемо спочатку розв'язки операторного рівняння (1) при $p = 1$, тобто знайдемо загальний вигляд лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$, $0 < R_1, R_2 \le \infty$, для яких

$$T\mathcal{J}_\alpha = AT, \qquad (3)$$

де $\mathcal{J}_\alpha$ – оператор узагальненого інтегрування, який лінійно і неперервно діє в A_{R_1}, A – довільний фіксований лінійний неперервний оператор, що діє в просторі A_{R_2}.

Нехай лінійний неперервний оператор $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ є розв'язком операторного рівняння (3) і $\varphi_n(z) = Tz^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Подіявши рівністю (3) на z^n, одержимо, що

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\varphi_{n+1}(z) = (A\varphi_n)(z), \ , n = 0, 1, \ldots.$$

З цих рівностей випливає, що при $n = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_n(z) = \frac{\alpha_0}{\alpha_n}\varphi_0(z), \qquad (4),$$

де $\varphi_0(z)$ – деяка аналітична в крузі $|z| < R_2$ функція. Оскільки $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$, то, використовуючи канонічне зображення лінійних неперервних операторів [3], з (4) випливає, що виконується умова

$$\forall r_2 < R_2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{|\alpha_n|}||A^n\varphi_0||_{r_2}} < R_1 \qquad (5)$$

і для довільної функції $f(z) \in A_{R_1}$ є правильною рівність

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\alpha_0}{\alpha_n} (A^n\varphi_0)(z). \qquad (6)$$

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{J}_\alpha$ – лінійний неперервний оператор узагальненого інтегрування, що діє в просторі A_{R_1}, і A – довільний фіксований лінійний неперервний оператор, що діє в A_{R_2}. Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ був розв'язком операторного рівняння* (3) *необхідно і достатньо, щоб T зображався у вигляді* (6), *де $\varphi_0(z)$ – деяка функція з простору A_{R_2}, що задовольняє умову* (5).

Достатність умов теореми 1 встановлюється безпосередньою перевіркою.

Розглянемо деякі приклади застосування теореми 1.

1. Нехай Δ та U_z відповідно оператори Помм'є та множення на незалежну змінну. Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ був розв'язком рівняння $TU_z = \Delta T$ необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\Delta^n\varphi_0)(z),$$

причому $\varphi_0(z)$ – довільна функція з простору A_{R_2} у випадку $R_1R_2 > 1$. Якщо ж $R_1R_2 \le 1$, то $\varphi_0(z)$ належить простору $\overline{A}_{\frac{1}{R_1}}$. Іншим методом це операторне рівняння та його узагальнення досліджені в [6].

2. Нехай $\mathcal{J}$ – оператор вольтерівського інтегрування. Загальний розв'язок операторного рівняння $T\mathcal{J} = \Delta T$ в класі лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ дається формулою

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)(\Delta^n\varphi_0)(z),$$

де $\varphi_0(z)$ – довільна функція з класу $[1, R_1)$ [7].

3. Операторне рівняння $T\mathcal{J} = U_zT$ в класі лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ має лише нульовий розв'язок.

4. Загальний розв'язок операторного рівняння $TU_z = \mathcal{J}T$ в класі лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ дається формулою

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (J^n\varphi_0)(z),$$

де $\varphi_0(z)$ – довільна функція з простору A_{R_2}.

Перелік подібних прикладів можна продовжити. Зокрема, якщо $A = \mathcal{J}_\alpha$, то з теореми 1 одержуємо опис комутанта оператора узагальненого інтегрування.

Опишемо далі розв'язки операторного рівняння (1) в класі лінійних неперервних операторів $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$, де $\mathcal{J}_\alpha$ – оператор узагальненого інтегрування, який лінійно і неперервно діє в A_{R_1}, p – фіксоване натуральне число, а A – довільний фіксований лінійний неперервний оператор, що діє в A_{R_2}.

Нехай лінійний неперервний оператор $T : A_{R_1} \to A_{R_2}$ є розв'язком рівняння (1). Позначивши $Tz^n = \varphi_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, і подіявши рівністю (1) на z^n, одержимо:

$$\varphi_{n+p}(z) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+p}} (A\varphi_n)(z). \qquad (7)$$

Використовуючи (7), встановлюємо, що є правильними рівності:

$$\varphi_{np+q}(z) = \frac{\alpha_q}{\alpha_{np+q}} (A^n\varphi_q)(z), \qquad (8)$$

де $q = \overline{0, p-1}$, $n = 0, 1, \ldots$. Оскільки T є лінійним неперервним оператором, то для довільної функції $f(z)=\sum\limits_{q=0}^{p-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{np+q}z^{np+q}$ з простору A_{R_1}:

$$(Tf)(z)=\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{np+q}\frac{\alpha_q}{\alpha_{np+q}}(A^n\varphi_q)(z), \quad (9)$$

де $\varphi_q(z)$, $q=\overline{0,p-1}$ – деякі функції з простору A_{R_2}.

Використовуючи умову неперервності оператора T [3], одержимо, що

$$\forall q=\overline{0,p-1}\ \forall r_2<R_2$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[np+q]{\frac{1}{|\alpha_{np+q}|}||A^n(\varphi_q)||_{r_2}}<R_1. \quad (10)$$

Отже, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{J}_\alpha$ – лінійний неперервний оператор узагальненого інтегрування, що діє в просторі A_{R_1}, A – довільний фіксований лінійний неперервний оператор, що діє в A_{R_2}, а p – довільне фіксоване натуральне число. Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T: A_{R_1}\to A_{R_2}$ був розв'язком операторного рівняння* (1) *необхідно і достатньо, щоб T зображався у вигляді* (9), *де $\varphi_q(z)$, $q=\overline{0,p-1}$ – деякі функції з простору A_{R_2}, що задовольняють умову* (10).

Доведення. Достатність. При виконанні умови (10) формулою (9) визначається лінійний неперервний оператор $T: A_{R_1}\to A_{R_2}$. Для довільної функції $f(z)=\sum\limits_{q=0}^{p-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{np+q}z^{np+q}$ з простору A_{R_1} маємо:

$$T(\mathcal{J}_\alpha^p f(z))=$$

$$=T\left(\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{np+q}\frac{\alpha_{(n+1)p+q}}{\alpha_{np+q}}z^{(n+1)p+q}\right)=$$

$$=\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{np+q}\frac{\alpha_{(n+1)p+q}}{\alpha_{np+q}}\frac{\alpha_q}{\alpha_{(n+1)p+q}}A^{n+1}(\varphi_q(z))=$$

$$=A\left(\sum_{q=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{np+q}\frac{\alpha_q}{\alpha_{np+q}}A^n(\varphi_q(z))\right)=$$

$$=A(Tf(z)).$$

Тому T є розв'язком рівняння (1).

Розглядаючи конкретні оператори A та $\mathcal{J}_\alpha$, одержуємо зображення розв'язків відповідних рівнянь виду (1) аналогічно до того, як це зроблено при ілюстрації застосувань теореми 1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe //Comment. Math. Helv. – 1957. – 32, №2. – p.113-128.

2. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. – 156 с.

3. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – Київ, 1995. – 297 с.

4. *Dimovski I.* Convolutional Calculus. Series: Mathematics and its Applications. – 1990. – Vol. 43. – 208 p.

5. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie. – J. reine und angew. Math., 1953. – Bd. 191, №1-2.– S.30-49.

6. *Лінчук Н.Є.,Лінчук С.С.* По один клас операторних рівнянь у просторі аналитичних функцій// Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 1999.– вип 46. – С.67–71.

7. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.