УДК 517.956

©2007 р. О.М.Ленюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕССЕЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ТИПУ РОЗПОДІЛІВ

Досліджуються властивості перетворення Бесселя згорток, згортувачів та мультиплікаторів одного класу узагальнених функцій типу розподілів.

There are investigated the properties of the Bessel transform of curtalments, curtalmenters and multiplicators of one class of generalized functions of distribution type.

Метод інтегральних перетворень (Фур'є, Фур'є-Бесселя, Лежандра, Лапласа, Ганкеля, Вебера та ін.) є одним із ефективних методів побудови розв'язків задач математичної фізики в різних формах, зручних для аналітичного дослідження. Цей метод використовується при дослідженні еволюційних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

де $A = F^{-1}[aF]$. Оператор A називається псевдодиференціальним оператором, a – функція (символ), яка задовольняє певні умови, F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення. Ці перетворення визначені у відповідних топологічних просторах, структура яких, у свою чергу, залежить від властивостей, якими володіє функція a. Якщо для рівняння (1) досліджувати задачу Коші з початковими умовами, які є лінійними неперервними функціоналами над певними просторами, то виникає необхідність вивчення властивостей перетворення Фур'є узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів та ін.) Тут досліджуються властивості перетворення Бесселя, яке діє у просторах узагальнених функцій типу розподілів. Ці простори є топологічно спряженими до просторів основних функцій, що виникають при дослідженні рівнянь вигляду (1) з оператором $A = F_B^{-1}[aF_B]$, де F_B – перетворення Бесселя. Зазначимо, що властивості перетворення Бесселя просторів узагальнених функцій типу S', W', C' вивчалися у працях [1 – 3].

1. Простори основних функцій Φ та $\overset{\circ}{\Phi}$. Нехай γ – фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, $\nu > 0$ – фіксоване число таке, що $2\nu + 1 = p_0 \in \mathbb{N}$, γ_0: $1 + [\gamma] + p_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Елементами простору Φ, за означенням, є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції φ, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k \varphi(x)| \le \frac{c_k}{(1 + |x|)^{\gamma_0 + k}}, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

У Φ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою норм:

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$
$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що

$$\|\varphi_0\| \le \|\varphi_1\| \le \|\varphi_2\| \le \dots \le \|\varphi\|_p, \varphi \in \Phi, \qquad (2)$$

тобто ці норми є попарно зрівняними.

Збіжність в Φ визначається так: послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ до функції $\varphi \in \Phi$ при $\nu \to \infty$, якщо

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ : \ \|\varphi_\nu - \varphi\|_p \to 0, \nu \to \infty.$$

Зазначимо, що $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset \Phi$, причому ці вкладення є неперервними і щільними. Позначимо через Φ_p поповнення Φ за p-ою нормою. Φ_p – банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset$

$\cdots \supset \Phi_p \supset \ldots$. Кожне вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервне (внаслідок (2)) і щільне (бо щільними є вкладення $D(\mathbb{R})$ у кожний простір Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$). В [4] доведено, що Φ – повний досконалий зліченно нормований простір, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є компактним.

Зазначимо, що збіжність у просторі Φ можна охарактеризувати ще й так [4] : $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається за топологією простору Φ до $\varphi \in \Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall \nu \geq 1 : \ \ \|\varphi_\nu\|_p \leq c;$$

2) правильно збігається в Φ, а саме, для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожній обмеженій замкненій множині $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простору Φ. Оскільки $\overset{\circ}{\Phi}$ утворює підпростір Φ, то в $\overset{\circ}{\Phi}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями.

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя F_B (див. [5]):

$$F_B[\varphi](\xi) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν – нормована функція Бесселя. Властивості перетворення F_B досліджені в [5].

Нехай T_x^ξ – оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя $B_\nu := \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2\nu+1}{x}\dfrac{d}{dx}$ [6]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$.

Говоритимемо, що оператор T_x^ξ визначений у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $T_x^\xi \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ для кожного $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$.

Лема 1. *Оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ визначений і неперервний у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.*

Доведення. Символом $\overset{\circ}{\Psi}$ позначимо Фур'є-образ простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Для доведення твердження скористаємося співвідношенням $F_B[\overset{\circ}{\Phi}] = \overset{\circ}{\Psi}$ [5], а також відомою властивістю оператора T_x^ξ [6]: якщо f – неперервна функція, для якої $\int\limits_0^\infty |f(x)| x^{2\nu+1} dx < \infty$, а g – неперервна обмежена для всіх $x \geq 0$ функція, то

$$\int\limits_0^\infty T_x^\xi f(x) g(x) x^{2\nu+1} dx = \int\limits_0^\infty f(x) T_x^\xi g(x) x^{2\nu+1} dx.$$

Отже, для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ маємо:

$$F_B[T_x^\xi \varphi](\sigma) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx.$$

Крім того, відомо [6], що

$$T_x^\xi j_\nu(\sigma x) = j_\nu(\sigma\xi) \cdot j_\nu(\sigma x).$$

Отже,

$$F_B[T_x^\xi \varphi](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi) \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= j_\nu(\sigma\xi) \cdot F_B[\varphi](\sigma) \equiv \Psi_\xi(\sigma).$$

При фіксованому ξ функція $j_\nu(\sigma\xi)$, як функція σ, є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$ [5]. Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{\Psi}$, то $\Psi_\xi \in \overset{\circ}{\Psi}$ при кожному ξ. Скориставшись оберненим перетворенням Бесселя знайдемо, що $T_x^\xi \varphi = F_B^{-1}[\Psi_\xi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, тобто вказаний оператор визначений у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Неперервність оператора T_x^ξ випливає з властивості неперервності операції прямого і оберненого перетворення Бесселя. Справді, якщо $\{\varphi, \varphi_k, k \geq 1\} \subset \overset{\circ}{\Phi}$, причому $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то

$$F_B[T_x^\xi \varphi_k] = j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi_k](\sigma) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma) = F_B[T_x^\xi \varphi]$$

у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$. Застосувавши перетворення F_B^{-1} знайдемо, що $T_x^\xi \varphi_k \to T_x^\xi \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Лема доведена.

Лема 2. *Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ диференційовна у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.*

Доведення. Нехай, за означенням,

$$\Phi_{\Delta\xi}(x) = \frac{1}{\Delta\xi}[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi \varphi(x)],$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}, \{\xi, \Delta\xi, x\} \subset \mathbb{R}, \Delta\xi \neq 0.$$

Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta\xi} \to \frac{\partial}{\partial\xi} T_x^\xi \varphi, \quad \Delta\xi \to 0,$$

справджується у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Урахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) досить довести, що

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}] \xrightarrow[\Delta\xi\to 0]{\overset{\circ}{\Psi}} F_B\left[\frac{\partial}{\partial\xi} T_x^\xi \varphi\right].$$

Іншими словами, це означає (див. [5]), що:

1) сім'я функцій $\{F_B[\Phi_{\Delta\xi}], |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0$ – деяке фіксоване число$\}$ обмежена в просторі $\overset{\circ}{\Psi}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 \ \forall \Delta\xi \neq 0: \ \ |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0:$$

$$\|F_B[\Phi_{\Delta\xi}]\|_p =$$

$$= \sup_{\sigma\in(0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^{2p} \sigma^{2k} |D_\sigma^{2k} F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma)| \right\} \leq c_p;$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ сім'я функцій

$$\{\gamma_{m,\Delta\xi}(\sigma) := D_\sigma^m (F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma) -$$

$$-F_B[\frac{\partial}{\partial\xi} T_x^\xi \varphi]), |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0\}$$

збігається до нуля при $\Delta\xi \to 0$ рівномірно по σ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset (0, \infty)$.

Доведено, що умова 1) виконується. Урахувавши, що

$$F_B[T_x^\xi \varphi] = j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma),$$

одержимо співвідношення:

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma) = \frac{1}{\Delta\xi}(F_B[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi](\sigma) - F_B[T_x^\xi \varphi](\sigma)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}(j_\nu(\sigma(\xi+\Delta\xi)) - j_\nu(\sigma\xi)) F_B[\varphi](\sigma) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi)) F_B[\varphi](\sigma).$$

Із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає, що

$$\left| D_\sigma^l \left(\frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi)) \right) \right| \leq \tilde{c}_l |\sigma|,$$

$$0 < \theta < 1, 0 \leq l \leq 2k,$$

де $\tilde{c}_l = \tilde{c}_l(\xi)$ (ξ – фіксоване) і $\tilde{c}_l$ не залежить від $\Delta\xi$.

Нехай $|\sigma| \geq 1$. Тоді, урахувавши попередню нерівність, знайдемо, що

$$\sigma^{2k}|D_\sigma^{2k} F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma)| = \sigma^{2k} \Big| \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \times$$

$$\times D_\sigma^l \left(\frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi)) \right) \cdot D_\sigma^{2k-l} F_B[\varphi](\sigma) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \tilde{c}_l |\sigma|^{2k+l} \cdot |D_\sigma^{2k-l} F_B[\varphi](\sigma)|.$$

В [5] доведено, що для σ: $|\sigma| \geq 1$ справджується нерівність

$$|D_\sigma^{2k-l} F_B[\varphi](\sigma)| \leq \frac{c_{2k-l}}{|\sigma|^{2k+n+2}}, 0 \leq l \leq 2k, |\sigma| \geq 1.$$

Тоді

$$\sigma^{2k}|D_\sigma^{2k}F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma)| \le b_k, \quad |\sigma| \ge 1,$$

де стала $b_k > 0$ залежить від ξ (ξ – фіксоване) і не залежить від $\Delta\xi$.

Якщо $|\sigma| < 1$, то функція $\sigma^{2k-l}D_\sigma^{2k-l}\times \times F_B[\varphi](\sigma)$ обмежена на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ [5], тобто

$$|\sigma^{2k-l}D_\sigma^{2k-l}F_B[\varphi](\sigma)| \le \tilde{\tilde{c}}_{2k-l}, \quad \sigma \ne 0$$

(у точці $\sigma = 0$ маємо усувний розрив або розрив 1-го роду). Тоді для $\sigma < 1$, $\sigma \ne 0$

$$|\sigma^{2k+1}D_\sigma^{2k-l}F_B[\varphi](\sigma)| =$$

$$= |\sigma^{l+1}\sigma^{2k-l}D_\sigma^{2k-l}F_B[\varphi](\sigma)| \le \tilde{\tilde{c}}_{2k-l}.$$

Звідси вже випливає, що

$$\sup_{\sigma>0}\{\sigma^{2k}|D_\sigma^{2k}F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma)|\} \le \tilde{b}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де стала $\tilde{b}_k > 0$ не залежить від $\Delta\xi$. Отже,

$$\sup_{\sigma>0}\{\sum_{k=0}^{p}\sigma^{2k}|D_\sigma^{2k}F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma)|\} \le c_p, c_p = \sum_{k=0}^{p}\tilde{b}_k,$$

тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 \ \forall \Delta\xi \ne 0: \ |\Delta\xi| \le \varepsilon_0:$$

$$\|F_B[\Phi_{\Delta\xi}]\|_p \le c_p.$$

Таким чином, умова 1) виконується.

Далі скористаємося такими відомими формулами [7]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(\sigma\xi) = c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}j_\nu(\sigma\xi) = c\sigma\xi^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi), \qquad (3)$$

де стала c залежить лише від ν. Тоді

$$F_B\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}T_x^\xi\varphi\Big](\sigma) = \frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma) =$$

$$= c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma),$$

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}](\sigma) = \frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))F_B[\varphi](\sigma) =$$

$$= c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))F_B[\varphi](\sigma).$$

Знову скориставшись формулами (3) знайдемо, що

$$\gamma_{m,\Delta\xi}(\sigma) = c\xi D_\sigma^m[\sigma^2(j_{\nu+1}(\sigma(\xi+\Delta\xi))-$$

$$-j_{\nu+1}(\sigma\xi))F_B[\varphi](\sigma)] = cc_1\xi^2\theta\Delta\xi D_\sigma^m[\sigma^4\times$$

$$\times j_{\nu+2}(\sigma(\xi+\theta_1\Delta\xi))F_B[\varphi](\sigma)], \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

де стала $c_1 > 0$ залежить лише від ν, $0 < \theta_1 < 1$. Із властивостей нормованої функції Бесселя $j_{\nu+2}$ (див. інтегральне зображення Пуассона) та функції $F_B[\varphi]$ випливає, що при кожному фіксованому $m \in \mathbb{Z}_+$ функція

$$D_\sigma^m j_{\nu+2}(\sigma(\xi+\theta_1\Delta\xi))F_B[\varphi](\sigma)]$$

є обмеженою деякою сталою $c > 0$, яка не залежить від $\Delta\xi$, якщо $\sigma \in \mathbb{K} \subset (0,\infty)$ ($\mathbb{K}$ – компактна множина). Отже, $\gamma_{m,\Delta\xi} \to 0$ при $\Delta\xi \to 0$ рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset (0,\infty)$. Таким чином, умова 2) також виконується.

Лема доведена.

Слідуючи [7], згортку двох функцій з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначимо формулою

$$(\varphi{*}\psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \{\varphi,\psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi};$$

при цьому із властивостей оператора T_x^ξ випливає, що

$$|(\varphi*\psi)(x)| \le \int_0^\infty |T_x^\xi\varphi(x)|\,|\psi(\xi)|\xi^{2\nu+1}d\xi \le$$

$$\le \int_0^\infty T_x^\xi|\varphi(x)| \cdot |\psi(\xi)|\xi^{2\nu+1} \le \alpha_\nu \cdot |\varphi(x)|, \quad (4)$$

де $\alpha_\nu = \int_0^\infty |\psi(\xi)|\xi^{2\nu+1}d\xi$. На підставі (4) твердимо, що на функціях вигляду $\varphi*\psi$, $\{\varphi,\psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi}$, визначене перетворення Бесселя

$$F_B[\varphi*\psi](\sigma) = \int_0^\infty (\varphi*\psi)(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx,$$

при цьому правильною є формула

$$F_B[\varphi * \psi] = F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi], \quad \forall\{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{\Phi}$$

(зазначимо, що якщо $\{f, g\} \subset \overset{\circ}{\Psi}$, то $f \cdot g \in \overset{\circ}{\Psi}$ [5]). Справді,

$$F_B[\varphi * \psi](\sigma) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\Big)\times$$

$$\times j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x)\times$$

$$\times x^{2\nu+1}dx\Big)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(x\sigma)\times$$

$$\times x^{2\nu+1}dx\Big)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma\xi)\times$$

$$\times j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx\Big)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx \cdot \int_0^\infty \psi(\xi)j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= F_B[\varphi](\sigma)\cdot F_B[\psi](\sigma);$$

при цьому $F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi] \in \overset{\circ}{\Psi}$. Застосувавши обернене перетворення Бесселя знайдемо, що

$$\varphi * \psi = F_B^{-1}[F_B[\varphi]\cdot F_B[\psi]] \in \overset{\circ}{\Phi}.$$

Отже, $\overset{\circ}{\Phi}$ є топологічною алгеброю відносно операції згортки основних функцій.

2. Простір узагальнених функцій $(\overset{\circ}{\Phi})'$. Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ визначається формулою

$$< f, \varphi >= \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\exists c > 0 \ \exists s \in (0, [\gamma]) \ \forall x \in \mathbb{R}:$$
$$|f(x)| \le c(1 + |x|)^s, \tag{5}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$:

$$< F_f, \varphi >= \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx, \quad \forall\varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

тобто простір $\overset{\circ}{\Phi}$ вкладається в $(\overset{\circ}{\Phi})'$. З леми дю Буа Раймона випливає, що кожна регулярна узагальнена функція з $(\overset{\circ}{\Phi})'$ визначається однією (з точністю до значень на множині міри нуль) локально інтегровною парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка задовольняє умову (5). З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $\overset{\circ}{\Phi} \ni f \to F_f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ є неперервним.

Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ введена топологія проективної границі просторів $\overset{\circ}{\Phi}_p$ ($\overset{\circ}{\Phi}_p$ складається з парних функцій простору Φ_p), причому вкладення $\overset{\circ}{\Phi}_{p+1} \subset \overset{\circ}{\Phi}_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні та компактні, то

$$(\overset{\circ}{\Phi})' = (\lim_{p\to\infty} \mathrm{pr}\, \overset{\circ}{\Phi}_p)' = \lim_{p\to\infty} \mathrm{ind}\, (\overset{\circ}{\Phi}_p)'.$$

Отже, якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$, то $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_p)'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ має скінченний порядок. Іншими словами, f допускає продовження як лінійний неперервний функціонал з деякого (найменшого) спряженого простору $(\overset{\circ}{\Phi}_p)'$; при цьому

$$| < f, \varphi > | \le c\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $c = \|f\|_p$ – норма функціоналу f у просторі $(\overset{\circ}{\Phi}_p)'$. Зауважимо також, що кожне вкладення $(\overset{\circ}{\Phi}_p)' \subset (\overset{\circ}{\Phi}_{p+1})'$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним і компактним. Звідси та зі слабкої повноти просторів $(\overset{\circ}{\Phi}_p)'$, $p \in \mathbb{Z}_+$, дістаємо, що простір $(\overset{\circ}{\Phi})'$ – повний.

Оскільки в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) =< f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) >=< f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) >$$

(тут f_ξ позначає дію функціоналу f на основну функцію $T_x^\xi \varphi(x)$ як функцію аргументу ξ), при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$. Якщо $f*\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}, \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то функціонал f називається **згортувачем у просторі** $\overset{\circ}{\Phi}$. Оскільки $\overset{\circ}{\Phi}$ – досконалий простір із диференційовною операцією узагальненого зсуву аргументу, то із результатів, одержаних у [8] випливає, що кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Оскільки $F_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$< F_B[f], \varphi >=< f, F_B^{-1}[\varphi] >, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}. \quad (6)$$

Із (6), властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$ над простором $\overset{\circ}{\Psi}$.

Теорема 4.2. *Якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя (прямого і оберненого), а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо співвідношення:

$$\forall \psi \in \overset{\circ}{\Psi} : \; < F_B[f*\varphi], \psi >=< f*\varphi, F_B^{-1}[\psi] >=$$

$$= \int_0^\infty (f * \varphi)(x) F_B^{-1}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty < f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) > F_B^{-1}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int_0^\infty \varphi(x) F_B^{-1}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \right\rangle \quad (7)$$

(зазначимо, що остання рівність записана, поки-що, формально). Нехай

$$I(\xi) := \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B^{-1}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$I(\xi) = c_\nu \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \Big(\int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \Big) \times$$

$$\times x^{2\nu+1} dx = c_\nu \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) \times$$

$$\times \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = c_\nu \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) \times$$

$$\times x^{2\nu+1} dx \Big) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = c_\nu \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \varphi(x) \times$$

$$\times j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} \Big(\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) \times$$

$$\times x^{2\nu+1} dx \Big) d\sigma = c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \times$$

$$\times\sigma^{2\nu+1}d\sigma = F_B^{-1}[F_B[\varphi]\cdot\psi](\xi),$$
$$c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$$

(тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty|\psi(\sigma)\varphi(x)j_\nu(\sigma x)j_\nu(\sigma\xi)|\times$$
$$\times\sigma^{2\nu+1}x^{2\nu+1}d\sigma\Big)dx).$$

Отже,

$$< F_B[f*\varphi],\psi >=< f, F_B^{-1}[F_B[\varphi]\cdot\psi] >=$$
$$=< F_B[f], F_B[\varphi]\cdot\psi >=$$
$$=< F_B[f]\cdot F_B[\varphi],\psi >,\quad \forall\psi\in\overset{\circ}{\Psi}.$$

Звідси дістаємо рівність

$$F_B[f*\varphi] = F_B[f]\cdot F_B[\varphi].$$

Залишається обгрунтувати коректність співвідношень (7). Введемо позначення:

$$I_r(\xi) := c_\nu\int_0^r\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)\times$$
$$\times j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,\quad r>0.$$

Для доведення (7) досить показати, що $I_r(\xi)\to I(\xi)$ при $r\to+\infty$ у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, тобто, що $\gamma_r(\xi) := I(\xi)-I_r(\xi)\to 0$, $r\to+\infty$, за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Це означає, що: 1) сім'я функцій $\{\gamma_r, r>0\}$ обмежена в $\overset{\circ}{\Phi}$:

$$\forall p\in\mathbb{Z}_+\ \exists c_p>0\ \forall r>0:\ \ \|\gamma_r\|_p\le c_p;$$

2) для довільного $m\in\mathbb{Z}_+$ сім'я функцій $\{D_\xi^m\gamma_r, r>0\}$ збігається до нуля при $r\to+\infty$ рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}$.

Доведемо 1). Для довільного $m\in\mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$D_\xi^m\gamma_r(\xi) = c_\nu\int_r^{+\infty}\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)\times$$
$$\times D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \tag{8}$$

$$D_\xi^m I(\xi) = c_\nu\int_0^\infty\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)\times$$
$$\times D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \tag{9}$$

$$D_\xi^m I_r(\xi) = c_\nu\int_0^r\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)\times$$
$$\times D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma. \tag{10}$$

Диференціювання тут по ξ під знаком інтеграла можливе, оскільки всі вказані інтеграли рівномірно збіжні по параметру ξ. При цьому із рівномірної збіжності по параметру ξ інтеграла (9) випливає рівномірна збіжність інтегралів (8), (10). Для доведення рівномірної збіжності інтеграла (9) досить, очевидно, встановити рівномірну збіжність (по ξ) інтеграла

$$\int_1^{+\infty}|\psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi)|\sigma^{2\nu+1}d\sigma. \tag{11}$$

Із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає нерівність

$$|D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi)|\le 2A_\nu\sigma^m,\quad \sigma\ge 0, \forall\xi\in\mathbb{R}.$$

Крім того, для $\sigma\ge 1$ маємо, що[5]

$$|F_B[\varphi](\sigma)|\le\frac{c_s}{\sigma^{s+2\nu+1}},$$

де $s\ge m$, $s\in\mathbb{N}$. Урахувавши ці нерівності, а також те, що $\psi\in L_1(\mathbb{R})$, якщо $\psi\in\overset{\circ}{\Psi}$ одержимо, що інтеграл (11) є рівномірно збіжним по параметру ξ.

Зазначимо, що

$$D_\xi^m\gamma_r(\xi) = D_\xi^m I(\xi) - D_\xi^m I_r(\xi),\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_\xi^m\gamma_r(\xi)|\le|D_\xi^m I(\xi)| + |D_\xi^m I_r(\xi)|.$$

Розглянемо функції

$$D_\xi^m I_{r,+}(\xi) = \max_{\xi\in\mathbb{R}}(D_\xi^m I_r(\xi), 0),$$

$$D_\xi^m I_{r,-}(\xi) = -\min_{\xi\in\mathbb{R}}(D_\xi^m I_r(\xi), 0),$$

які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$|D_\xi^m I_r(\xi)| = D_\xi^m I_{r,+}(\xi) + D_\xi^m I_{r,-}(\xi) \le$$
$$\le 2|D_\xi^m I(\xi)|.$$

Отже,

$$|D_\xi^m \gamma_r(\xi)| \le 3|D_\xi^m I(\xi)| =$$
$$= 3|D_\xi^m (F_B^{-1}[F_B[\varphi]\cdot\psi](\xi))|, \quad \forall r > 0.$$

Оскільки $D_\xi^m(F_B^{-1}[F_B[\varphi]\cdot\psi]) \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, $\psi \in \overset{\circ}{\Psi}$, то

$$M(\xi)^{\gamma_0+m}|D_\xi^m \gamma_r(\xi)| \le 3M(\xi)^{\gamma_0+m}\times$$
$$\times|D_\xi^m(F_B^{-1}[F_B[\varphi]\cdot\psi](\xi))| \le c_m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

де стала $c_m > 0$ не залежить від r. Звідси вже випливає, що сім'я функцій $\{\gamma_r, r > 0\}$ обмежена в $\overset{\circ}{\Phi}$:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Big\{\sum_{m=0}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+m}|D_\xi^m\gamma_r(\xi)|\Big\} \le \sum_{m=0}^{p} c_m \equiv c_p,$$

тобто умова 1) виконується.

Властивість 2) випливає з рівномірної збіжності інтеграла (9) по ξ (рівномірної на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$), встановленої раніше, бо тоді

$$\int_r^{+\infty} \psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)D_\xi^m j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1} \to 0$$

при $r \to +\infty$ рівномірно по $\xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ як залишок збіжного інтеграла. Теорема доведена.

З доведеної теореми випливає також, що якщо функціонал $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функцій $f \in \overset{\circ}{\Phi}$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, то її перетворення Беселя – згортувач у просторі $\overset{\circ}{\Psi}$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_B[f] * \varphi =< F_B[f], T_x^\xi\varphi(x) >=$$
$$=< f, F_B^{-1}[T_x^\xi\varphi(x)] >, \quad \forall\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}.$$

Оскільки

$$F_B^{-1}[T_x^\xi\varphi(x)] = j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma),$$

то

$$F_B[f] * \varphi =< f, j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma) >=$$
$$= \int_0^\infty f(\sigma)j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$
$$= F_B[fF_B^{-1}[\varphi]].$$

звідси випливає, що $F_B[fF_B^{-1}[\varphi]] \in \overset{\circ}{\Psi}$, бо $fF_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$ (тут враховано те, що $F_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$, а f – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$).

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дрінь С.С., Дрінь І.І.* Перетворення Фур'є-Бесселя просторів типу S та S' // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 50 – 59.

2. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування // Доповіді НАН України. – 2003. – N 6. – С. 7 – 12.

3. *Городецький В.В., Дрінь С.С.* Перетворення Фур'є-Бесселя просторів типу C та C' // Доповіді НАН України. – 2004. – N 8. – С. 19 – 24.

4. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

5. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно диференційовних функцій // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2006. Вип. 15. – С. 51 – 66.

6. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.

7. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, N 2. – С. 299 – 310.

8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.